

ОТРАЖЕНИЕ ПУЛЬСОВЫХ ВОЛН И РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА АРТЕРИАЛЬНЫХ РУСЕЛ С АНАСТОМОЗАМИ

Н.Н.Кизилова

Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина
61077, Украина, Харьков, пл.Свободы, 4.

Работа посвящена исследованию закономерностей распространения волн давления в заполненных жидкостью системах податливых трубок. Задача связана с распространением пульсовых волн в артериальных руслах и возможностями пульсовой диагностики на основе исследования амплитудно-частотного спектра пульса. В работе проведен сравнительный анализ проводимостей для двух схем организации русла. Для дихотомически ветвящихся систем итеративная процедура позволяет вычислить проводимость как функцию параметров системы. Для русел с анастомозами задача сводится к решению нелинейной алгебраической системы. Исследованы аналитические решения для случая симметричных систем. Показано, что существует набор резонансных частот, амплитуды которых сильно меняются при вариации условий отражения на концах, а соответствующие фазы достигают экстремума, что позволяет использовать указанные показатели для диагностики. Набор резонансных частот определяется длиной трубки первого порядка ветвления и наличием или отсутствием анастомозов.

PULSE WAVE REFLECTION AND RESONANT PROPERTIES OF ARTERIAL NETWORKS WITH ANASTOMOSIS

The article is devoted to investigation of pressure waves propagation in the systems of elastic tubes filled with a fluid. The problem is connected with pulse wave propagation in the arterial beds and pulse diagnosis based on the investigation of the amplitude-frequency spectra of the pulse. The comparative analysis of the admittance of two networks is carried out. For the dichotomous branching beds the iterative procedure allows to calculate the admittance as a function of the parameters of the system. For the networks with anastomosis the problem is reduced to the decision of nonlinear algebraic system. The analytical solutions for the case of symmetric systems are investigated. It is shown that there is a set of resonant frequencies. The corresponding amplitudes significantly vary at the wave reflection conditions variation and their phases achieve the extremum. The parameters of resonant harmonics can be used in medical diagnostics. The set of harmonics is defined by the first order tube length and presence or absence of the anastomosis.

1. Введение

Распространение волн давления в артериальных руслах исследуется в гидромеханике на основе моделей движения жидкости в деформируемых трубках. В качестве простейшей модели сосудистого русла, имеющего в действительности сложную пространственную организацию, используются модификации модели упругой камеры [1], которые позволяют исследовать многие особенности волновых течений жидкости, однако не могут адекватно описать процессы распространения и отражения волн давления и обусловленных ими осцилляций объемного расхода. Артериальные русла представляют собой нерегулярные ветвящиеся системы, состоящие из цилиндрических проводящих элементов, механические и геометрические параметры которых отличаются у разных внутренних органов и зависят от номера порядка ветвления элемента. Многократные ветвления обеспечивают равномерную доставку крови в каждую точку органа, а вариации геометрии русла связаны с особенностями структуры и функции органа. Морфометрические данные выявили ряд закономерностей в организации русел отдельных органов, а статистический анализ результатов измерений показал, что геометрия дихотомически ветвящихся русел соответствует модели оптимального трубопровода, обеспечивающего доставку жидкости к распределенной системе потребителей с минимальными суммарными затратами [2].

Волновой характер перемещения крови по сосудам определяет особенности функции внутренних органов. Так, при искусственной перфузии последних стационарным потоком изменяется нормальный характер распределения крови в русле и нарушается функция органа. Помимо этого, существует согласование времен распространения пульсовых волн по руслам отдельных органов [1]. Особенности геометрии системы коронарных артерий обеспечивают усиление потока крови в малые артерии порядка $j = 15$ и выше [3]. Целый ряд экспериментальных данных подтверждает, что ветвящиеся артериальные русла не являются только пассивными резистивными элементами в системе кровообращения.

Податливость стенок сосудов позволяет исследовать пульсовые изменения объема периферических артерий и использовать соответствующие характеристики в целях диагностики. Традиционная методика пульсовой диагностики восточной медицины предусматривает анализ перемещения стенок ряда поверхностных артерий при специальном поджатии сосуда, что позволяет в итоге определить патологии регуляторных систем организма и внутренних органов. В последнее время предложена и активно исследуется новая методика диагностики, связанная с анализом спектра пульсовых колебаний произвольной периферической артерии [4-6]. Методика основана на представлении о существовании у отдельных органов резонансных частот, на которых входная проводимость русла Y , определяемая как отношение объемного расхода Q к давлению P во входном сечении основной (питающей) артерии русла $Y = Q/P$, имеет локальные экстремумы. При этом амплитуды резонансных гармоник сильно меняются при любых патологиях органа, и их анализ дает важную диагностическую информацию. Обе методики пульсовой диагностики пока в недостаточной мере изучены методами современной гидромеханики. Наличие резонансных гармоник связано с характером отражения волн в русле соответствующего органа и с особенностями строения русла. Для дихотомически ветвящихся сосудистых систем определение входной проводимости основано на последовательной замене двух конечных проводящих элементов одним, задающим те же условия отражения волны. В итоге можно заменить всю систему одной трубкой, эффективная проводимость которой отражает свойства русла в целом [7]. Однако реальные сосудистые русла имеют соединения между сосудами одного порядка ветвления – анастомозы, что не позволяет применять к ним указанную методику. В данной работе предложен метод определения входной проводимости анастомозирующих русел и проведено исследование проводимости и резонансных свойств на простейшей модели анастомоза в дихотомически ветвящемся русле, содержащем $j = 3$ порядка трубок.

2. Математическая модель

Рассматривается система, состоящая из проводящих элементов, представляющих собой цилиндрические трубки из податливого материала. В системе присутствует один анастомоз (схема I) на уровне третьего порядка ветвления рис.1а. С целью сравнительного анализа рассматривается также дихотомически ветвящаяся система (рис.1б) из тех же проводящих элементов 1–7 без анастомоза (схема II). Обе схемы имеют одинаковую полную проводимость для стационарного течения, что можно достигнуть выбором проводимости Y_t^4 . На входе в систему задано давление $P_1(t,0) = P_1^0 e^{i\omega t}$, а элементы последнего порядка ветвления оканчиваются терминальными элементами с проводимостями $Y_t^{1,2,3}$, величина которых зависит от состояния ни-

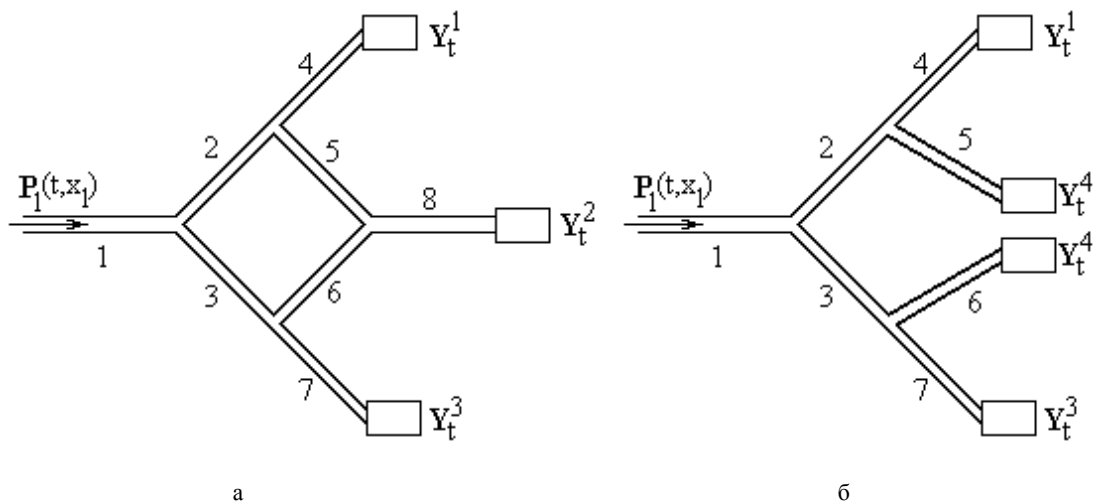


Рис.1. Схема строения сосудистого русла с анастомозом (а) и без анастомоза (б).

железашающего сосудистого русла и определяет амплитуду волны, отраженной в месте соединения соответствующего проводящего и терминального элементов. Для каждой трубки введем продольную координату x_i , так что $x_i = 0$, $j = 1-8$ определяет входные сечения трубок. Будем считать, что в местах ветвления выполняются условия непрерывности давления и расхода. Используя модель волнового течения невязкой несжимаемой жидкости в тонкостенной упругой трубке, для давлений $P_i(t, x_i)$ и расходов $Q_i(t, x_i)$ в трубках с номерами $i = 1-8$ получим решение в виде суперпозиции проходящей и отраженной волн [1]:

$$P_i(t, x_i) = P_i^0 \left[e^{i\omega(t-x_i/c_i)} + \Gamma_i e^{i\omega(t-(x_i-2L_i)/c_i)} \right] \quad (1)$$

$$Q_i(t, x_i) = Y_i^0 P_i^0 \left[e^{i\omega(t-x_i/c_i)} - \Gamma_i e^{i\omega(t-(x_i-2L_i)/c_i)} \right] \quad (2)$$

где $c_i = (E_i h_i)/(2\rho r_i)$ – скорость волны, E_i, h_i – модуль упругости материала и толщина стенки трубки, $r_i, L_i, Y_i^0 = (\pi r_i^2)/(\rho c_i)$ – радиус, длина и характеристическая проводимость трубки, ρ – вязкость жидкости, Γ_i – коэффициент отражения, равный отношению амплитуд отраженной и проходящей волны.

Из (1)–(2) при $i = 1$, $x_i = 0$ получим выражение для входной проводимости системы, представленной на схеме I, в безразмерном виде:

$$Y_I^0 = \frac{Y_1}{Y_1^0} = \frac{1 - \Gamma_1 e^{-2i\omega L_1/c_1}}{1 + \Gamma_1 e^{-2i\omega L_1/c_1}} \quad (3)$$

Для трубок $i = 4, 7, 8$ коэффициенты отражения определяются проводимостями терминальных элементов по формулам [1, 7]:

$$\Gamma_{4,8,7} = \frac{Y_{4,8,7}^0 - Y_t^{1,2,3}}{Y_{4,8,7}^0 + Y_t^{1,2,3}} \quad (4)$$

Значения $\Gamma_{1,2,3,5,6}$ и амплитуды P_{2-8}^0 неизвестны и могут быть найдены из условий непрерывности давлений и расходов в узлах системы:

$$\begin{aligned} P_1(t, L_1) = P_2(t, 0) = P_3(t, 0) & \quad Q_1(t, L_1) = Q_2(t, 0) + Q_3(t, 0) \\ P_2(t, L_2) = P_4(t, 0) = P_5(t, 0) & \quad Q_2(t, L_2) = Q_4(t, 0) + Q_5(t, 0) \\ P_3(t, L_3) = P_6(t, 0) = P_7(t, 0) & \quad Q_3(t, L_3) = Q_6(t, 0) + Q_7(t, 0) \\ P_5(t, L_5) = P_6(t, L_6) = P_8(t, 0) & \quad Q_5(t, L_5) + Q_6(t, L_6) = Q_8(t, 0) \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (1)–(2) в (5) получим нелинейную систему уравнений для определения неизвестных параметров модели:

$$\begin{aligned} P_1^0 (1 + \Gamma_1) e^{-i\omega L_1/c_1} &= P_2^0 (1 + \Gamma_2) e^{-2i\omega L_2/c_2} = P_3^0 (1 + \Gamma_3) e^{-2i\omega L_3/c_3} \\ P_2^0 (1 + \Gamma_2) e^{-i\omega L_2/c_2} &= P_4^0 (1 + \Gamma_4) e^{-2i\omega L_4/c_4} = P_5^0 (1 + \Gamma_5) e^{-2i\omega L_5/c_5} \\ P_3^0 (1 + \Gamma_3) e^{-i\omega L_3/c_3} &= P_6^0 (1 + \Gamma_6) e^{-2i\omega L_6/c_6} = P_7^0 (1 + \Gamma_7) e^{-2i\omega L_7/c_7} \\ P_5^0 (1 + \Gamma_5) e^{-i\omega L_5/c_5} &= P_6^0 (1 + \Gamma_6) e^{-i\omega L_6/c_6} = P_8^0 (1 + \Gamma_8) e^{-2i\omega L_8/c_8} \\ Y_1^0 P_1^0 (1 - \Gamma_1) e^{-i\omega L_1/c_1} &= Y_2^0 P_2^0 (1 - \Gamma_2) e^{-2i\omega L_2/c_2} + Y_3^0 P_3^0 (1 - \Gamma_3) e^{-2i\omega L_3/c_3} \\ Y_2^0 P_2^0 (1 - \Gamma_2) e^{-i\omega L_2/c_2} &= Y_4^0 P_4^0 (1 - \Gamma_4) e^{-2i\omega L_4/c_4} + Y_5^0 P_5^0 (1 - \Gamma_5) e^{-2i\omega L_5/c_5} \end{aligned} \quad (6)$$

$$Y_3^0 P_3^0 (1 - \Gamma_3) e^{-i\omega L_3/c_3} = Y_6^0 P_6^0 (1 - \Gamma_6) e^{-2i\omega L_6/c_6} + Y_7^0 P_7^0 (1 - \Gamma_7) e^{-2i\omega L_7/c_7}$$

$$Y_5^0 P_5^0 (1 - \Gamma_5) e^{-i\omega L_5/c_5} + Y_6^0 P_6^0 (1 - \Gamma_6) e^{-i\omega L_6/c_6} = Y_8^0 P_8^0 (1 - \Gamma_8) e^{-2i\omega L_8/c_8}$$

3. Анализ симметричной системы из одинаковых трубок.

В общем случае система (6) может быть решена с использованием численных методов. В явном виде можно исследовать решение для простейшего случая симметричной системы, элементы которой идентичны по механическим и геометрическим свойствам ($r_{1-8} = r$, $L_{1-8} = L$, $E_{1-8} = E$, $h_{1-8} = h$, $Y_t^1 = Y_t^3$). При этом $\Gamma_2 = \Gamma_3$, $\Gamma_5 = \Gamma_6$, $P_2^0 = P_3^0$, $P_5^0 = P_6^0$, $P_4^0 = P_7^0$, а из (4)

следует $\Gamma_4 = \Gamma_7$. Тогда необходимые для вычисления величины Y_1 параметры определяются из (6) в виде:

$$\Gamma_1 = \frac{(\alpha + 1 - \beta(\alpha - 1))Y_1^0 / Y_3^0 + 2(\alpha - 1 - \beta(\alpha + 1))}{(\alpha + 1 - \beta(\alpha - 1))Y_1^0 / Y_3^0 - 2(\alpha - 1 - \beta(\alpha + 1))}$$

$$\beta = \frac{Y_4^0 / (1 - \alpha\Gamma_4) + Y_5^0 / (1 - \alpha\Gamma_5)}{Y_3^0 / (1 + \alpha\Gamma_4) + Y_3^0 / (1 + \alpha\Gamma_5)}$$

$$\Gamma_5 = \frac{2(1 + \alpha\Gamma_8)Y_5^0 / Y_8^0 - (1 - \Gamma_8)\alpha}{2(1 + \alpha\Gamma_8)Y_5^0 / Y_8^0 + (1 - \Gamma_8)\alpha}$$

где $\alpha = e^{-2i\omega L/c}$.

Подставляя (4),(7) в (3), получим выражение для входной проводимости в виде $Y_I^o = Y_I e^{i\Psi_I}$, которое в конечном виде здесь не приводится по причине громоздкости. Зависимости $Y_I(\omega)$ и $\Psi_I(\omega)$ определяют резонансные свойства системы, а их изменение при вариациях геометрических и механических параметров русла, а также условий отражения волн на терминальных элементах Y_t^{1-3} содержит важную диагностическую информацию [4-5].

Для сравнительного исследования двух схем вычислим проводимость Y_{II}^o схемы II, используя итеративную методику [6]. В результате несложных выкладок получим:

$$Y_I^o = \frac{1 - \alpha\Gamma_1'}{1 + \alpha\Gamma_1'} \quad (8)$$

$$\text{где } \Gamma_1' = \frac{Y_1^0 - 2Y_2'}{Y_1^0 + 2Y_2'}, \quad Y_2' = Y_2^0 \frac{1 - \alpha\Gamma_2'}{1 + \alpha\Gamma_2'}, \quad \Gamma_2' = \frac{Y_2^0 - Y_4' - Y_5'}{Y_2^0 + Y_4' + Y_5'}, \quad Y_{4,5}' = Y_{4,5}^0 \frac{1 - \alpha\Gamma_{4,5}'}{1 + \alpha\Gamma_{4,5}'}, \quad \Gamma_{4,5}' = \frac{Y_{4,5}^0 - Y_t^{1,4}}{Y_{4,5}^0 + Y_t^{1,4}}.$$

Сопротивления $Z_{I,II} = 1/Y_{I,II}$ симметричных схем I и II для стационарного потока ($\omega = 0$) составляют

$$Z_I = Z \left(\frac{3}{2} + \frac{(Z + Z_t^1)(3Z + 2Z_t^2)}{2Z(4Z + Z_t^1 + 2Z_t^2)} \right) \quad Z_{II} = Z \left(\frac{3}{2} + \frac{(Z + Z_t^1)(Z + Z_t^4)}{2Z(2Z + Z_t^1 + Z_t^4)} \right) \quad (9)$$

где $Z, Z_t^{1,2,4}$ – пуазейлевские сопротивления проводящих и терминальных элементов соответственно. Полагая, что обе схемы эквивалентны по отношению к стационарному течению и $Z_I = Z_{II}$, получим, что $Y_t^4 = (Y_t^2) / (2(Y + Y_t^2))$.

В реальных артериальных руслах диаметры и длины сосудов уменьшаются с увеличени-

ем номера порядка ветвления, поэтому было также проведено решение системы (6) методом Ньютона для случая несимметричной схемы I при условии $d_{2,3} = \lambda d_1$, $d_{4-7} = \lambda^2 d_1$, $L_{2,3} = \lambda L_1$, $L_{4-7} = \lambda^2 L_1$, что согласуется с данным измерений, причем для оптимальных русел $\lambda = 2^{-1/3}$ [2]. Выбранные соотношения между длинами элементов отвечают условию самоподобия русла. Принималось $E=2 \cdot 10^6$ Па (для сосудов мышечного типа) и $h_i = 0.1 d_i$, что согласуется с условием применимости для сосуда приближения тонкостенной трубки [1].

4. Результаты и обсуждение.

Результаты расчетов Y_I° по формулам (8) и Y_{II}° по (3),(4),(7) приведены на рис. 2-4. Зависимости $Y_{I,II}(i)$, где i – номер гармоники, имеют сходный вид, характерный для артериальных русел с разной геометрией [1,2]. На кривых выделяется набор локальных максимумов и минимумов, причем амплитуды ряда гармоник существенно (> 30%) меняются при изменении условий отражения волны на терминальных элементах. Для схемы без анастомозов при $L = 0.1$ см изменение резистивной и емкостной составляющих $Y_t^{1,4}$ проявляется в значительных вариациях амплитуды первой гармоники при незначительных изменениях остальных амплитуд (рис.2а,б). При этом гармоника $j=1$ является резонансной по [4,5]. Набор резонансных гармоник зависит лишь от соотношения между длиной волны соответствующей гармоники и длиной трубки L (для симметричной модели). В случае $L = 0.04$ см резонансными являются гармоники $j = 3,6,8$ (рис.3). Амплитуды $j = 3,8$ значительно варьируют при изменении условий отражения (рис.3а). Для $j = 6$ система имеет минимальную проводимость, а сдвиг фаз между потоком и давлением достигает экстремума (рис.3б). В этом случае соответствующая гармоника практически полностью отражается, накладывается на проходящую волну и может быть зарегистрирована в спектре пульса произвольной периферической артерии вне сосудистого русла рассматриваемого органа [5-6].

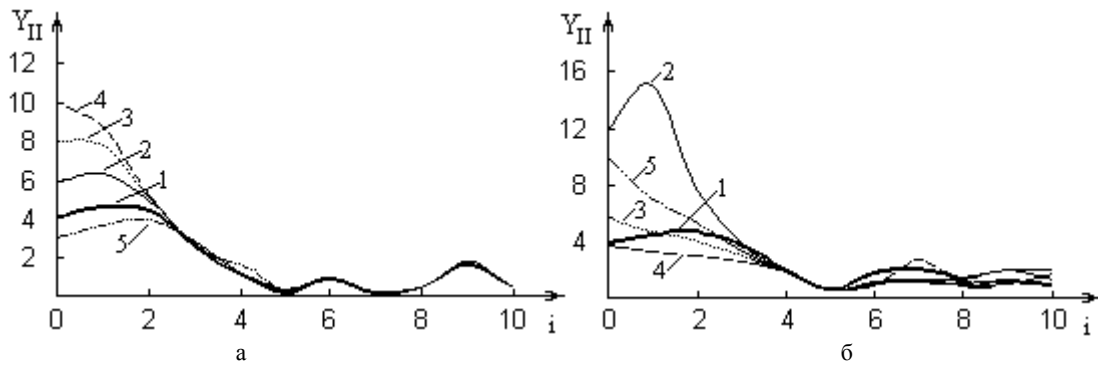


Рис.2. Зависимости Y_{II} от номера гармоники i при $L = 0.1$ м, $r = 2.5$ мм, $a - c = 10$ м/с, $\text{Im}(Y_t^{1,4}) = 0$, кривые 1-5 соответствуют значениям $\{\text{Re}(Y_t^1)/Y, \text{Re}(Y_t^4)/Y\} = \{1,1\}; \{2,1\}; \{3,1\}; \{4,1\}; \{1,0.5\}$. б - $c = 15$ м/с, $\text{Re}(Y_t^{1,4}) = Y$, кривые 1-5 соответствуют значениям $\{\text{Im}(Y_t^1)/Y, \text{Im}(Y_t^4)/Y\} = \{0,0\}; \{1,0\}; \{1,1\}; \{2,1\}; \{0.5,1\}$

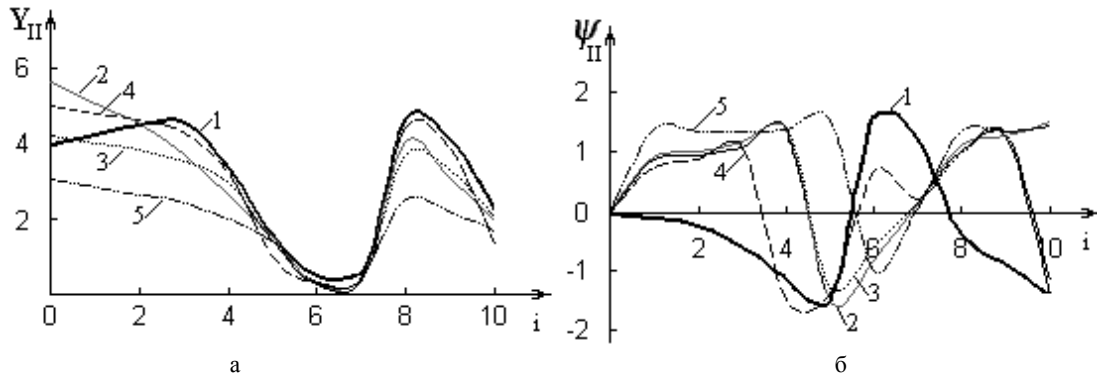


Рис.3. Зависимости амплитуды (а) и фазы (б) проводимости от номера гармоники при $L = 0.04$ м, $r = 2.5$ мм, $c = 10$ м/с, кривые 1–5 соответствуют значениям $\{\text{Re}(Y_t^1)/Y, \text{Re}(Y_t^4)/Y, \text{Im}(Y_t^1)/Y, \text{Im}(Y_t^4)/Y\} = \{1,1,0,0\}; \{1,1,1,1\}; \{2,1,2,1\}; \{3,1,1,2\}; \{0.5,0.1,1,2\}$.

Существенное отличие свойств системы с анастомозом состоит в расширении набора резонансных частот ($j = 4, 6-9$ на рис.4 а,б), увеличении вариации амплитуды при изменении условий отражения, регулярных изменениях фазового спектра с четко выраженными экстремумами. Представленные зависимости $\tilde{Y}_I = Y_I(i)/Y_I(0)$ и $\Psi_I(i)$ более удобны для диагностической интерпретации, а их характер соответствует результатам клинических исследований [6]. Поскольку отражение волн на концах терминальных элементов в модели не учитывается, то Y_t^{1-4} соответствуют микроциркуляторному руслу органа. При этом вариации $\text{Re}(Y_t^k)$ и $\text{Im}(Y_t^k)$ отражают функциональные или патологические изменения просвета артериол, кровенаполнения органа, сосудистого тонуса, включая нарушения регуляции указанных параметров.

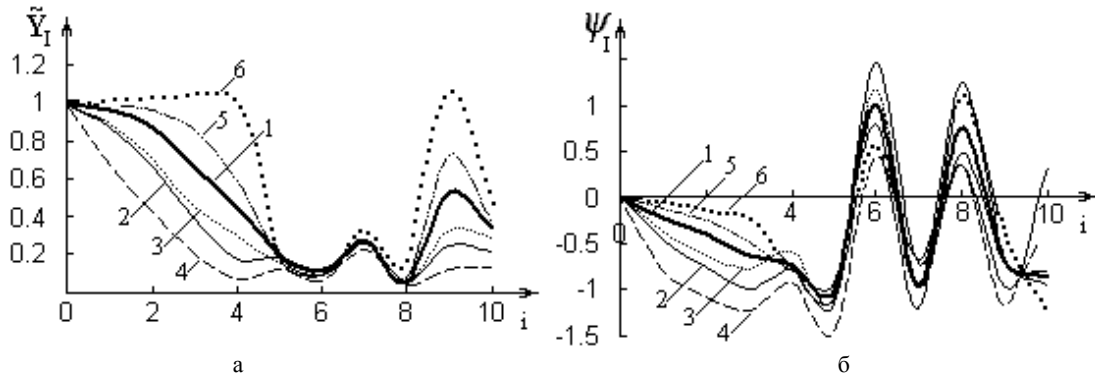


Рис.4. Зависимости $\tilde{Y}_I(i)$ (а) и $\Psi_I(i)$ (б) при $L = 0.1$ м, $r = 2.5$ мм, кривые 1–6 соответствуют значениям $\{\text{Re}(Y_t^1)/Y, \text{Re}(Y_t^4)/Y\} = \{1,1\}; \{2,1\}; \{1,2\}; \{4,1\}; \{1,0.5\}; \{0.5,1\}$.

Численное исследование решения системы (6) в широком диапазоне вариаций параметров $\{L_j, d_j, h_j, E_j\}_{j=1}^8$ показало, что отмеченные особенности $Y_{I,II}(i)$ и $\Psi_{I,II}(i)$ сохраняются и для несимметричных систем с анастомозом. При этом первая резонансная гармоника для самоподобных русел всегда определяется длиной L_1 трубки первого порядка (питающей артерии). Наличие анастомоза приводит к расширению набора резонансных гармоник и увеличению выраженности изменений амплитуд $Y_I(i)$ при изменениях Y_t^k по сравнению с $Y_{II}(i)$.

Артериальные русла ряда органов могут рассматриваться как системы без анастомозов (легкие, почки), в то время как в других органах анастомозы присутствуют уже на уровне сосудов $J = 2-3$ порядков ветвления (кишечник, желудок). Используемый в работе подход допускает обобщение на случай многократных анастомозов и позволяет исследовать отличие свойств русел с анастомозами между проводящими элементами разных порядков ветвления с учетом детальных морфометрических данных для сосудистых систем различных внутренних органов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Milnor W.R.* Hemodynamics. – Baltimore:Williams &Wilkins, 1989, 419p.
2. *Розен Р.* Принцип оптимальности в биологии. – Мир:Москва, 1969, 215с.
3. *Zamir M.* Mechanics of blood supply to the heart: wave refrection effects in a right coronary artery // Proc.R.Soc.Lond., Ser.B. 1998, v.265, p.439-444.
4. *Wang Y.Y., Chang S.L., Wu Y.E., Hsu T.L., Wang W.K.* Resonance. The missing phenomenon in hemodynamics. //Circ. Res. 1991, v.69, p.246-249.
5. *Wang Y.Y., Lia W.C., Hsiu H., Jan M.Y., Wang W.K.* Effect of length on the fundamental resonance frequency of arterial models having radial dilatation. //IEEE Trans. Biomed. Eng. 2000, v.47, p.313-318.
6. *Yu G.L., Wang Y.L., Wang W.K.* Resonance in the kidney system of rats //Am. J. Physiol. 1994, v.267, №4 pt 2, p.H1544–1548.
7. *Taylor M.G.* The input impedance of an assembly of randomly branching elastic tubes. //Biophys.J. 1966, v.6, p.29-51.