

К 100-летию академика Л.Д. Ландау

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
И НАУКИ УКРАИНЫ**

**ХАРЬКОВСКИЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени В.Н. Каразина**

**А.М. ЕРМОЛАЕВ, Г.И. РАШБА**

**Л Е К Ц И И  
ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ  
И КИНЕТИКЕ**

**3. Когерентные состояния бозонов и  
фермионов**

**Учебно-методическое пособие**

**Харьков 2008**

УДК 530.145, 530.1 (075.8)  
ББК 22.317я73  
Е74

*Рекомендовано кафедрой теоретической физики  
имени академика И.М. Лифшица (протокол № 5 от 29 марта 2007 г.)*

*Утверждено Ученым советом физического факультета  
Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина  
(протокол № 5 от 18 мая 2007 г.)*

**Рецензенты:**

А.С. Ковалев, доктор физ.-мат. наук, вед. научн. сотр. ФТИНТ НАН  
Украины, профессор;  
В.В. Ульянов, доктор физ.-мат. наук, профессор (ХНУ).

**Ермолаев А.М., Рашба Г.И.**

Лекции по квантовой статистике и кинетике.

3. Когерентные состояния бозонов и фермионов:

Учебно-методическое пособие для студентов физических специальностей  
университетов. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2008. – 57 с.

В учебно-методическом пособии изложен формализм современной квантовой статистики и кинетики, основанный на методах квантовой теории поля. Основное внимание уделено применению метода квантовых функций Грина и функциональных методов в теории конденсированного состояния вещества.

В третьей главе рассмотрены когерентные состояния одномерного гармонического осциллятора, а также системы бозонов. Приведены сведения из алгебры Грассмана, необходимые для построения когерентных состояний фермионов. Вычислены гауссовы интегралы по комплексным и грассмановым переменным. Амплитуда перехода системы между когерентными состояниями и ее статистическая сумма представлены в виде континуальных интегралов.

УДК 530.145, 530.1 (075.8)  
ББК 22.317я73

- © ХНУ имени В.Н. Каразина, 2008
- © А.М. Ермолаев, Г.И. Рашба, 2008
- © И.Н. Дончик, макет обложки, 2008

## Содержание

3. Когерентные состояния бозонов и фермионов.....	4
3.1. Когерентные состояния осциллятора.....	4
3.2. Функция Грина осциллятора.....	13
3.3. Когерентные состояния бозонов.....	18
3.4. Гауссовы интегралы.....	25
3.5. Алгебра Грассмана.....	31
3.6. Когерентные состояния фермионов .....	42
3.7. Когерентные состояния и континуальные интегралы....	48
Задачи.....	55

### 3. Когерентные состояния бозонов и фермионов

#### 3.1. Когерентные состояния осциллятора

Рассмотренные в предыдущих главах базисные наборы векторов в пространстве состояний системы не исчерпывают все возможности выбора базиса. Существует еще одна возможность выбрать базис в пространстве состояний. Соответствующие этому базису состояния называются когерентными состояниями. Рассмотрим сначала когерентные состояния одномерного гармонического осциллятора (см. А.В. Свідзинський, Математичні методи теоретичної фізики, 2001; И.А. Малкин, В.И. Манько, Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем, 1979; А.М. Переломов, Обобщенные когерентные состояния и их применения, 1987; J.W. Negele and H. Orland, Quantum Many-Particle Systems, 1988; Ж-П. Блейзо, Ж. Рипка, Квантовая теория конечных систем, 1998).

Гамильтониан осциллятора с массой  $m$  и частотой  $\omega$  в координатном представлении равен

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (3.1)$$

Собственные функции и собственные числа этого гамильтониана известны (см. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Квантовая механика, 1989):

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right), \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (3.3)$$

где  $n = 0, 1, \dots$  – осцилляторное квантовое число,  $H_n$  – полином Эрмита. Линейным преобразованием

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^+), \quad -i\hbar \frac{d}{dx} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a - a^+), \quad (3.4)$$

где  $[a, a^+] = 1$ , гамильтониан (3.1) приводится к виду

$$H = \hbar\omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right). \quad (3.5)$$

Операторы  $a$  и  $a^+$  понижают и повышают номер  $n$  стационарного состояния осциллятора на единицу.

В квантовой механике когерентные состояния одномерного гармонического осциллятора определяются как состояния, минимизирующие соотношение неопределенностей (Э. Шредингер, 1926)

$$\delta x \delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Здесь

$$\delta x = \left[ \overline{(x - \bar{x})^2} \right]^{1/2}, \quad \delta p_x = \left[ \overline{(p_x - \bar{p}_x)^2} \right]^{1/2}$$

– неопределенности координаты  $x$  и компоненты импульса  $p_x$  осциллятора, чертой отмечено квантовомеханическое среднее. В когерентном состоянии

$$\delta x \delta p_x = \frac{\hbar}{2}.$$

Существует и другое определение когерентных состояний. Они являются собственными состояниями оператора уничтожения  $a$ , который естественно возникает в теории осциллятора:

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad (3.6)$$

где  $|z\rangle$  – кет-вектор когерентного состояния, соответствующий собственному значению  $z$  оператора  $a$ . Величина  $z$  представляет собой произвольное комплексное число  $z = x + iy$ . Соотношение, сопряженное (3.6), имеет вид

$$\langle z|a^+ = \langle z|z^* . \quad (3.7)$$

Напомним, что оператор  $a$  не является эрмитовым, поэтому его собственные числа не обязаны быть вещественными. Отметим также, что проблема (3.6) собственных чисел и векторов оператора  $a$  не связана с решениями уравнения

$$a^+|u\rangle = u|u\rangle .$$

Поэтому тот факт, что оператор рождения  $a^+$  не имеет собственных векторов, не противоречит переполненности базиса  $\{|z\rangle\}$  когерентных состояний. Не останавливаясь на доказательстве эквивалентности этих определений, рассмотрим некоторые свойства когерентных состояний осциллятора.

Получим амплитуду вероятности  $\langle n|z\rangle$  обнаружить стационарное состояние  $|n\rangle$  осциллятора в когерентном состоянии  $|z\rangle$ . Для этого умножим уравнение (3.6) на бра-вектор  $\langle n|$ :

$$\langle n|a|z\rangle = z\langle n|z\rangle . \quad (3.8)$$

Учтем правило (2.18) действия оператора  $a^+$  на стационарное состояние осциллятора:

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle ,$$

где  $n = 0, 1, \dots$ . Сопряженное соотношение имеет вид

$$\langle n|a = \sqrt{n+1}\langle n+1| .$$

Подставляя  $\langle n|a$  в уравнение (3.8), получаем рекуррентные соотношения для амплитуд  $\langle n|z\rangle$ :

$$\sqrt{n+1}\langle n+1|z\rangle = z\langle n|z\rangle , \quad n = 0, 1, \dots$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\langle n|z\rangle = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|z\rangle . \quad (3.9)$$

Система стационарных состояний осциллятора является полной, т.е.

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1. \quad (3.10)$$

Это условие позволяет разложить когерентное состояние по стационарным состояниям. Умножая выражение (3.9) слева на  $|n\rangle$  и выполняя суммирование по  $n$ , получаем искомое разложение:

$$|z\rangle = \langle 0|z\rangle \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.11)$$

Соответствующий бра-вектор равен

$$\langle z| = \langle 0|z\rangle^* \sum_n \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n|. \quad (3.12)$$

Разложения (3.11) и (3.12) позволяют получить норму когерентного состояния:

$$\langle z|z\rangle = |\langle 0|z\rangle|^2 \sum_n \frac{|z|^{2n}}{n!} = |\langle 0|z\rangle|^2 \exp(|z|^2).$$

Здесь учтено условие ортонормировки стационарных состояний осциллятора:

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}. \quad (3.13)$$

Требую  $\langle z|z\rangle = 1$ , находим

$$\langle 0|z\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right).$$

В результате разложения (3.11) и (3.12) принимают вид

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \\ \langle z| &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \langle n| \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Если учесть известное из квантовой теории осциллятора соотношение (2.24)

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle,$$

где  $|0\rangle$  – его вакуумное состояние ( $a|0\rangle = 0$ ), то разложения (3.14) можно записать так

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 + za^+\right) |0\rangle, \\ \langle z| &= \langle 0| \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 + z^*a\right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отсюда видно, что основное состояние осциллятора является когерентным состоянием с собственным значением  $z = 0$ :  $|n = 0\rangle = |z = 0\rangle$ .

Амплитуда вероятности (3.9) дается формулой

$$\langle n|z\rangle = \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right). \quad (3.16)$$

Следовательно, вероятность обнаружить стационарное состояние  $|n\rangle$  в когерентном состоянии  $|z\rangle$  равна квадрату модуля амплитуды (3.16):

$$|\langle n|z\rangle|^2 = \frac{|z|^{2n}}{n!} \exp(-|z|^2). \quad (3.17)$$

Выражение (3.17) позволяет получить среднее значение  $\bar{n}$  в когерентном состоянии. Оно равно

$$\bar{n} = \langle z|a^+a|z\rangle = |z|^2. \quad (3.18)$$

Средняя энергия осциллятора в этом состоянии равна  $\hbar\omega\left(|z|^2 + \frac{1}{2}\right)$ .

Здесь мы воспользовались уравнениями (3.6) и (3.7). Учитывая (3.18), перепишем вероятность (3.17) в виде



$$|\langle n|z\rangle|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}.$$

Мы получили известное распределение Пуассона.

Используя разложения (3.14), легко показать, что перекрытие когерентных состояний равно

$$\begin{aligned} \langle z'|z\rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|z'|^2 + z'^*z\right] = \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}|z-z'|^2 + i\operatorname{Im}(zz'^*)\right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Таким образом, когерентные состояния не ортогональны. Если когерентное состояние  $|z\rangle$  нормировано условием

$$\langle n=0|z\rangle = 1, \quad (3.20)$$

то это выражение принимает более простой вид

$$\langle z'|z\rangle = e^{z'^*z}. \quad (3.21)$$

Оно означает, что когерентные состояния не ортогональны. При таком способе нормировки

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \exp(za^+) |0\rangle, \\ \langle z| &= \langle 0| \exp(z^*a). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Когерентные состояния, определенные этими формулами, называются обыкновенными когерентными состояниями.

Для разложения произвольного состояния осциллятора по когерентным состояниям необходимо знать значение интеграла

$$\int d^2z |z\rangle \langle z|,$$

где  $d^2z = dx dy$ . В полярных координатах  $(\rho, \varphi)$  на плоскости  $(x, y)$  имеем  $d^2z = \rho d\rho d\varphi$ . Используя значение интеграла

$$\int_0^\infty d\rho \exp(-\rho^2) \rho^{2n+1} = \frac{n!}{2},$$

легко показать, что

$$\int d^2 z |z\rangle\langle z| = \pi. \quad (3.23)$$

Отличие правой части этого выражения от единицы свидетельствует о переполненности системы когерентных состояний осциллятора.

Соотношение (3.23) обычно записывают в виде

$$\int d\mu(z) |z\rangle\langle z| = 1, \quad (3.24)$$

где  $d\mu(z)$  – мера интегрирования. Она равна

$$d\mu(z) = \frac{dx dy}{\pi} \exp(-z^* z) = \frac{dz^* dz}{2\pi i} \exp(-z^* z). \quad (3.25)$$

Здесь учтено значение якобиана перехода от переменных  $(x, y)$  к переменным  $(z^*, z)$ :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(z^*, z)} = -\frac{i}{2}.$$

Интегрирование в (3.24) выполняется по всей плоскости  $\mathcal{Z}$ . Когерентные состояния нормированы условием (3.20).

Любой кет-вектор  $|\psi\rangle$  в пространстве Фока может быть представлен волновой функцией

$$\psi(z^*) = \langle z|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\psi\rangle \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}},$$

которая является непрерывной функцией  $z^*$ . Аналогично любой бра-вектор  $\langle\varphi|$  в пространстве Фока может быть представлен волновой функцией

$$\varphi(z) = \langle\varphi|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\varphi|n\rangle \frac{z^n}{\sqrt{n!}}.$$

Скалярное произведение этих векторов равно

$$\begin{aligned}\langle \varphi | \psi \rangle &= \int d\mu(z) \langle \varphi | z \rangle \langle z | \psi \rangle = \\ &= \int d\mu(z) \varphi(z) \psi(z^*).\end{aligned}$$

Входящие в формулы (3.11) и (3.12) функции преобразования от одного базиса к другому с учетом нормировки (3.20) равны

$$\langle z | n \rangle = \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}}, \quad \langle n | z \rangle = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}.$$

Они образуют ортонормированный базис, поскольку

$$\int d\mu(z) \frac{z^{*n} z^{n'}}{\sqrt{n!n'}} = \delta_{nn'}.$$

Из формул (3.6), (3.7) и (3.22) видно, что операторы уничтожения и рождения действуют на когерентные состояния по правилам:

$$\begin{aligned}a|z\rangle &= z|z\rangle, & a^+|z\rangle &= \frac{\partial}{\partial z}|z\rangle, \\ \langle z|a^+ &= \langle z|z^*, & \langle z|a &= \frac{\partial}{\partial z^*}\langle z|.\end{aligned}$$

Следовательно, матричные элементы этих операторов на когерентных состояниях равны

$$\begin{aligned}\langle z|a|z'\rangle &= \frac{\partial}{\partial z^*}\langle z|z'\rangle = z'\langle z|z'\rangle, \\ \langle z|a^+|z'\rangle &= \frac{\partial}{\partial z'}\langle z|z'\rangle = z^*\langle z|z'\rangle.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $a$  и  $a^+$  можно представить при помощи операторов  $\frac{\partial}{\partial z^*}$  и  $z^*$ :

$$\langle z|a|\psi\rangle = \frac{\partial}{\partial z^*}\psi(z^*), \quad \langle z|a^+|\psi\rangle = z^*\psi(z^*).$$

Это означает, что любой оператор  $F$ , являющийся в пространстве Фока функцией  $F(a^+, a)$  операторов рождения и уничтожения, может быть представлен оператором  $F\left(z^*, \frac{\partial}{\partial z^*}\right)$ :

$$\langle z | F(a^+, a) | z' \rangle = A\left(z^*, \frac{\partial}{\partial z^*}\right) \langle z | z' \rangle,$$

$$\langle z | F(a^+, a) | \psi \rangle = A\left(z^*, \frac{\partial}{\partial z^*}\right) \psi(z^*).$$

Покажем, как в базисе когерентных состояний вычисляется след некоторого оператора  $F(a^+, a)$ . С учетом (3.24) находим

$$F(a^+, a) = \int d\mu(z) F(a^+, a) |z\rangle \langle z|.$$

Следовательно, используя (1.36), получаем

$$\text{Sp}F = \int d\mu(z) \langle z | F(a^+, a) | z \rangle. \quad (3.26)$$

Входящее сюда среднее  $\langle z | F | z \rangle$  вычисляется легко, если оператор  $F$  записан в нормальной форме. Нормальным произведением операторов  $a, a^+$ , входящих в  $F$ , называется такое произведение, в котором все операторы рождения стоят левее операторов уничтожения. (Это произведение будет более подробно рассмотрено в гл. 5.) Если операторы  $a$  и  $a^+$  в  $F$  стоят в нормальном порядке, то согласно правилам (3.6) и (3.7) имеем

$$\langle z | : F(a^+, a) : | z \rangle = F(z^*, z) \langle z | z \rangle, \quad (3.27)$$

где  $: F :$  – нормальная форма оператора  $F$ . Тогда

$$\text{Sp}F = \int d\mu(z) F(z^*, z) \langle z | z \rangle. \quad (3.28)$$

Справедлива и формула для матричного элемента

$$\langle z | : F(a^+, a) : | u \rangle = F(z^*, u) \langle z | u \rangle, \quad (3.29)$$

где  $|z\rangle$  и  $|u\rangle$  – когерентные состояния.

Соотношения, полученные в этом разделе, применимы к любой бозонной системе с одной степенью свободы, поскольку ее пространство состояний изоморфно пространству состояний одномерного осциллятора. Ниже мы увидим, что при переходе к системе со многими степенями свободы операторы уничтожения и рождения приобретают индекс одночастичного состояния  $k$ ,  $z'^* z$  в (3.21) заменяется суммой

$$z'^* z = \sum_k z'_k{}^* z_k,$$

а мера интегрирования (3.25) содержит произведение по  $k$ :

$$\prod_k \left( \frac{dz_k{}^* dz_k}{2\pi i} \right).$$

### 3.2. Функция Грина осциллятора

Метод квантовых функций Грина в статистике и кинетике будет изложен в главах 5-7. Но уже сейчас полезно показать, как используются когерентные состояния, на примере функции Грина осциллятора.

Формализм когерентных состояний, изложенный в предыдущем разделе, позволяет легко получить запаздывающую функцию Грина осциллятора в вакууме. Она определяется соотношением

$$G(z', t; z, 0) = -\frac{i}{\hbar} \Theta(t) \langle z' | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht\right) | z \rangle, \quad (3.30)$$

где

$$H = \hbar\omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right)$$

– гамильтониан осциллятора с частотой  $\omega$ ,  $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)$  – оператор эволюции,  $\Theta$  – функция Хевисайда (1.200). Квадрат модуля функции Грина (3.30) дает вероятность перехода осциллятора из состояния  $|z\rangle$ , в котором он находился в начальный момент времени, в состояние  $|z'\rangle$  в момент  $t$ . Используя условия (3.10) и (3.13), а также уравнение

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)|n\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_n t\right)|n\rangle,$$

где  $\varepsilon_n$  – энергия осциллятора (3.3), перепишем функцию (3.30) в виде

$$G(z', t; z, 0) = -\frac{i}{\hbar}\Theta(t) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_n t\right) \langle z'|n\rangle \langle n|z\rangle.$$

Подставляя сюда амплитуду вероятности (3.16), находим

$$G(z', t; z, 0) = -\frac{i}{\hbar}\Theta(t) \exp\left[-i\frac{\omega}{2}t - \frac{1}{2}\left(|z|^2 + |z'|^2\right) + zz'^* e^{-i\omega t}\right]. \quad (3.31)$$

В пределе  $\omega = 0$  отсюда следует выражение для функции Грина свободной частицы в представлении когерентных состояний:

$$G_0(z', t; z, 0) = -\frac{i}{\hbar}\Theta(t) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|z|^2 + |z'|^2\right) + zz'^*\right]. \quad (3.32)$$

Временная компонента Фурье функции (3.31) равна

$$G(z', z; \varepsilon) = \int_0^{\infty} dt \exp\left(\frac{i}{\hbar}\varepsilon t\right) G(z', t; z, 0), \quad (3.33)$$

где  $\varepsilon$  – комплексная энергия. Эта функция регулярна в верхней полуплоскости  $\varepsilon$ . Она может быть получена аналитическим продолжением температурной функции Грина  $G(z', z; \varepsilon_s)$  (см. гл. 5) с дискретных мацубаровских частот  $\varepsilon_s$

на верхнюю полуплоскость с последующим переходом на вещественную ось. Поэтому  $\varepsilon$  в (3.33) следует заменить на  $\varepsilon + i0$ .

Подставим в интеграл (3.33) функцию (3.31) и перейдем к новой переменной интегрирования  $u = \exp(-i\omega t)$ . Тогда, используя интегральное представление вырожденной гипергеометрической функции (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т.1, 1973).

$$F(\nu, 1 + \nu, x) = \nu \int_0^1 du u^{\nu-1} e^{xu}, \quad (3.34)$$

получим

$$G(z', z; \varepsilon) = \left( \varepsilon - \frac{\hbar\omega}{2} \right)^{-1} \exp \left[ -\frac{1}{2} (|z|^2 + |z'|^2) \right] \times \times F \left( \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\hbar\omega}, \frac{3}{2} - \frac{\varepsilon}{\hbar\omega}, zz'^* \right). \quad (3.35)$$

Для перехода к пределу  $\omega = 0$  необходимо воспользоваться асимптотикой вырожденной гипергеометрической функции (3.34) при  $\nu \rightarrow \infty$  и конечном  $x$ :

$$F(\nu, 1 + \nu, x) = e^x \left[ 1 + O(|\nu|^{-1}) \right].$$

Тогда фурье-компонента функции Грина свободной частицы будет равна

$$G_0(z', z; \varepsilon + i0) = (\varepsilon + i0)^{-1} \exp \left[ -\frac{1}{2} (|z|^2 + |z'|^2) + zz'^* \right].$$

Функцию (3.35) можно получить иначе. Она равна матричному элементу оператора резольвенты  $(\varepsilon - H)^{-1}$  осциллятора в представлении когерентных состояний:

$$G(z', z; \varepsilon) = \langle z' | (\varepsilon - H)^{-1} | z \rangle. \quad (3.36)$$

Используя снова условия полноты (3.10) и ортогональности (3.13) стационарных состояний осциллятора, представим функцию (3.36) в виде

$$G(z', z; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle z'|n\rangle \langle n|z\rangle}{\varepsilon - \varepsilon_n}. \quad (3.37)$$

Видно, что эта функция имеет простые полюсы в точках  $\varepsilon = \varepsilon_n$ , совпадающих с уровнями энергии осциллятора. После подстановки (3.16) в (3.37) приходим к известному ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+\nu)} = \nu^{-1} F(\nu, 1+\nu, x).$$

В результате снова получаем выражение (3.35).

Чтобы вычислить запаздывающую функцию Грина осциллятора в координатном представлении  $G(x', t; x, 0)$ , необходимо воспользоваться условием (3.23). Тогда

$$\begin{aligned} G(x', t; x, 0) &= -\frac{i}{\hbar} \Theta(t) \langle x' | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht\right) | x \rangle = \\ &= -\frac{i}{\pi^2 \hbar} \Theta(t) \int d^2 z \int d^2 z' \langle x' | z' \rangle \langle z' | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht\right) | z \rangle \langle z | x \rangle \end{aligned} \quad (3.38)$$

Входящая сюда функция Грина осциллятора в представлении когерентных состояний равна (3.31), а функция преобразования, связывающая когерентное состояние с координатным, имеет вид

$$\langle x | z \rangle = \sum_n \langle x | n \rangle \langle n | z \rangle.$$

Здесь  $\langle x | n \rangle$  – волновая функция (3.2) стационарного состояния осциллятора в координатном представлении. Мы предоставляем читателю возможность самостоятельно убедиться в том, что функция Грина (3.38) равна

$$\begin{aligned} G(x', t; x, 0) &= -\frac{i}{\hbar} \Theta(t) \left[ \frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega t} \right]^{1/2} \times \\ &\times \exp\left\{ \frac{i m \omega}{2 \hbar \sin \omega t} \left[ (x^2 + x'^2) \cos \omega t - 2 x x' \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.39)$$



где  $m$  – масса осциллятора. При  $\omega = 0$  получаем отсюда запаздывающую функцию Грина свободной частицы:

$$G_0(x', t; x, 0) = -\frac{i}{\hbar} \Theta(t) \left( \frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar t} (x - x')^2 \right]. \quad (3.40)$$

Функции (3.39) и (3.40) лишь множителями отличаются от амплитуд перехода (1.142) и (1.105). Они используются в квантовой теории рассеяния. Квадраты модулей функций (3.39) и (3.40) дают вероятности переходов частиц из состояния  $|x, 0\rangle$  в состояние  $|x', t\rangle$ .

Из запаздывающей функции Грина (3.31) путем замены  $it/\hbar \rightarrow \tau$  можно получить температурную функцию Грина осциллятора в представлении когерентных состояний:

$$\langle z' | \exp(-\tau H) | z \rangle = \exp \left[ -\frac{\hbar\omega}{2} \tau - \frac{1}{2} (|z|^2 + |z'|^2) + z z'^* e^{-\hbar\omega\tau} \right].$$

При  $\tau = \beta = 1/kT$  ( $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура среды, в которой находится осциллятор) и  $z' = z$  отсюда следует выражение для гиббсовской статистической суммы осциллятора в термостате:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Sp} \exp(-\beta H) = \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle z | e^{-\beta H} | z \rangle = \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp \left[ -\beta \frac{\hbar\omega}{2} - |z|^2 (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \right]. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование в полярных координатах, находим

$$Z = \frac{1}{2 \text{sh} \frac{\beta\hbar\omega}{2}}. \quad (3.41)$$

Это известное выражение для статсуммы осциллятора.

### 3.3. Когерентные состояния бозонов

Выше отмечалось, что формулы, приведенные в р. 3.1, описывают не только осциллятор, но и бозе-систему с одной степенью свободы. В этой системе индекс состояния  $k$  принимает лишь одно значение, поэтому он опущен у операторов вторичного квантования. Это означает, что рассмотрение системы бозонов в представлении когерентных состояний сводится к тривиальному обобщению соотношений р. 3.1 на случай многих степеней свободы.

Когерентное состояние системы бозонов по-прежнему обозначим символом  $|z\rangle$ . Оно определяется как собственное состояние оператора уничтожения бозона:

$$a_k |z\rangle = z_k |z\rangle, \quad (3.42)$$

где  $k$  – полный набор квантовых чисел для одной частицы, а  $z_k$  – комплексное число. Сопряженное уравнение имеет вид

$$\langle z| a_k^+ = \langle z| z_k^*. \quad (3.43)$$

Разложим когерентное состояние  $|z\rangle$  по состояниям системы бозонов с определенными числами заполнения:

$$|z\rangle = \sum_{n_{k_1} n_{k_2} \dots} z_{n_{k_1} n_{k_2} \dots} |n_{k_1} n_{k_2} \dots\rangle, \quad (3.44)$$

где

$$z_{n_{k_1} n_{k_2} \dots} = \langle n_{k_1} n_{k_2} \dots | z \rangle \quad (3.45)$$

– волновая функция когерентного состояния  $|z\rangle$  в представлении чисел заполнения. Квадрат модуля этой величины дает вероятность обнаружить в состоянии  $|z\rangle$  числа заполнения  $n_{k_1}, n_{k_2}, \dots$ . В дальнейшем вместо  $n_{k_i}$  будем писать  $n_i$ .

Используя (2.13), получим результат действия оператора уничтожения бозона в состоянии  $k$  на когерентное состояние (3.44):

$$a_k |z\rangle = \sum_{n_1 n_2 \dots} z_{n_1 n_2 \dots} \sqrt{n_k} |n_1 n_2 \dots n_k - 1 \dots\rangle.$$

Согласно (3.42) это выражение должно равняться  $z_k |z\rangle$ . Следовательно, для амплитуд вероятности (3.45) получаем систему рекуррентных уравнений

$$z_k z_{n_1 \dots (n_k - 1) \dots} = \sqrt{n_k} z_{n_1 \dots n_k \dots} \quad (3.46)$$

Решение этих уравнений является обобщением формулы (3.9) на случай многих степеней свободы:

$$z_{n_1 \dots n_k \dots} = \frac{z_1^{n_1} \dots z_k^{n_k} \dots}{\sqrt{n_1!} \dots \sqrt{n_k!} \dots}. \quad (3.47)$$

Подставляя амплитуду (3.47) в разложение (3.44) и учитывая обобщение формулы (2.24)

$$|n_1 \dots n_k \dots\rangle = \frac{(a_1^+)^{n_1} \dots (a_k^+)^{n_k} \dots}{\sqrt{n_1!} \dots \sqrt{n_k!} \dots} |0\rangle, \quad (3.48)$$

получаем

$$|z\rangle = \exp\left(\sum_k z_k a_k^+\right) |0\rangle \quad (3.49)$$

и сопряженное соотношение

$$\langle z| = \langle 0| \exp\left(\sum_k z_k^* a_k\right). \quad (3.50)$$

В случае одной степени свободы эти формулы переходят в (3.22).

Из формул (3.42), (3.43), (3.49) и (3.50) следует, что операторы уничтожения и рождения бозонов действуют на когерентное состояние по правилам:

$$\begin{aligned}
a_k |z\rangle &= z_k |z\rangle, & \langle z|a_k^+ &= \langle z|z_k^*, \\
a_k^+ |z\rangle &= \frac{\partial}{\partial z_k} |z\rangle, & \langle z|a_k &= \frac{\partial}{\partial z_k^*} \langle z|.
\end{aligned}
\tag{3.51}$$

Если  $|\psi\rangle$  – вектор в пространстве Фока бозе-системы, то

$$\begin{aligned}
\langle z|a_k|\psi\rangle &= \frac{\partial}{\partial z_k^*} \langle z|\psi\rangle = \frac{\partial}{\partial z_k^*} \psi(z^*), \\
\langle z|a_k^+|\psi\rangle &= z_k^* \langle z|\psi\rangle = z_k^* \psi(z^*).
\end{aligned}
\tag{3.52}$$

Таким образом,

$$a_k = \frac{\partial}{\partial z_k^*}, \quad a_k^+ = z_k^*.
\tag{3.53}$$

Легко проверить, что эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям (2.31):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z_k^*}, z_{k'}^* \right] = \delta_{kk'}.
\tag{3.54}$$

Чтобы получить перекрытие двух когерентных состояний, подставим в скалярное произведение  $\langle z|z'\rangle$  разложение (3.44) и ему сопряженное, учтя (3.47). Тогда

$$\langle z|z'\rangle = \sum_{n_1 \dots n_1'} \sum_{n_1' \dots n_1''} \frac{(z_1^*)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \dots \frac{(z_1')^{n_1'}}{\sqrt{n_1'!}} \dots \langle n_1 \dots | n_1' \dots \rangle = \exp\left( \sum_k z_k^* z_k' \right).
\tag{3.55}$$

Здесь мы учли условие (2.9) ортонормированности базиса  $\{|n_1 \dots\rangle\}$  в пространстве Фока. В частности,

$$\langle z|z\rangle = \exp\left( \sum_k |z_k|^2 \right).
\tag{3.56}$$

Неортогональность когерентных состояний отражает их переполненность.

Условие полноты (3.24) обобщается так:

$$\int d\mu(z) |z\rangle \langle z| = 1,
\tag{3.57}$$

где

$$d\mu(z) = \prod_k \left( \frac{dz_k^* dz_k}{2\pi i} \right) \exp \left( - \sum_k z_k^* z_k \right). \quad (3.58)$$

Проверку этого условия мы предоставляем читателю. Условие (3.57) позволяет разложение любого кет-вектора в пространстве Фока по когерентным состояниям записать в виде

$$|\psi(t)\rangle = \int \prod_k \left( \frac{dz_k^* dz_k}{2\pi i} \right) \exp \left( - \sum_k z_k^* z_k \right) \psi(z^*, t) |z\rangle, \quad (3.59)$$

где

$$\psi(z^*, t) = \langle z | \psi(t) \rangle \quad (3.60)$$

– волновая функция системы бозонов в представлении когерентных состояний. Квадрат модуля этой функции равен вероятности обнаружить в момент  $t$  в состоянии  $|\psi(t)\rangle$  когерентное состояние  $|z\rangle$ .

Умножим разложение (3.59) слева на  $\langle z |$ . Получим

$$\langle z | \psi \rangle = \int \prod_k \left( \frac{dz_k^* dz_k'}{2\pi i} \right) \exp \left( - \sum_k z_k^* z_k' \right) \langle z' | \psi \rangle \langle z | z' \rangle$$

или

$$\psi(z^*) = \int \prod_k \left( \frac{dz_k'^* dz_k'}{2\pi i} \right) \exp \left[ - \sum_k (z_k'^* - z_k^*) z_k' \right] \psi(z'^*). \quad (3.61)$$

Здесь мы учли перекрытие когерентных состояний (3.55). Соотношение (3.61) позволяет получить представление дельта-функции в комплексной плоскости, обобщающее известную формулу

$$\delta(x - x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} \exp[iy(x - x')].$$

Пусть оператор  $F = F(a_k^+, a_k)$  записан в нормальной форме. В нем операторы уничтожения действуют направо, а

операторы рождения – налево. Тогда матричный элемент этого оператора, собранный на когерентных состояниях, равен

$$\langle z | : F(a_k^+, a_k) : | z' \rangle = F(z_k^*, z_k') \langle z | z' \rangle, \quad (3.62)$$

где  $F(z_k^*, z_k')$  – функция комплексных переменных  $z_k^*, z_k'$ .

След любого оператора при помощи условия полноты (3.57) может быть записан в виде

$$\text{Sp}F = \int \prod_k \left( \frac{dz_k^* dz_k}{2\pi i} \right) \exp \left( - \sum_k z_k^* z_k \right) \langle z | F | z \rangle. \quad (3.63)$$

Если оператор  $F$  записан в нормальной форме, из формул (3.56) и (3.62) получаем

$$\text{Sp}F := \int \prod_k \left( \frac{dz_k^* dz_k}{2\pi i} \right) F(z_k^*, z_k).$$

Числа заполнения бозонов в когерентном состоянии  $|z\rangle$  не имеют определенных значений. Из формулы (3.17) следует, что вероятность обнаружить в состоянии  $k$   $n_k$  бозонов пропорциональна

$$w_{n_k} \sim \frac{|z_k|^{2n_k}}{n_k!}. \quad (3.64)$$

Среднее число частиц в этом состоянии согласно (3.18) равно  $\bar{n}_k = |z_k|^2$ , а среднее полного числа частиц  $\bar{N} = \sum_k |z_k|^2$ .

Следовательно, вероятность (3.64) может быть записана в виде

$$\frac{(\bar{n}_k)^{n_k}}{n_k!}.$$

Нормируя это выражение условием

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} C_{\bar{n}_k} \frac{(\bar{n}_k)^{n_k}}{n_k!} = C_{\bar{n}_k} e^{\bar{n}_k} = 1,$$

получаем распределение Пуассона:

$$w_{n_k} = e^{-\bar{n}_k} \frac{(\bar{n}_k)^{n_k}}{n_k!}.$$

Запишем уравнение Шредингера

$$H\psi = E\psi$$

в представлении когерентных состояний. С учетом условия полноты (3.57) имеем

$$\langle z|H|\psi\rangle = \int d\mu(z') \langle z|H|z'\rangle \langle z'|\psi\rangle = E\langle z|\psi\rangle = E\psi(z^*), \quad (3.65)$$

где  $\psi(z^*) = \langle z|\psi\rangle$  (см. (3.60)). В общем случае из (3.51)-(3.53) следует

$$\langle z|H|z'\rangle = H\left(z^*, \frac{\partial}{\partial z^*}\right) \langle z|z'\rangle. \quad (3.66)$$

Подставляя это соотношение в (3.65) и интегрируя по  $z'$ , получаем уравнение Шредингера в представлении когерентных состояний:

$$H\left(z^*, \frac{\partial}{\partial z^*}\right) \psi(z^*) = E\psi(z^*). \quad (3.67)$$

Рассмотрим простой пример использования этого уравнения. Если энергию одномерного осциллятора отсчитывать от энергии основного состояния, его гамильтониан будет иметь вид

$$H = \hbar\omega a^+ a.$$

Он имеет нормальную форму, поэтому в представлении когерентных состояний имеем

$$\langle z|H|z'\rangle = \hbar\omega z^* z' \langle z|z'\rangle \quad (3.68)$$

(см. (3.62)). Поскольку

$$\langle z | z' \rangle = \exp\left(z^* z'\right),$$

то матрица (3.68) равна

$$\langle z | H | z' \rangle = \hbar \omega z^* \frac{\partial}{\partial z'^*} \langle z | z' \rangle$$

в соответствии с (3.66). Уравнение Шредингера (3.67) принимает вид

$$\hbar \omega z^* \frac{\partial}{\partial z'^*} \psi(z^*) = E \psi(z^*).$$

Решение этого уравнения известно:

$$\psi(z^*) \sim (z^*)^{\frac{E}{\hbar \omega}}. \quad (3.69)$$

Из условия однозначности решения (3.69) получаем уровни энергии осциллятора  $E_n = n \hbar \omega$ , где  $n$  – целое число. Нормированные волновые функции

$$\psi_n(z^*) = \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}}$$

образуют полный ортонормированный набор со скалярным произведением

$$\int \frac{dz^* dz}{2\pi i} [\psi_n(z^*)]^* \psi_{n'}(z^*) e^{-z^* z} = \delta_{nn'}.$$

Стандартный гамильтониан системы бозонов с парным межчастичным взаимодействием во внешнем поле

$$H = \sum_{ik} h_{ik} a_i^+ a_k + \frac{1}{2} \sum_{iklm} \langle ik | v | lm \rangle a_i^+ a_k^+ a_m a_l \quad (3.70)$$

в представлении когерентных состояний записывается в виде

$$H = \sum_{ik} h_{ik} z_i^* \frac{\partial}{\partial z_k^*} + \frac{1}{2} \sum_{iklm} \langle ik | v | lm \rangle z_i^* z_k^* \frac{\partial}{\partial z_m^*} \frac{\partial}{\partial z_l^*}. \quad (3.71)$$

Здесь  $h$  – гамильтониан частицы во внешнем поле,  $\{|i\rangle\}$  – произвольный одночастичный базис. Если же гамильтониан



приведен к нормальной форме, матрица гамильтониана (3.71) упрощается в соответствии с (3.62):

$$\langle z | : H : | z' \rangle = \sum_{ik} h_{ik} z_i^* z_k' \langle z | z' \rangle + \frac{1}{2} \sum_{iklm} \langle ik | \nu | lm \rangle z_i^* z_k^* z_m' z_l' \langle z | z' \rangle. \quad (3.72)$$

### 3.4. Гауссовы интегралы

При вычислении матричных элементов оператора эволюции системы между когерентными состояниями приходится иметь дело с интегралами от экспонент, в показателях которых фигурируют полиномы вещественных или комплексных переменных интегрирования. Если форма в показателе экспоненты квадратичная, мы имеем дело с обобщением интеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (3.73)$$

в котором  $a$  – вещественное положительное число.

Рассмотрим более общий интеграл по  $n$  вещественным переменным  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1 \dots dx_n}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{ij} x_i A_{ij} x_j + \sum_i x_i J_i\right), \quad (3.74)$$

где  $A$  – вещественная симметричная положительно определенная матрица  $n \times n$ ,  $\vec{J} = (J_1, \dots, J_n)$  – вещественный вектор. Интеграл (3.74) называется гауссовым интегралом.

Выполним линейное преобразование к новым переменным интегрирования  $y_1, \dots, y_n$ :

$$x_i = y_i + \sum_j A_{ij}^{-1} J_j \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.75)$$

где  $A^{-1}$  – обратная матрица. В результате такого преобразования интеграл (3.74) становится равным

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1 \dots dx_n}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{ij} x_i A_{ij} x_j + \sum_i x_i J_i\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{ij} J_i A_{ij}^{-1} J_j\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_1 \dots dy_n}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{ij} y_i A_{ij} y_j\right). \quad (3.76)$$

Видно, что этот интеграл – четная функция  $\bar{J}$ .

Выполним теперь линейное преобразование к переменным  $u_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), диагонализующее квадратичную форму в показателе экспоненты (3.76):

$$y_i = \sum_{k=1}^n Q_{ik} u_k \quad (i=1, \dots, n). \quad (3.77)$$

Подберем матрицу  $Q$  так, чтобы квадратичная форма в показателе экспоненты (3.76) приняла вид

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} y_i A_{ij} y_j = \frac{1}{2} \sum_i u_i^2.$$

Это равенство выполняется, если  $\tilde{Q}AQ=1$ , где тильдой отмечена транспонированная матрица, а 1 – единичная матрица  $n \times n$ . Отсюда получаем

$$\det Q = \frac{1}{\sqrt{\det A}}. \quad (3.78)$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_1 \dots dy_n}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{ij} y_i A_{ij} y_j\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots du_n \det Q \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_i u_i^2\right) = \det Q = \frac{1}{\sqrt{\det A}},$$

поскольку якобиан перехода  $(y_1, \dots, y_n) \rightarrow (u_1, \dots, u_n)$  равен  $\det Q$ . Таким образом, гауссов интеграл (3.74) равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1 \dots dx_n}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{ij} x_i A_{ij} x_j \pm \sum_i x_i J_i\right) =$$

$$= (\det A)^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{ij} J_i A_{ij}^{-1} J_j\right). \quad (3.79)$$

Вычислим теперь гауссов интеграл

$$\int \prod_{k=1}^n \left( \frac{dz_k^* dz_k}{2\pi i} \right) \exp\left[-\sum_{kl} z_k^* B_{kl} z_l - \sum_k \left( J_k^* z_k + z_k^* J_k' \right)\right], \quad (3.80)$$

в котором  $z$  и  $z^*$  – комплексные переменные интегрирования,  $B$  – комплексная матрица  $n \times n$ ,  $\vec{J}$  и  $\vec{J}'$  – комплексные векторы. Для сходимости интеграла (3.80) необходимо, чтобы эрмитова часть матрицы  $B$  была положительно определенной, т.е. положительными должны быть собственные числа этой части матрицы.

Запишем интеграл (3.80) в символическом виде

$$\int \frac{dz^+ dz}{2\pi i} \exp\left(-z^+ B z - J^+ z - z^+ J'\right), \quad (3.81)$$

где  $z$  и  $z^+$  ( $J$  и  $J^+$ ) – столбец и строка из компонент  $z_1, \dots, z_n$  и  $z_1^*, \dots, z_n^*$  ( $J_1, \dots, J_n$  и  $J_1^*, \dots, J_n^*$ ) соответственно. Поскольку переменные  $z$  и  $z^+$  в (3.81) независимы, совершим над ними независимые линейные преобразования

$$z = z' - B^{-1} J', \quad z^+ = z'^+ - J^+ B^{-1}. \quad (3.82)$$

Якобиан этого преобразования равен единице, поэтому

$$\int \frac{dz^+ dz}{2\pi i} \exp\left(-z^+ B z - J^+ z - z^+ J'\right) =$$

$$= \int \frac{dz'^+ dz'}{2\pi i} \exp\left(-z'^+ B z' + J^+ B^{-1} J'\right). \quad (3.83)$$

Подвергнем теперь переменные  $z'$  и  $z'^+$  унитарному преобразованию

$$z' = Uz'', \quad z'^+ = z''^+ U^+, \quad (3.84)$$

где  $U$  – унитарная матрица. Тогда квадратичная форма в показателе экспоненты (3.83) принимает вид

$$z'^+ B z' = z''^+ D z'',$$

где матрица  $D$  равна

$$D = U^+ B U. \quad (3.85)$$

Если матрица  $B$  эрмитова, она может быть диагонализирована унитарным преобразованием (3.85):

$$D_{kl} = D_k \delta_{kl},$$

где  $D_k$  – вещественные положительные (по условию) числа.

При унитарном преобразовании (3.84) имеем

$$z'^+ z' = z''^+ z'' = \sum_{k=1}^n z_k''^* z_k'',$$

а якобиан преобразования равен единице. Следовательно, входящий в (3.83) интеграл равен

$$\begin{aligned} \int \frac{dz'^+ dz'}{2\pi i} \exp(-z'^+ B z') &= \int \frac{dz''^+ dz''}{2\pi i} \exp(-z''^+ D z'') = \\ &= \int \frac{dz''^+ dz''}{2\pi i} \exp\left(-\sum_{k=1}^n D_k |z_k''|^2\right). \end{aligned}$$

Мы получили произведение  $n$  интегралов

$$\int \frac{dz_k''^* dz_k''}{2\pi i} \exp(-D_k |z_k''|^2) = \frac{1}{D_k}.$$

Следовательно, гауссов интеграл (3.80) равен

$$\begin{aligned} \int \prod_{k=1}^n \left( \frac{dz_k^* dz_k}{2\pi i} \right) \exp\left(-\sum_{kl} z_k^* B_{kl} z_l - \sum_k J_k^* z_k - \sum_k z_k^* J_k\right) &= \\ = \frac{1}{\det B} \exp\left(\sum_{kl} J_k^* B_{kl}^{-1} J_l\right), \end{aligned} \quad (3.86)$$

где  $\prod_k D_k = \det D = \det B$ . Отметим, что формулы (3.79) и

(3.86) позволяют преобразовать экспоненту, в показателе которой фигурирует квадратичная форма переменных  $J$ , в интеграл от экспоненты, в показателе которой стоит уже линейное по  $J$  выражение. Этим приемом мы в дальнейшем воспользуемся.

Рассмотренные в этом разделе гауссовы интегралы встречаются в теории флуктуаций термодинамических величин (см. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Статистическая физика, ч.1, 1995; В.В. Лебедев, Флуктуационные эффекты в макрофизике, 2004). Рассмотрим простейший случай одной флуктуирующей скалярной величины  $x$ , распределение вероятности значений которой дается формулой Гаусса:

$$w(x) = N^{-1} \exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right), \quad (3.87)$$

где

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

– нормировочный множитель,  $a > 0$ . Моменты случайной величины  $x$  равны

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx N^{-1} \exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right) x^n.$$

Удобно вычислять этот интеграл при помощи производящей функции

$$L(\lambda) = \langle \exp(\lambda x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^n \langle x^n \rangle. \quad (3.88)$$

С учетом (3.87) находим

$$L(\lambda) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2a}\right). \quad (3.89)$$

Сравнивая коэффициенты разложения по степеням  $\lambda$  в (3.88) и (3.89), получаем

$$\langle x^{2n} \rangle = \frac{(2n)!}{2^n n!} a^{-n}.$$

Пусть теперь  $z$  – комплексная случайная переменная. Тогда гауссову функцию распределения следует записать в виде  $N^{-1} \exp(-a|z|^2)$ , где

$$N = \int d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z) \exp(-a|z|^2) = \frac{\pi}{a}, \quad a > 0.$$

Производящую функцию определим соотношением

$$\begin{aligned} L &= \langle \exp(\lambda z^* + \lambda' z) \rangle = \\ &= N^{-1} \int d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z) \exp(-a|z|^2 + \lambda z^* + \lambda' z) = \exp\left(\frac{\lambda \lambda'}{a}\right). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Переменные  $\lambda$  и  $\lambda'$ , разложение по которым производящей функции дает моменты величин  $z$  и  $z^*$ , считаем независимыми переменными. Раскладывая (3.90) по  $\lambda$  и  $\lambda'$ , находим

$$\langle |z|^{2n} \rangle = n! a^{-n}.$$

В случае  $n$  комплексных переменных  $z_1, \dots, z_n$  гауссову функцию распределения с положительно определенной вероятностью записываем в виде

$$N^{-1} \exp\left(-\sum_{kl} z_k^* A_{kl} z_l\right),$$

где  $A$  – эрмитова положительно определенная матрица. Нормировочная константа  $N$  равна (см. (3.86))

$$N = \int d^n(\operatorname{Re} z) d^n(\operatorname{Im} z) \exp\left(-\sum_{kl} z_k^* A_{kl} z_l\right) = \frac{\pi^n}{(\det A)^n}.$$

Производящую функцию определим соотношением

$$L(\lambda, \lambda') = \left\langle \exp \left( \sum_k \lambda_k z_k^* + \sum_k \lambda'_k z_k \right) \right\rangle.$$

Согласно (3.86) она равна

$$L(\lambda, \lambda') = \exp \left( \sum_{kl} \lambda'_k F_{kl} \lambda_l \right),$$

где

$$F_{kl} = \langle z_k z_l^* \rangle = A_{kl}^{-1} \quad (3.91)$$

– парная корреляционная функция. Раскладывая  $L$  по  $\lambda$  и  $\lambda'$ , находим

$$\langle z_i z_j z_k^* z_m^* \rangle = F_{ik} F_{jm} + F_{im} F_{jk}. \quad (3.92)$$

Это соотношение обобщается на случай большего числа переменных:

$$\langle z_i z_j \dots z_k^* z_m^* \rangle = F_{ik} F_{jm} \dots + \dots \quad (3.93)$$

Мы получили разложение среднего (3.93) по парным корреляционным функциям (3.91). Отличны от нуля только те корреляционные функции, которые получаются усреднением произведения одинакового числа переменных  $z$  и  $z^*$ . В (3.93) суммирование идет по всем произведениям корреляционных функций (3.91), которые получаются в результате разных способов «спаривания» в произведении  $z_i z_j \dots z_k^* z_m^*$ , если под спариванием понимать образование парной корреляционной функции (3.91). Правило (3.93) называется теоремой Вика. Она будет более подробно рассмотрена в гл. 5.

### 3.5. Алгебра Грассмана

В этом и следующих разделах мы обобщим результаты, приведенные в рр. 3.1-3.4, на случай системы взаимодействующих фермионов. Мы увидим, что такое

обобщение требует выхода за рамки комплексных чисел и использования обобщения понятия числа, предложенного Г.Грассманом в 1894 году. Он ввел новые числа, которые теперь называются числами Грассмана. Эти числа являются элементами алгебры Грассмана, которую мы здесь кратко рассмотрим. Позже были введены производные, интегралы и другие понятия анализа на алгебре Грассмана (см. Ф.А. Березин, Метод вторичного квантования, 1965; Р. Раджараман, Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля, 1985; J.W. Negele and H. Orland, Quantum Many-Particle Systems, 1988; Ж-П. Блейзо, Ж. Рипка, Квантовая теория конечных систем, 1998). Убедимся в необходимости обобщения понятия числа при описании фермионов по аналогии с бозонами в терминах классических (не операторных) величин.

По аналогии с (3.42) определим когерентное состояние  $|\psi\rangle$  ферми-системы как собственное состояние оператора уничтожения фермиона с квантовыми числами  $k$  :

$$a_k |\psi\rangle = \psi_k |\psi\rangle, \quad (3.94)$$

где  $|\psi\rangle$  – собственный вектор оператора  $a_k$ ,  $\psi_k$  – соответствующее собственное значение. Действуем на уравнение (3.94) оператором  $a_{k'}$  :

$$a_{k'} a_k |\psi\rangle = a_{k'} \psi_k |\psi\rangle.$$

С учетом перестановочных соотношений (2.107) получаем

$$-a_k a_{k'} |\psi\rangle = -a_k \psi_{k'} |\psi\rangle = a_{k'} \psi_k |\psi\rangle. \quad (3.95)$$

Естественно предположить, что символы  $a_k, \psi_{k'}$  и  $a_{k'}, \psi_k$  в левой и правой частях равенства (3.95) можно одновременно переставить:

$$-\psi_{k'} a_k |\psi\rangle = \psi_k a_{k'} |\psi\rangle.$$

Учитывая снова уравнение (3.94), находим

$$(\psi_k \psi_{k'} + \psi_{k'} \psi_k) |\psi\rangle = 0. \quad (3.96)$$



Ниже мы увидим, что поскольку это соотношение справедливо для когерентного состояния фермионов, оно справедливо и для любого другого состояния. Следовательно, из (3.96) следует

$$\{\psi_k, \psi_{k'}\} = \psi_k \psi_{k'} + \psi_{k'} \psi_k = 0. \quad (3.97)$$

При  $k = k'$  отсюда получаем

$$\psi_k^2 = 0. \quad (3.98)$$

Нетривиальное решение  $\psi_k$  уравнений (3.97) и (3.98) среди комплексных чисел найти невозможно. Оно является числом Грассмана, принадлежащим алгебре Грассмана.

Учитывая широкое использование алгебры Грассмана в квантовой теории поля, статистической физике и кинетике, приведем здесь краткое введение в этот раздел математики. Не выстраивая систему исходных постулатов, не доказывая теорем, мы приведем лишь набор правил, необходимых для практического использования алгебры Грассмана при описании фермионов. Строгое изложение этого раздела математики, который часто называется суперматематикой, читатель найдет в цитированной выше книге Ф.А. Березина.

Напомним, что алгеброй называется линейное пространство, в котором помимо обычных операций сложения и умножения элементов на вещественные или комплексные числа определена также операция умножения элементов с обычными свойствами:  $a(ab + \beta c) = \alpha ab + \beta ac$ ,  $(\alpha b + \beta c)a = \alpha ba + \beta ca$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – числа,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – элементы алгебры. Алгебра называется коммутативной, если  $ab = ba$  для любых ее элементов  $a$  и  $b$ . Алгебра Грассмана не коммутативна. Алгебра называется конечномерной или бесконечномерной, если как линейное пространство она конечномерна или бесконечномерна. Алгебра называется ассоциативной, если  $a(bc) = (ab)c$  для любых трех ее элементов. Если  $M$  – множество чисел, на которые допускается умножение элементов алгебры, то она называется алгеброй над полем  $M$ .

Рассмотрим  $n$  исходных объектов  $a_1, \dots, a_n$ , которые подчиняются соотношениям антикоммутиации

$$\{a_i, a_k\} = a_i a_k + a_k a_i = 0 \quad (3.99)$$

для всех  $i, k = 1, \dots, n$ . Из этих соотношений следует, что  $a_i^2 = 0$ , поэтому  $a_i^n = 0$  ( $n = 3, \dots$ ). Следовательно, задав одно число  $a$ , мы можем получить лишь две линейно независимые функции от него:  $a^0 = 1$  и  $a$ . Если заданы  $n$  независимых чисел  $a_1, \dots, a_n$ , из них можно образовать  $2^n$  линейно независимых функций:  $1, a_1, \dots, a_n, a_1 a_2, a_1 a_3, \dots, a_{n-1} a_n, a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 a_4, \dots, a_{n-2} a_{n-1} a_n, \dots, a_1 a_2 \dots a_n$ . Они называются мономами. Совокупность этих функций образует базис в  $2^n$ -мерном линейном пространстве, которое является алгеброй Грассмана  $G_n$ . Алгеброй Грассмана над полем комплексных чисел  $M$  называется алгебра, исходные элементы которой  $a_1, \dots, a_n$  удовлетворяют соотношениям (3.99). Эти элементы называются генераторами алгебры.

Любой элемент алгебры Грассмана может быть представлен в виде полинома

$$p(a_1, \dots, a_n) = p^{(0)} + \sum_{i=1}^n p_i^{(1)} a_i + \sum_{i_1 < i_2} p_{i_1 i_2}^{(2)} a_{i_1} a_{i_2} + \dots + \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} p_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}, \quad (3.100)$$

где  $p^{(k)}$  ( $k = 0, \dots, n$ ) – комплексные числа. Они коммутируют с числами Грассмана  $a_i$ . Если  $n$  принимает бесконечно много значений, мы имеем дело с бесконечномерной алгеброй Грассмана. Отметим, что в суперматематике используется и более сложная конструкция, когда коэффициенты  $p$  в разложении (3.100) принадлежат другой алгебре – алгебре

обычных функций с генераторами  $\Theta_l$  ( $l=1, \dots, k$ ). Тогда алгебра, порождаемая элементами вида (3.100), является алгеброй с генераторами  $(a, \Theta)$ . Она называется алгеброй Березина (см. Д.М.Гитман, И.В.Тютин, Каноническое квантование полей со связями, 1986).

В качестве примера рассмотрим алгебру  $G_2$  с двумя независимыми генераторами  $\psi$  и  $\psi^*$ . Они удовлетворяют соотношениям (3.99):

$$\psi^2 = 0, \quad \psi^{*2} = 0, \quad \psi\psi^* + \psi^*\psi = 0.$$

Любой элемент алгебры  $G_2$  может быть представлен в виде полинома

$$p(\psi, \psi^*) = p_0 + p_1\psi + p_2\psi^* + p_{12}\psi\psi^*, \quad (3.101)$$

где  $p_0, p_1, p_2, p_{12}$  – комплексные числа. Определим операцию сопряжения элементов алгебры Грассмана. Эта операция отличается от эрмитова сопряжения и называется инволюцией. Будем обозначать эту операцию звездочкой. Инволюция на алгебре  $G_2$  определяется так, что сопряженным полиномом к  $p$  является полином

$$\left[ p(\psi, \psi^*) \right]^* = p_0^* + p_1^*\psi^* + p_2^*\psi + p_{12}^*\psi\psi^*,$$

т.е.

$$(\psi^*)^* = \psi, \quad (\psi_1\psi_2)^* = \psi_2^*\psi_1^*, \quad (p_1\psi_1 + p_2\psi_2)^* = p_1^*\psi_1^* + p_2^*\psi_2^*.$$

Применительно к комплексным числам  $*$  означает обычное комплексное сопряжение.

Для грассмановых чисел развито дифференциальное и интегральное исчисление. По определению дифференцирование является линейной операцией, поэтому достаточно задать ее на произведениях генераторов. Отметим, что генераторы алгебры Грассмана – дискретные объекты. Следовательно, определять производную от них как предел отношения бесконечно малых величин нельзя. На алгебре

Грассмана определены левая  $\partial^L$  и правая  $\partial^R$  производные. Например, левая производная по  $a_k$  от произведения генераторов  $a_1 \dots a_n$ , обозначаемая символом

$$\partial_{a_k}^L (a_1 \dots a_n), \quad (3.102)$$

равна нулю, если среди чисел  $a_1, \dots, a_n$  нет  $a_k$ . Если же число  $a_k$  в произведении  $a_1 \dots a_n$  присутствует, то по определению его необходимо «проантикоммутировать» налево (поставить перед  $a_1$ ) и опустить. Тогда выражение (3.102) будет равно  $a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_n$  со знаком плюс или минус в зависимости от четности перестановки чисел Грассмана. В случае правой производной

$$\partial_{a_k}^R (a_1 \dots a_n) \quad \text{или} \quad (a_1 \dots a_n) \frac{\partial^R}{\partial a_k}$$

число  $a_k$  необходимо поставить после  $a_n$  и опустить. Например,

$$\begin{aligned} \partial_{\psi}^L p(\psi, \psi^*) &= p_1 + p_{12} \psi^*, & \partial_{\psi^*}^L p(\psi, \psi^*) &= p_2 - p_{12} \psi, \\ \partial_{\psi}^R p(\psi, \psi^*) &= p_1 - p_{12} \psi^*, & \partial_{\psi^*}^R p(\psi, \psi^*) &= p_2 + p_{12} \psi. \end{aligned}$$

Легко показать, что левые и правые производные коммутируют между собой, а одноименные производные антикоммутируют.

Определим теперь интеграл на алгебре Грассмана  $G_1$ :

$$\int da p(a), \quad (3.103)$$

где  $p(a)$  – элемент алгебры  $G_1$ . Поскольку генератор  $a$  нельзя рассматривать как непрерывную переменную, интеграл (3.103) не является площадью под «кривой»  $p(a)$ , и нет смысла указывать пределы интегрирования. Потребуем, чтобы интеграл (3.103) удовлетворял требованиям линейности и трансляционной инвариантности:

$$\int da [\alpha p(a) + \beta q(a)] = \alpha \int dap(a) + \beta \int daq(a), \quad (3.104)$$

$$\int dap(a) = \int dap(a+b),$$

где  $a, b, p, q$  – элементы алгебры  $G_1$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – комплексные числа. Число  $b$  не зависит от  $a$ . Условия (3.104) будут удовлетворены, если

$$\int da = 0, \quad \int daa = 1. \quad (3.105)$$

Отсюда и из (3.101) следуют равенства

$$\int d\psi p(\psi, \psi^*) = p_1 + p_{12} \psi^* = \partial_{\psi}^L p,$$

$$\int d\psi^* p(\psi, \psi^*) = p_2 - p_{12} \psi = \partial_{\psi^*}^L p,$$

поскольку

$$\int d\psi = 0, \quad \int d\psi^* = 0, \quad \int d\psi \psi = 1, \quad \int d\psi^* \psi^* = 1.$$

Отметим, что символы  $da, d\psi, d\psi^*$  не считаются числами Грассмана, потому что равенство  $\int d\psi^* \psi^* = 1$  не может быть получено из  $\int d\psi \psi = 1$  в результате сопряжения. Однако принимается, что эти символы антикоммутируют с числами Грассмана, а также между собой:

$$\{da_k, a_l\} = 0, \quad \{da_k, da_k\} = 0. \quad (3.106)$$

Рассмотрим алгебру  $G_2$ , порожденную генераторами  $a_1$  и  $a_2$ . Определим двойной интеграл как повторный

$$\int da_1 \int da_2 p(a_1, a_2),$$

где  $p$  – элемент алгебры  $G_2$ . С учетом правил (3.105) и (3.106) для четырех независимых функций  $1, a_1, a_2, a_1 a_2$  получаем

$$\int da_1 \int da_2 = 0,$$

$$\int da_1 \int da_2 a_1 = - \int da_1 a_1 \int da_2 = - \int da_2 = 0,$$

$$\int da_1 \int da_2 a_2 = \int da_1 = 0,$$

$$\int da_1 \int da_2 a_1 a_2 = - \int da_1 \int da_2 a_2 a_1 = - \int da_1 a_1 = -1.$$

Ясно, что в интеграл

$$\int da_1 \int da_2 \dots \int da_n p(a_1, \dots, a_n)$$

отличный от нуля вклад дает лишь член  $a_1 a_2 \dots a_n$  в разложении (3.100). В частности,

$$\int da_1 \dots \int da_n a_{i_1} \dots a_{i_n} = (-1)^P, \quad (3.107)$$

где  $P$  – четность перестановки

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ n & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Выбор генераторов алгебры неоднозначен. Перейдем в интеграле (3.107) к другим переменным интегрирования. Пусть старые генераторы  $a_i$  связаны с новыми  $b_i$  линейными соотношениями

$$b_i = \sum_{k=1}^n B_{ik} a_k, \quad (3.108)$$

где  $B$  – несингулярная  $c$ -числовая матрица. Обратное преобразование имеет вид

$$a_i = \sum_k B_{ik}^{-1} b_k.$$

Единственным независимым  $n$ -кратным интегралом в  $G_n$  является

$$\int da_1 \dots \int da_n a_n \dots a_1 = 1. \quad (3.109)$$

Аналогично для новых генераторов  $b_i$  также должно выполняться равенство

$$\int db_1 \dots \int db_n b_n \dots b_1 = 1. \quad (3.110)$$

Учитывая (3.108), получаем

$$b_n \dots b_1 = (\det B) a_n \dots a_1. \quad (3.111)$$

Таким образом, интегралы (3.109) и (3.110) совпадают, если выполняется равенство

$$db_1 \dots db_n = \frac{1}{\det B} da_1 \dots da_n. \quad (3.112)$$

Часто приходится иметь дело с интегралом от экспоненты:

$$\begin{aligned} \int da_1 \int da_2 e^{-\alpha a_1 a_2} &= \int da_1 \int da_2 (1 - \alpha a_1 a_2) = \\ &= -\alpha \int da_1 \int da_2 a_1 a_2 = \alpha. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Здесь  $\alpha$  – комплексное число. Рассмотрим  $2n$ -кратный гауссов интеграл

$$I = \int da_1^* da_1 \dots da_n^* da_n \exp \left( - \sum_{ik} a_i^* A_{ik} a_k \right), \quad (3.114)$$

где  $a_1^*, a_1, \dots, a_n^*, a_n$  – независимые генераторы алгебры  $G_{2n}$ ,  $A$  –  $c$ -числовая матрица  $n \times n$ . Предположим, что она диагонализуется при помощи преобразования

$$\sum_{kl} B_{ik} A_{kl} B_{lm}^{-1} = \lambda_i \delta_{im}, \quad (3.115)$$

где  $\lambda_i$  – ее собственные числа. Введем новые грассмановы генераторы  $b_i^*, b_i$ , связанные со старыми преобразованиями

$$b_i = \sum_{k=1}^n B_{ik} a_k, \quad b_i^* = \sum_{k=1}^n \left( \tilde{B}^{-1} \right)_{ik} a_k^*. \quad (3.116)$$

Здесь знаком  $\sim$  отмечена транспонированная матрица. Поскольку генераторы  $b_i$  и  $b_i^*$  независимы, второе соотношение (3.116) не равно сопряженному первому. Из (3.112) следует

$$db_1^* db_1 \dots db_n^* db_n = \frac{1}{\det B \det \tilde{B}^{-1}} da_1^* da_1 \dots da_n^* da_n.$$

Учитывая (3.115) и (3.116), получаем

$$\sum_{ik} a_i^* A_{ik} a_k = \sum_i \lambda_i b_i^* b_i.$$

Следовательно, интеграл (3.114) равен

$$I = \prod_i \int db_i^* db_i \exp(-\lambda_i b_i^* b_i) = \prod_i \lambda_i = \det A, \quad (3.117)$$

где учтено значение интеграла (3.113). Отметим, что интеграл (3.114) по комплексным переменным был вычислен в р. 3.4. Однако там определитель матрицы  $A$  оказался не в числителе, а в знаменателе.

Вычислим  $2n$ -кратный гауссов интеграл

$$\int \prod_{l=1}^n \left[ \frac{dz_l^* dz_l}{(2\pi i)^{(1-\eta)/2}} \right] \exp(-z^* Az - u^* z - z^* v). \quad (3.118)$$

Здесь

$$z^* Az = \sum_{l'l'} z_l^* A_{l'l'} z_{l'}, \quad u^* z = \sum_l u_l^* z_l, \quad z^* v = \sum_l z_l^* v_l,$$

$A$  – несингулярная  $c$ -числовая матрица,  $\eta = -1$  для бозонов и  $\eta = +1$  для фермионов. В случае бозонов  $z, z^*, u^*, v$  – комплексные числа. Если же рассматривается система фермионов, то эти величины являются элементами алгебры Грассмана. Форма

$$B(z^*, z) = z^* Az + u^* z + z^* v$$

в показателе экспоненты (3.118) имеет минимум при

$$z_m = -A^{-1}v, \quad z_m^* = -u^* A^{-1}.$$

В минимуме

$$B_m = -u^* A^{-1}v.$$

Следовательно,

$$B(z^*, z) = B_m + (z^* - z_m^*) A (z - z_m).$$



Подставим это выражение в (3.118) и сдвинем переменные интегрирования. При этом мера интегрирования не меняется. Учитывая (3.86) и (3.117), получаем

$$\int \prod_{l=1}^n \left[ \frac{dz_l^* dz_l}{(2\pi i)^{(1-\eta)/2}} \right] \exp(-z^* A z - u^* z - z^* v) = \quad (3.119)$$

$$= (\det A)^\eta \exp(u^* A^{-1} v).$$

Это соотношение называется преобразованием Хаббарда-Стратоновича. При  $v = u$  оно выражает экспоненту, в показателе которой содержится квадратичная форма  $u^* A^{-1} u$ , через интеграл от экспоненты, в которую  $u$  и  $u^*$  входят линейно.

Рассмотрим определение грассмановой дельта-функции:

$$\delta(z, z') = \int du \exp[-u(z - z')], \quad (3.120)$$

где  $z, z', u$  – числа Грассмана. Интеграл (3.120) равен

$$\delta(z, z') = \int du [1 - u(z - z')] = -(z - z').$$

Это выражение обладает свойствами дельта-функции. Действительно,

$$\int dz' \delta(z, z') (p_0 + p_1 z') = - \int dz' (z - z') (p_0 + p_1 z') = p_0 + p_1 z.$$

Скалярное произведение грассмановых функций  $f$  и  $g$  определяется соотношением:

$$\langle f | g \rangle = \int dz^* dz \exp(-z^* z) f^*(z) g(z^*) = f_0^* g_0 + f_1^* g_1, \quad (3.121)$$

где

$$f(z) = f_0 + f_1 z, \quad g(z^*) = g_0 + g_1 z^*,$$

$f_0, f_1, g_0, g_1$  – комплексные числа.

Правило интегрирования по частям на алгебре

Грассмана имеет вид

$$\begin{aligned} & \int \prod_k da_k^* da_k A(a^*, a) \left[ \frac{\partial^L}{\partial a_k} B(a^*, a) \right] = \\ & = \int \prod_k da_k^* da_k \left[ A(a^*, a) \frac{\partial^R}{\partial a_k} \right] B(a^*, a), \end{aligned} \quad (3.122)$$

где  $A$  и  $B$  – полиномы (3.100). Используя для  $A$  и  $B$  разложения (3.100), читатель без труда убедится в справедливости правила (3.122).

В дальнейшем мы встретимся с произведениями вида  $\tilde{\psi}\tilde{a}$ , где  $\tilde{\psi}$  – число Грассмана, а  $\tilde{a}$  – оператор вторичного квантования. Принимается, что  $\tilde{\psi}$  и  $\tilde{a}$  антикоммутируют

$$\{\tilde{\psi}, \tilde{a}\} = 0, \quad (3.123)$$

а выражение, сопряженное  $\tilde{\psi}\tilde{a}$ , равно  $\tilde{a}^+\tilde{\psi}^*$ . Предполагается также, что числа Грассмана коммутируют с вектором  $|0\rangle$  вакуумного состояния ферми-системы.

### 3.6. Когерентные состояния фермионов

Переходя к использованию чисел Грассмана для построения когерентных состояний фермионов, мы сразу сталкиваемся с трудностью при разложении когерентного состояния по состояниям с определенными числами заполнения, аналогичного (3.44). Дело в том, что коэффициенты в этом разложении должны быть числами Грассмана. Это заставляет нас расширить пространство Фока фермионов, заменив его обобщенным пространством состояний. Вектор обобщенного пространства является линейной комбинацией базисных векторов пространства Фока с коэффициентами из алгебры Грассмана:

$$|\psi\rangle = \sum_{\nu} \chi_{\nu} |\Phi_{\nu}\rangle, \quad (3.124)$$

где  $\chi_\nu$  – числа Грассмана,  $|\Phi_\nu\rangle$  – вектор в пространстве Фока.

Рассмотрим ферми-систему с одной степенью свободы. Двумерное пространство ее состояний (пространство Фока) образовано двумя состояниями:  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ . В состоянии  $|0\rangle$  возбуждение системы отсутствует, а в состоянии  $|1\rangle = a^+|0\rangle$  присутствует лишь одно возбуждение. Такая система называется осциллятором Ферми. Он может находиться и в суперпозиции состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ .

По аналогии со случаем бозонов когерентное состояние ферми-системы  $|\psi\rangle$  определяется как собственное состояние оператора уничтожения. В случае одной степени свободы

$$a|\psi\rangle = \psi|\psi\rangle, \quad (3.125)$$

где  $\psi$  – собственное число оператора  $a$ . Сопряженное уравнение имеет вид

$$\langle\psi|a^+ = \langle\psi|\psi^*. \quad (3.126)$$

Действуя на эти уравнения операторами  $a$  и  $a^+$ , учитывая  $a^2 = 0$ ,  $(a^+)^2 = 0$ , получаем

$$\psi^2 = 0, \quad \psi^{*2} = 0. \quad (3.127)$$

Как уже отмечалось, нетривиальные решения этих уравнений среди комплексных чисел отсутствуют. Они являются элементами алгебры Грассмана.

Следуя (3.49) и (3.50), определим когерентные состояния осциллятора Ферми соотношениями:

$$|\psi\rangle = \exp(a^+\psi)|0\rangle = |0\rangle + a^+\psi|0\rangle, \quad (3.128)$$

$$\langle\psi| = \langle 0|\exp(\psi^*a) = \langle 0| + \langle 0|\psi^*a.$$

В случае произвольного числа степеней свободы имеем:

$$|\psi\rangle = \exp\left(\sum_k a_k^+\psi_k\right)|0\rangle, \quad \langle\psi| = \langle 0|\exp\left(\sum_k \psi_k^*a_k\right). \quad (3.129)$$

Убедимся в том, что векторы (3.129) удовлетворяют уравнениям (3.125) и (3.126). Подставляя (3.129) в (3.125), получаем

$$\begin{aligned} a_k |\psi\rangle &= a_k \prod_{k'} (1 + a_k^+ \psi_{k'}) |0\rangle = \prod_{k' \neq k} (1 - \psi_{k'} a_k^+) a_k (1 - \psi_k a_k^+) |0\rangle = \\ &= \prod_{k' \neq k} (1 - \psi_{k'} a_k^+) \psi_k (1 - \psi_k a_k^+) |0\rangle = \psi_k \prod_{k'} (1 - \psi_{k'} a_k^+) |0\rangle = \psi_k |\psi\rangle. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется решение  $\langle \psi |$  уравнения (3.126).

В результате действия оператора рождения на когерентное состояние (3.129) находим

$$\begin{aligned} a_k^+ |\psi\rangle &= a_k^+ (1 - \psi_k a_k^+) \prod_{k' \neq k} (1 - \psi_{k'} a_k^+) |0\rangle = \\ &= a_k^+ \prod_{k' \neq k} (1 - \psi_{k'} a_k^+) |0\rangle = \tag{3.130} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \psi_k} (1 - \psi_k a_k^+) \prod_{k' \neq k} (1 - \psi_{k'} a_k^+) |0\rangle = -\frac{\partial}{\partial \psi_k} |\psi\rangle. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\langle \psi | a_k = \frac{\partial}{\partial \psi_k^*} \langle \psi |. \tag{3.131}$$

В (3.130) и (3.131) фигурируют левые производные.

Перекрытие двух когерентных состояний равно

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi' \rangle &= \langle 0 | \prod_k (1 + \psi_k^* a_k) (1 - \psi'_k a_k^+) |0\rangle = \\ &= \langle 0 | \prod_k (1 - \psi_k^* a_k \psi'_k a_k^+) |0\rangle = \\ &= \langle 0 | \prod_k (1 + \psi_k^* \psi'_k a_k a_k^+) |0\rangle = \tag{3.132} \\ &= \prod_k (1 + \psi_k^* \psi'_k) \langle 0 | 0 \rangle = \exp \left( \sum_k \psi_k^* \psi'_k \right), \end{aligned}$$

поскольку  $a_k a_k^+ |0\rangle = |0\rangle$ ,  $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ .

Разложение единицы по операторам проектирования на когерентные состояния фермионов имеет вид

$$\int \prod_k (d\psi_k^* d\psi_k) \exp\left(-\sum_k \psi_k^* \psi_k\right) |\psi\rangle\langle\psi| = 1. \quad (3.133)$$

Читатель может самостоятельно убедиться в справедливости этой формулы. Объединяя формулы (3.57), (3.58) и (3.133), получаем условие полноты базиса когерентных состояний, справедливое для бозонов и фермионов:

$$\int d\mu(z) |z\rangle\langle z| = 1, \quad (3.134)$$

где

$$d\mu(z) = (2\pi i)^{\frac{1}{2}(\eta-1)} \langle z|z\rangle^{-1} dz^* dz, \quad (3.135)$$

$$dz^* dz = \prod_k dz_k^* dz_k, \quad \langle z|z\rangle^{-1} = \exp\left(-\sum_k z_k^* z_k\right),$$

$\eta = -1$  для бозонов и  $\eta = +1$  для фермионов.

Получим след оператора  $F$ , содержащего четное число операторов вторичного квантования, в представлении когерентных состояний ферми-системы. Для этого поставим единичный оператор (3.133) перед оператором  $F$  в формуле для следа в пространстве Фока:

$$\begin{aligned} \text{Sp}F &= \sum_n \langle n|F|n\rangle = \\ &= \int \prod_k (d\psi_k^* d\psi_k) \exp\left(-\sum_k \psi_k^* \psi_k\right) \sum_n \langle n|\psi\rangle\langle\psi|F|n\rangle, \end{aligned}$$

где  $|n\rangle$  – базисный вектор в пространстве Фока системы. Это выражение равно

$$\text{Sp}F = \int \prod_k d\psi_k^* d\psi_k \exp\left(-\sum_k \psi_k^* \psi_k\right) \langle -\psi|F|\psi\rangle. \quad (3.136)$$

Убедимся в справедливости этого равенства в случае ферми-системы с одной степенью свободы:

$$\begin{aligned}
& \int d\psi^* d\psi \exp(-\psi^* \psi) \langle 0 | (1 - \psi^* a) F (1 + a^+ \psi) | 0 \rangle = \\
& = \int d\psi^* d\psi (1 - \psi^* \psi) \langle 0 | F + Fa^+ \psi - \psi^* a F - \psi^* a Fa^+ \psi | 0 \rangle = \\
& = \int d\psi^* d\psi (\langle 0 | -\psi^* a Fa^+ \psi | 0 \rangle - \psi^* \psi \langle 0 | F | 0 \rangle) = \\
& = \int d\psi^* d\psi \psi \psi^* \langle 0 | F | 0 \rangle - \int d\psi^* d\psi \psi^* \langle 0 | a Fa^+ | 0 \rangle \psi = \\
& = \int d\psi^* d\psi \psi \psi^* (\langle 0 | F | 0 \rangle + \langle 1 | F | 1 \rangle) = \langle 0 | F | 0 \rangle + \langle 1 | F | 1 \rangle = \text{Sp} F.
\end{aligned}$$

Здесь учтено  $\langle -\psi | = \langle 0 | (1 - \psi^* a)$ ,  $a^+ | 0 \rangle = | 1 \rangle$ ,  $\langle 0 | a = \langle 1 |$ .

Формула, объединяющая (3.63) и (3.136), имеет вид

$$\text{Sp} F = \int d\mu(z) \langle -\eta z | F | z \rangle, \quad (3.137)$$

где мера интегрирования дается формулой (3.135).

Разложение произвольного состояния  $|\psi\rangle$  ферми-системы по когерентным состояниям  $|z\rangle$  достигается умножением вектора  $|\psi\rangle$  на единичный оператор (3.134):

$$|\psi\rangle = \int \prod_k (dz_k^* dz_k) \exp\left(-\sum_k z_k^* z_k\right) \psi(z^*) |z\rangle, \quad (3.138)$$

где  $\psi(z^*) = \langle z | \psi \rangle$  – волновая функция системы в представлении когерентных состояний.

Из формул (3.126) и (3.131) получаем

$$\langle z | a_k | \psi \rangle = \frac{\partial}{\partial z_k^*} \psi(z^*), \quad \langle z | a_k^+ | \psi \rangle = z_k^* \psi(z^*). \quad (3.139)$$

Это означает, что операторы  $a_k$  и  $a_k^+$  представлены операторами  $\frac{\partial}{\partial z_k^*}$  и  $z_k^*$  соответственно. Они удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_k^*}, z_{k'}^* \right\} = \delta_{kk'}, \quad (3.140)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z_k^*}$  – левая производная.

Матричный элемент оператора  $F(a^+, a)$  в нормальной форме между когерентными состояниями равен

$$\langle z | : F(a_k^+, a_k) : | z' \rangle = F(z_k^*, z_k') \langle z | z' \rangle, \quad (3.141)$$

где функция  $F(z_k^*, z_k')$  получается из оператора  $F$  заменой

$$a_k \rightarrow z_k, \quad a_k^+ \rightarrow z_k^*. \quad (3.142)$$

Используя формулы (3.141) и (3.142), получим среднее число фермионов в когерентном состоянии  $|z\rangle$ :

$$\frac{\langle z | N | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \sum_k z_k^* z_k.$$

Поскольку правая часть этого равенства не является вещественным числом, нет смысла говорить о среднем числе фермионов в когерентном состоянии.

В р. 3.5 отмечалось, что грассмановы числа следует рассматривать как дискретные объекты. Это ограничение относится к генераторам алгебры и не касается произвольных ее элементов (3.100). Произвольный элемент содержит  $c$ -числовые коэффициенты  $p^{(l)}$ , которые могут непрерывно изменяться. Они могут зависеть от других  $c$ -числовых переменных, в частности от  $\vec{r}$  и  $t$ . Тогда и элементы алгебры Грассмана зависят от этих переменных. Они могут иметь вид

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_i \varphi_i(\vec{r}, t) a_i, \quad (3.143)$$

где  $a_i$  – генераторы алгебры. Таким образом мы приходим к понятию антикоммутирующего поля Грассмана (3.143). Коэффициенты  $\varphi_i(\vec{r}, t)$  можно обычным образом

дифференцировать и интегрировать. Эти операции отличаются от операций анализа на алгебре Грассмана. В дальнейшем мы будем иметь дело с грассмановой алгеброй с бесконечным числом генераторов, которые будем выбирать в парных обозначениях  $z^*, z$ . Они уже фигурируют в формулах (3.119), (3.133)-(3.138).

### 3.7. Когерентные состояния и континуальные интегралы

В этом разделе мы представим матричный элемент оператора эволюции (1.99) между двумя когерентными состояниями  $|z_i\rangle$  и  $|z_f\rangle$  в виде континуального интеграла. Для этого, как и в р. 1.5, разделяем оператор  $U(t)$  на  $n$  множителей:

$$U(t) = U(\varepsilon)U(\varepsilon)\dots U(\varepsilon), \quad (3.144)$$

где

$$U(\varepsilon) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H\right), \quad \varepsilon = \frac{t}{n}.$$

Поставим перед каждым множителем в (3.144) единичный оператор (3.134). Тогда матричный элемент оператора эволюции можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle z_f | U(t) | z_i \rangle &= \int d\mu(z_1)\dots d\mu(z_n) \langle z_f | z_n \rangle \times \\ &\times \langle z_n | U(\varepsilon) | z_{n-1} \rangle \dots \langle z_1 | U(\varepsilon) | z_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Пусть (см. (3.141))

$$H(z_1^*, z_2) = \frac{\langle z_1 | H | z_2 \rangle}{\langle z_1 | z_2 \rangle}$$



– матричный элемент гамильтониана на двух когерентных состояниях. Поскольку промежуток  $\varepsilon$  мал, можно приближенно записать

$$\langle z_l | U(\varepsilon) | z_{l-1} \rangle = \langle z_l | z_{l-1} \rangle \exp \left[ -\frac{i\varepsilon}{\hbar} H(z_l^*, z_{l-1}) \right], \quad (3.146)$$

где члены  $\sim \varepsilon^2$  опущены. Отметим, что это соотношение является точным, если оператор  $H$  записан в нормальной форме. Функция  $H(z_l^*, z_{l-1})$  получена из нормально упорядоченной формы гамильтониана  $H$  заменой  $a$  и  $a^+$  на  $z$  и  $z^*$  соответственно (см. (3.142)). В случае бозонов  $z$  и  $z^*$  – комплексные числа, а в случае фермионов – переменные Грассмана. Мера интегрирования в (3.145) определяется соотношением (3.135).

После подстановки (3.146) в (3.145) амплитуда перехода принимает вид

$$\begin{aligned} \langle z_f | U(t) | z_i \rangle &= \int \prod_{l=1}^n [d\mu(z_l) \langle z_l | z_{l-1} \rangle] \times \\ &\times \langle z_f | z_n \rangle \exp \left[ -\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{l=1}^n H(z_l^*, z_{l-1}) \right], \end{aligned} \quad (3.147)$$

где мы положили  $|z_0\rangle = |z_i\rangle$ .

Введем малую величину

$$|\delta z_l\rangle = |z_l\rangle - |z_{l-1}\rangle,$$

которая порядка  $\varepsilon$ . Тогда

$$\frac{\langle z_l | z_{l-1} \rangle}{\langle z_l | z_l \rangle} = \frac{\exp(z_l^* z_{l-1})}{\exp(z_l^* z_l)} = \exp(-z_l^* \delta z_l).$$

Здесь учтено перекрытие когерентных состояний (3.55) и (3.132), а  $\delta z_l = z_l - z_{l-1}$ . Подставляя это выражение в (3.147), получаем точный интеграл по траекториям для амплитуды перехода:

$$\begin{aligned} \langle z_f | U(t) | z_i \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{l=1}^n \left[ (2\pi i)^{(\eta-1)/2} dz_l^* dz_l \right] \langle z_f | z_n \rangle \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{l=1}^n \left[ H(z_l^*, z_{l-1}) - \frac{i\hbar}{\varepsilon} z_l^* \delta z_l \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Здесь  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  так, что интервал  $t = \varepsilon n$  остается конечным. В формуле (3.148) использованы обозначения

$$dz_l^* dz_l = \prod_k dz_l^*(k) dz_l(k), \quad z_l^* \delta z_l = \sum_k z_l^*(k) z_l(k),$$

где  $\{|k\rangle\}$  – одночастичный базис.

При малом  $\varepsilon$  можем использовать приближение

$$\varepsilon H(z_l^*, z_{l-1}) \approx \varepsilon H(z_l^*, z_l),$$

а отношение  $\frac{\delta z_l}{\varepsilon}$  заменить производной по времени  $\dot{z}_l$ .

Тогда интегральная сумма в показателе экспоненты (3.148) в пределе  $n \rightarrow \infty$  переходит в интеграл

$$-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left\{ H[z^*(t'), z(t')] - i\hbar z^*(t') \frac{\partial}{\partial t'} z(t') \right\}.$$

В результате амплитуда (3.148) принимает форму

$$\langle z_f | U(t) | z_i \rangle = \int D(z^*, z) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(z^*, z) \right], \quad (3.149)$$

где

$$S(z^*, z) = \int_0^t dt' \left\{ z^*(t') i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} z(t') - H[z^*(t'), z(t')] \right\} - \quad (3.150)$$

$$-i\hbar z^*(t) z(t)$$

– эффективное действие, а

$$D(z^*, z) = \prod_t \left[ (2\pi i)^{(\eta-1)/2} dz^*(t) dz(t) \right] \quad (3.151)$$

– мера интегрирования. В формуле (3.150) мы положили  $z_f^* = z^*(t)$ . Таким образом, траектории в формуле (3.149) подчиняются условиям

$$|z(0)\rangle = |z_i\rangle, \quad \langle z(t)| = \langle z_f|. \quad (3.152)$$

Рассмотренный выше метод используем для вычисления следа оператора эволюции:

$$\text{Sp}U(t) = \int d\mu(z) \langle z|U(t)|z\rangle.$$

Снова разделим оператор  $U(t)$  на  $n$  множителей (3.144). Затем введем единичный оператор (3.134) между каждым множителем  $U(\varepsilon)$ . Получим

$$\text{Sp}U(t) = \int d\mu(z_1) \dots d\mu(z_n) \langle z_n|U(\varepsilon)|z_{n-1}\rangle \times \dots \langle z_1|U(\varepsilon)|z_n\rangle.$$

Действуя, как описано выше, находим интеграл по траекториям в дискретной форме:

$$\text{Sp}U(t) = \int \prod_{l=1}^n [d\mu(z_l) \langle z_l|z_{l-1}\rangle] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \varepsilon \sum_{l=1}^n H(z_l^*, z_{l-1})\right],$$

где  $|z_n\rangle = |z_0\rangle$ . В пределе  $n \rightarrow \infty$  отсюда получаем

$$\text{Sp}U(t) = \int_{|z(0)\rangle = |z(t)\rangle} D(z^*, z) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(z^*, z)\right], \quad (3.153)$$

где теперь эффективное действие равно

$$S(z^*, z) = \int_0^t dt' \left\{ z^*(t') i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} z(t') - H[z^*(t'), z(t')] \right\}, \quad (3.154)$$

а мера интегрирования по-прежнему дается формулой (3.151). Траектории в интеграле (3.153) подчинены граничному условию  $|z(0)\rangle = |z(t)\rangle$ . Оно относится к бозевским частицам.

В случае фермионов  $z$  и  $z^*$  являются элементами алгебры Грассмана. Из формулы (3.137) видно, что в этом случае

граничное условие должно иметь вид  $|z(t)\rangle = -|z(0)\rangle$ . Условие, справедливое для бозонов и фермионов, запишем следующим образом

$$|z(t)\rangle = -\eta|z(0)\rangle. \quad (3.155)$$

Формулы (3.153) и (3.154) позволяют получить след статистического оператора  $\exp(-\beta H)$  ( $\beta$ —обратная температура. Для этого необходимо в (3.153) и (3.154) осуществить замену  $it/\hbar \rightarrow \tau$ . Тогда

$$Z = \text{Sp} e^{-\beta H} = \int_{|z(\beta)\rangle = -\eta|z(0)\rangle} D(z^*, z) \exp[-S(z^*, z)], \quad (3.156)$$

где

$$S(z^*, z) = \int_0^\beta d\tau \left\{ z^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} z(\tau) + H[z^*, z] \right\}, \quad (3.157)$$

а мера (3.151) содержит  $dz^*(\tau) dz(\tau)$ .

Чтобы проиллюстрировать изложенный здесь метод, рассмотрим систему с одной степенью свободы. Ее гамильтониан запишем в виде

$$H = \hbar\omega a^+ a. \quad (3.158)$$

Он соответствует одномерному гармоническому осциллятору с частотой  $\omega$ , энергия которого отсчитывается от энергии нулевых колебаний. Если  $a$  и  $a^+$  — фермиевские операторы, соответствующая система является осциллятором Ферми. Амплитуда (3.148) для системы с гамильтонианом (3.158) равна

$$\begin{aligned} \langle z_f | U(t) | z_i \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{l=1}^n \left[ (2\pi i)^{(\eta-1)/2} dz_l^* dz_l \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{l=1}^n \left[ \hbar\omega z_l^* z_{l-1} - \frac{i\hbar}{\varepsilon} z_l^* (z_l - z_{l-1}) \right] + z_f^* z_n \right\}. \end{aligned} \quad (3.159)$$

Первые два слагаемых в показателе экспоненты можно представить в виде

$$-\sum_{l'} z_l^* A_{ll'} z_{l'},$$

где  $A$  – матрица с элементами

$$A_{ll'} = \delta_{ll'} - (1 - i\omega\varepsilon) \delta_{l, l'+1}. \quad (3.160)$$

В двойной сумме  $\sum_{l'}$  необходимо выделить слагаемое с  $l = 0$

и  $l' = 0$ , так как интегрирования по  $z_0$  нет. Тогда выражение (3.159) совпадает с интегралом (3.119), в котором

$$v_1 = -(1 - i\varepsilon\omega) z_0, \quad u_n^* = -z_f^*.$$

Учитывая условия (3.152), получаем

$$\langle z_f | U(t) | z_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (\det A)^n \exp \left[ z_f^* \left( 1 - i \frac{\omega t}{n} \right) A_{n1}^{-1} z_i \right] \right\}. \quad (3.161)$$

Определитель матрицы (3.160) равен 1, а элемент  $A_{n1}^{-1} = \left( 1 - i \frac{\omega t}{n} \right)^{n-1}$ . Используя известное представление показательной функции, в пределе  $n \rightarrow \infty$  из формулы (3.161) получаем

$$\langle z_f | U(t) | z_i \rangle = \exp \left( z_f^* e^{-i\omega t} z_i \right).$$

След оператора эволюции равен

$$\begin{aligned} \text{Sp} U(t) &= \int d\mu(z) \langle z | U(t) | -\eta z \rangle = \\ &= \int dz^* dz (2\pi i)^{(\eta-1)/2} \exp \left( -z^* z - \eta z^* z e^{-i\omega t} \right). \end{aligned}$$

Здесь учтено выражение (3.134) для меры интегрирования и граничное условие (3.155). В случае фермионов ( $\eta = 1$ ) этот интеграл вычисляется с использованием правил (3.105):

$$\begin{aligned} \int dz^* dz \exp \left[ -z^* z \left( 1 + e^{-i\omega t} \right) \right] &= \int dz^* dz \left[ 1 - z^* z \left( 1 + e^{-i\omega t} \right) \right] = \\ &= 1 + \exp(-i\omega t). \end{aligned}$$

В случае бозонов ( $\eta = -1$ ) удобно перейти к интегрированию в полярных координатах  $\rho, \varphi$ . Необходимо учесть, что

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(z^*, z)} = -\frac{i}{2}, \quad dz^* dz = 2i dx dy = 2i \rho d\rho d\varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int dz^* dz (2\pi i)^{-1} \exp\left[-|z|^2 (1 - e^{-i\omega t})\right] = \\ & = \int_0^\infty d\rho^2 \exp\left[-\rho^2 (1 - e^{-i\omega t})\right] = (1 - e^{-i\omega t})^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, след оператора эволюции идеальной системы равен

$$\text{Sp}U(t) = (1 + \eta e^{-i\omega t})^\eta. \quad (3.162)$$

Выполняя здесь замену  $it/\hbar \rightarrow \beta$  и используя формулу

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad \text{находим свободную энергию осциллятора}$$

( $\eta = -1$ ) в термостате:

$$F = \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}).$$

Если учесть опущенный в формуле (3.162) множитель  $\exp(-\beta\hbar\omega/2)$ , она примет стандартный вид, полученный другим методом. В гамильтониане (3.158) будем под  $\hbar\omega$  понимать энергию  $\xi$  фермиона, отсчитанную от химпотенциала. Тогда из (3.162) получаем большой потенциал осциллятора Ферми ( $\eta = 1$ ) в термостате:

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta\xi}).$$

В курсе статистической физики эта формула выводится другим методом.

## Задачи

1. Покажите, что оператор  $a^+$  в теории осциллятора не имеет собственных векторов (см. А.С.Давыдов, Квантовая механика, 1973).
2. Убедитесь в переполненности базиса когерентных состояний осциллятора.
3. Покажите, что

$$: \exp(-xa^+a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{-x} - 1)^n}{n!} (a^+)^n a^n,$$

$$\text{Sp}[: \exp(-xa^+a) :] = (1 - e^{-x})^{-1},$$

(см. А.В. Свідзинський, Математичні методи теоретичної фізики, 2001).

4. Убедитесь в том, что разность

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon\right) - : \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon\right) : \text{ порядка } \varepsilon^2.$$

5. Пусть  $F^{(1)}$  – аддитивный оператор (2.111). Покажите, что  $\exp(-F^{(1)})|z\rangle = \left| \exp(-F^{(1)})z \right\rangle$ , где  $|z\rangle$  – когерентное состояние (3.129).

6. Покажите, что

$$[a_k, H] = \frac{\partial^L}{\partial a_k^+} H(a^+, a), \quad [a_k^+, H] = -H(a^+, a) \frac{\partial^R}{\partial a_k},$$

где  $H$  – произвольная функция операторов рождения и уничтожения.

7. Покажите, что оператор проектирования на вакуумное состояние может быть записан в виде

$$|0\rangle\langle 0| = : \exp(-a^+a) :.$$

8. Убедитесь в том, что когерентное состояние  $\exp(-za_0^+)|0\rangle$  является собственным состоянием гамильтониана

$$H = \sum_k (\varepsilon_k - \mu) a_k^+ a_k \text{ при } \mu = \varepsilon_0.$$

9. Вычислите интеграл

$$\int \prod_{l=1}^n \frac{dz_l^* dz_l}{(2\pi i)^{\frac{(1-\eta)}{2}}} \exp\left(-z^* Az - \frac{1}{2} z M z - \frac{1}{2} z^* N^* z^* + uz + v^* z^*\right) =$$

$$= \int \prod_{l=1}^n \frac{dz_l^* dz_l}{(2\pi i)^{\frac{(1-\eta)}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} z & z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & -\eta \tilde{A} \\ A & N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix}\right],$$

где  $z, z^*, u, v^*$  – переменные Грассмана для фермионов ( $\eta = 1$ ) и комплексные числа для бозонов ( $\eta = -1$ ),  $A, \tilde{M} = -\eta M, \tilde{N}^* = -\eta N^* - c$  – числовые матрицы (см. Ж-П. Блейзо, Ж. Рипка, Квантовая теория конечных систем, 1998).

10. Покажите, что  $|z\rangle = \exp(a^+ z)|0\rangle$  является вакуумом оператора  $a - z$ .

11. Докажите, что

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( : \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H \frac{t}{n}\right) : \right)^n.$$

12. Покажите, что

$$\int_{|z(\beta)\rangle = |z(0)\rangle} D(z^*, z) \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \left[z^* \frac{\partial}{\partial \tau} z + H(z^*, z)\right]\right\} =$$

$$= \int \frac{dz_0^* dz_0}{2\pi i} \exp\{-z_0^* [z_0 - z(\beta)]\} \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \left[z^* \frac{\partial}{\partial \tau} z + H(z^*, z)\right]\right\}$$

(см. (3.156) и (3.157)).



**Навчальне видання**

**Єрмолаєв Олександр Михайлович**

**Рашба Георгій Ілліч**

**Лекції з квантової статистики і кінетики**  
**3. Когерентні стани бозонів і ферміонів**

Російською мовою  
Друкується в авторській редакції  
Відповідальний за випуск О.І. Любімов  
Макет обкладинки І.М. Дончик

Підп. до друку .08. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.  
Друк ризографічний. Ум. друк. арк. . Обл.-вид. арк. .  
Наклад 50 прим. Ціна договірна.

---

61077, Харків, майдан Свободи, 4  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Організаційно-видавничий відділ НМЦ

Надруковано ФОП “Петрова І.В.”  
61144, Харків-144, вул. Гв. Широнінців 79-в, к. 137  
Свідоцтво про державну реєстрацію ВОО № 948011  
від 03.01.03