РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ МНОГОСЛОЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРУБКАХ: АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Кизилова Н.Н., Чистина Э.О.
Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина

В работе исследуется задача о распространении малых возмущений в заполненных вязкой жидкостью трехслойных трубках, образованных анизотропными вязкоупругими слоями с различными толщинами и реолгическими свойствами. Представлены результаты расчетов профилей скорости и давления в трубках в виде разложений по малому параметру, который является отношением радиального перемещения стенки ко внутреннему радиусу трубки. Показано, что параметры течения различны для устойчивых и неустойчивых мод и для переходных режимов. Показана возможность слияния мод. Обсуждаются границы применимости полученных результатов к течению крови в артериях как многослойных трубках, а также к течениям жидкостей в биомедицинских устройствах и в трубках технических систем.

Течение вязкой несжимаемой жидкости по деформирующимся трубкам активно исследуется в связи с течением крови в артериях, влиянием гидродинамических параметров на развитие сосудистых патологий, расчетами шунтов и стентов, изготавливаемых из аутотрансплантатов и другими актуальными задачами биологии и медицины [1,2]. Существенно, что артерии являются многослойными вязкоупругими трубками, причем отдельные слои отличаются по реологическим свойствам и функциям. Средний слой образован механочувствительными клетками, которые реагируют на изменения гидростатического давления и скорости сдвига на стенке. Внутренний слой образован гладкомышечными клетками, сокращение/расслабление которых ведет к уменьшению/увеличению просвета трубки, что приводит к соответствующим изменениям объемного расхода крови. Наружный слой состоит из соединительной ткани и армирован двумя семействами расположенных спирально волокон коллагена. При развитии сосудистых патологий могут изменяться толщины, модули упругости и вязкость слоев [1].

Вопросы устойчивости стационарного течения жидкости по многослойным трубкам исследовались в [3] для случаев закрепленной и ненагруженной стенки. Было показано, что для разных режимов течений и параметров стенки существует по крайней мере одна неустойчивая жидкостная мода, причем за счет надлежащего выбора параметров слоев стенки можно добиться стабилизации этой моды, перевести абсолютную неустойчивость в конвективную и, таким образом, управлять течением [4]. Влияние типа анизотропии слоев и граничных условий на устойчивость системы жидкость-стенка подробно исследовалось в [5].

Исследование течений крови по артериям как многослойным вязкоупругим трубкам привело к важным для технических и биомедицинских приложений решениям по стабилизации течений, устранению нежелательных высокочастотных осцилляций стенки, шумогенерации, снижению производительности системы (объемного расхода при заданном перепаде давлений). Особенности распространения волн в многослойных трубках исследовались в [3,6]. Для случая закрепленной стенки выражения для скорости и давления в жидкости, перемещений и давлений в стенке были получены методом разложения по малому параметру для однослойной [6] и многослойной стенки [3]. Для приложений важны исследования переходов от устойчивого к неустойчивому режимам течений и возможности коалесценции мод, продемонстрированной в [4,5].

В данной работе получено решение задачи о течении жидкости в трехслойной трубке при условии ненагружения внешней поверхности трубки, что соответствует поверхностно расположенным артериям и трубкам многих биомедицинских аппаратов и технических систем.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим трубку кругового сечения с внутренним радиусом R_0, образованную тремя слоями, толщины которых H_1, H_2, H_3. Слои испытывают перемещения $\vec{u}^{(j)} = \left(u_r^{(j)}, 0, u_x^{(j)}\right)$, где $j = 1, 2, 3$ - номер слоя. Таким образом, положения слоев в произвольный момент времени описываются радиусами:

$$\begin{array}{l} R_1\,(t,x) = R_0 + u_r\,(t, R_0, x), \\ R_2\,(t,x) = R_0 + H_1 + u_r\,(t, R_0 + H_1, x), \\ R_3\,(t,x) = R_0 + H_1 + H_2 + u_r\,(t, R_0 + H_1 + H_2, x), \\ R_4\,(t,x) = R_0 + H_1 + H_2 + H_3 + u_r\,(t, R_0 + H, x) \end{array} \tag{1}$$

где $H = H_1 + H_2 + H_3$ - начальная толщина стенки.

Уравнения Навье-Стокса для жидкости и классической теории вязкоупругости для несжимаемой стенки трубки имеют вид:

$$\begin{array}{l} div(\vec{v}) = 0, \quad \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\,\vec{v} = -\dfrac{1}{\rho_f}\nabla p + \nu\Delta\vec{v}, \\ div(\vec{u}^{(j)}) = 0, \quad \rho_s^{(j)}\dfrac{\partial^2 \vec{u}^{(j)}}{\partial t^2} = -\nabla p^{(j)} + div(\hat{\sigma}^{(j)}) \end{array} \tag{2}$$

где $\vec{v} = (v_r, 0, v_x)$ и p – скорость и гидростатическое давление в жидкости, ρ_f и (ρ^j) – плотности жидкости и слоев, $p^{(j)}$ и $\hat{\sigma}^{(j)}$ – гидростатические давления и тензоры напряжений слоев.

Для материала слоев примем реологическую модель Кельвина-Фойхта:

$$\lambda_1^{(j)}\frac{\partial \sigma^{(j)}}{\partial t} + \sigma^{(j)} = 2G^{(j)}\left(e^{(j)} + \lambda_2^{(j)}\frac{\partial e^{(j)}}{\partial t}\right) \tag{3}$$

где $G^{(j)}$ – модуль сдвига, $\lambda_1^{(j)}$ и $\lambda_2^{(j)}$ – реологические коэффициенты, имеющие смысл времен релаксации напряжений и деформаций.

Граничные условия представлены условиями непрерывности скоростей, нормальных и касательных напряжений на границе раздела жидкость-стенка и между слоями стенки:

$$r = 0 : |v_x| < \infty, \quad v_r = 0 \tag{4}$$

$$r = R_1 : \quad v_r = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\left(1+\lambda_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(p_s^{(1)}-p+2\nu\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)=2G^{(1)}\left(1+\lambda_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \tag{6}$$

$$\nu\rho_f\left(1+\lambda_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial v_r}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)=G^{(1)}\left(1+\lambda_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial r}\right) \tag{7}$$

$$r=R_i, i=2,3: \quad u_r^{(i-1)}=u_r^{(i)}, \;\; u_x^{(i-1)}=u_x^{(i)} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\left(1+\lambda_1^{(i)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(1+\lambda_1^{(i-1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(p_s^{(i)}-p_s^{(i-1)}\right)=2G^{(i)}\left(1+\lambda_1^{(i-1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\times\\ \times\left(1+\lambda_2^{(i)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r}-2G^{(i-1)}\left(1+\lambda_1^{(i)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(1+\lambda_2^{(i-1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u_r^{(i-1)}}{\partial r}\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}G^{(i-1)}\left(1+\lambda_2^{(i-1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(1+\lambda_1^{(i)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_r^{(i-1)}}{\partial x}+\frac{\partial u_x^{(i-1)}}{\partial r}\right)=\\ =G^{(i)}\left(1+\lambda_1^{(i-1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(1+\lambda_2^{(i)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial r}\right)\end{gathered} \tag{10}$$

На внешней поверхности трубки задано условие ненагружения

$$\begin{gathered}\left(1+\lambda_1^{(i)}\frac{\partial}{\partial t}\right)p_s^{(i)}=2G^{(i)}\left(1+\lambda_2^{(i)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r},\\ G^{(i)}\left(1+\lambda_2^{(i)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial r}\right)=0\end{gathered} \tag{11}$$

На входе в трубку задана входная волна давления

$$x=0: \frac{2}{R_1^2}\int\limits_0^{R_1} rp\,(t,r,0)dr=p_0\,(t) \tag{12}$$

На конце трубки задано условия отражения волны, которые является следствием условий непрерывности давления и объемного расхода на конце трубки

$$x=L: \quad Y_t\int\limits_0^{R} rp\,(t,r,0)\,dr=\pi R_1^2\int\limits_0^{R_1} rv_x\,(t,r,x)\,dr, \;\; Y_t=\frac{Q}{\langle p\rangle} \tag{13}$$

2. Решение задачи.

Будем считать, что радиальные перемещения слоев малы по сравнению с внутренним радиусом трубки $R_0/L\equiv\varepsilon, \quad u_r^*/R_0\equiv\varepsilon<<1$. Решение задачи (1)-(13) будем искать в виде разложений по малому параметру $f=f^{(0)}+\varepsilon f^{(1)}+\varepsilon^2 f^{(2)}+...$, где $f=\{v_r,v_x,p,u_r,u_x,p_s\}$ – набор неизвестных задачи. Для нулевого приближения в безразмерных переменных получим следующую систему уравнений (значки $^{(0)}$ при неизвестных опущены):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial p}{\partial r} = 0\\
&\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) = 0\\
&\frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(j)}}{r} + \frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial x} = 0\\
&\left(1 + \alpha_1^{(j)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial p_s^{(j)}}{\partial r} = 0\\
&\left(1 + \alpha_1^{(j)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\rho^{(j)}\frac{\partial^2 u_x^{(j)}}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s^{(j)}}{\partial x}\right) = \frac{\Gamma^{(j)}}{Re}\left(1 + \alpha_2^{(j)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 u_x^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial r}\right)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

С граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&r = 0: \quad |v_x| < \infty, \quad v_r = 0,\\
&r = 1: \quad v_r = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial t}, \quad \left(1 + \alpha_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(p_s^{(1)} - p\right) = 0,\\
&\Gamma^{(1)}\left(1 + \alpha_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial r} = 0,\\
&r = 1 + H_i, i = 1, 2: \quad u_r^{(i)} = u_r^{(i+1)}, \quad u_x^{(i)} = u_x^{(i+1)},\\
&\left(1 + \alpha_1^{(i+1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(1 + \alpha_1^{(i)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(p_s^{(i+1)} - p_s^{(i)}\right) = 0,\\
&\Gamma^{(i)}\left(1 + \alpha_2^{(i)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(1 + \alpha_1^{(i+1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial r} =\\
&= \Gamma^{(i+1)}\left(1 + \alpha_2^{(i+1)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(1 + \alpha_1^{(i)}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u_x^{(i+1)}}{\partial r},\\
&r = R_4: \quad u_r^{(3)} = 0, \quad u_x^{(3)} = 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Во начальном сечении трубки задана входящая волна, а на конце трубки - условие отражения волн:

$$
x = 0: \quad 2\int_0^1 rpdr = p_0\left(t\right), \quad x = 1: \quad y_t\int_0^1 rpdr = \int_0^1 rv_x dr
$$

Решение задачи (14)-(15) найдено в виде бегущей волны. Выражения для амплитуд неизвестных $f^{(0)}$ вычислены в квадратурах. Выписана также система уравнений для приближений 1-го порядка и получено ее решение в аналитической форме.

3. Анализ результатов численного моделирования.

Путем численных расчетов по полученным выражениям проведены расчеты профиля скорости жидкости в трубке, перемещений слоев стенки, амплитуд падающей и отраженной волн, напряжения сдвига на стенке. Оценена погрешность решения, полученного по компонентам нулевого порядка. Исследованы устойчивые жидкостные и стеночные моды, частоты и волновые числа которых были вычислены в [3,5,6]. Получены соответствующие решения для переходных режимов и случаев слияния мод. Показана возможность стабилизации течения за счет подбора модулей сдвига, вязкостей, плотностей и толщин слоев стенки трубки. Проведена оценка влияния реактивных изменений параметров стенки артерий, вызванных развитием различных патологий, на параметры течения и его устойчивость. Полученные результаты могут быть использованы как для лучшего понимания влияния изменений гемодинамических параметров на сердце и сосуда, а также для проектирования оптимальных биомедицинских аппаратов и систем, основанных на прокачивании биожидкостей по вязкоупругим трубкам.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Milnor W.R.* Hemodynamics. Baltimore: Williams and Wilkins. 1989. 408 p.

[2] *Pedley T.J.* Blood flow in arteries and veins. // Perspectives in Fluid dynamics. Batchelor G.K., Mofatt H.K., Worster M.G. (eds.). Cambridge: Cambridge Univ.Press. 2000. P. 105–158.

[3] *Hamadiche M., Kizilova N.N.* Temporal and spatial instabilities of the flow in the blood vessels as multi-layered compliant tubes. //Intern.J.Dynam.Fluids. 2005. Vol.1,N1. P. 1–23.

[4] *Kizilova N., Hamadiche M., Gad-el-Hak M.* Flow in Compliant Tubes: Control and Stabilization by Multilayered Coatings. // Intern. J. Flow Control. 2009. v.1,N3. P. 199–211.

[5] *Hamadiche M., Kizilova N., Gad-el-Hak M.* Suppression of Absolute Instabilities in the Flow inside a Compliant Tube. //Communications in Numerical Methods in Engineering. 2009. vol.25,N5. P. 505–531.

[6] *Кизилова Н.Н.* Распространение волн давления в заполненных жидкостью трубках из вязкоупругого материала. //Известия РАН. МЖГ. 2006. N3. С. 122–136.

Kizilova N.N., Chistina E.O. WAVE PROPAGATION IN THE FLUID-FILLED MULTILAYER VISCOELASTIC TUBES: AN ASYMPTOTIC ANALYSIS. *Propagation of small excitations in the fluid-filled three layered viscoelastic tubes composed form anisotropic viscoelastic layers with different thickness and rheological properties is considered. The computation results on the velocity profiles and pressures in the tubes obtained as expansions in terms of the small parameter which is a ratio of the radial displacement of the wall and the inner radius of the tube are presented. It was shown the flow parameters are different for the stable and unstable modes and for the transitional regimes. A possibility of the mode coalescence is shown. Possible applications of the results to the blood flow in the arteries as multilayered tubes as well as to the fluid flows in the biomedical un its and inthe tubes of technical systems are discussed.*