УДК 513.88

*Хейнрих Стефан*

# СТРОГО ВЫСТАВЛЕННЫЕ И КОНИЧЕСКИЕ ТОЧКИ В ПРОЕКТИВНОМ ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ

Большое число работ по топологическим тензорным произведениям посвящено изучению того, насколько свойства пространств — сомножителей переносятся на само произведение, и наоборот, насколько свойства произведения влекут соответствующие свойства сомножителей. В таком направлении Намиока и Фелпс [1] исследовали крайние точки, а Джонсон [2] $w^*$ — выставленные точки в тензорных произведениях. В этой работе таким же образом описаны строго выставленные и конические точки единичного шара проективного тензорного произведения $E \hat{\otimes} F$ банаховых пространств $E$ и $F$. В заключении делается замечание о возможных обобщениях. Доказательства проводятся для случая комплексных пространств, но вещественный случай может быть получен просто опусканием знаков Re перед функционалами и заменой в лемме 3 комплексных чисел $z_1$, $z_2$ и $\theta$ на вещественные.

Перечислим используемые обозначения, определения и факты. Пусть $E$ и $F$ — произвольные банаховы пространства, определенные либо оба над полем вещественных, либо оба над полем комплексных чисел. Обозначим через $E'$ сопряженное пространство к $E$, через $U_E$ — единичный шар пространства $E$, через $\operatorname{conv} A$ — выпуклую оболочку множества $A \subset E$, а через $\overline{\operatorname{conv}}\, A$ — ее замыкание.

Определение 1. *Точка $x_0 \in U_E$ называется строго выставленной точкой единичного шара $U_E$, если существует такой функционал $x_0' \in U_{E'}$,* что

а) $\langle x_0, x_0' \rangle = 1$,

б) *к любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что из $x \in U_E$ и $1 - \operatorname{Re}\langle x, x_0' \rangle < \delta$ следует $\|x_0 - x\| < \varepsilon$.*

Определение 2. *Точка $x_0 \in U_E$ называется конической точкой единичного шара $U_E$, если существует функционал $x_0' \in U_{E'}$ и константа $K > 0$, что*

а) $\langle x_0, x_0' \rangle = 1$,

б) *при любом $\delta > 0$ для $x \in U_E$ неравенство $1 - \operatorname{Re}\langle x, x_0' \rangle < \delta$ влечет $\|x_0 - x\| < K\delta$.*

Очевидно, каждая коническая точка подавно строго выставлена. Введем теперь на алгебраическом тензорном произведении $E \otimes F$ кросс-норму

$$\|u\| = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\,\|y_i\| : \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = u;\right.$$

$$\left. x_i \in E;\ y_i \in F;\ i = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots \right\}$$

и обозначим через $E \hat{\otimes} F$ пополнение произведения по этой норме. $E \hat{\otimes} F$ есть известное проективное тензорное произведение. Нам понадобится равенство

$$(E \hat{\otimes} F)' = L(E, F'), \tag{1}$$

где $L(E, F')$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из $E$ в $F'$, с обычной операторной нормой, а отождествление происходит естественным образом (см. [3, с. 45]). Обозначим еще для подмножеств $A \subset E$ и $B \subset F$ через $A \otimes B$ множество $\{x \otimes y : x \in A,\ y \in B\}$.

**Теорема 1.** *Если $u_0$-строго выставленная [коническая] точка единичного шара $U_{E \hat{\otimes} F}$, то $u_0 = x_0 \otimes y_0$, где $x_0$ и $y_0$ — строго выставленные [конические] точки единичных шаров $U_E$ и $U_F$ соответственно.*

Для доказательств теоремы нам потребуется несколько лемм.

*Лемма 1.* *Множество $U_E \otimes U_F$ замкнуто* в $E \hat{\otimes} F$.

Доказательство. Пусть

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U_E, \quad \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U_F$$

и пусть

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n \otimes y_n - u_0 \| = 0. \tag{2}$$

Если $u_0 = 0$, то очевидно $u_0 \in U_E \otimes U_F$. Если же $u_0 \neq 0$, то мы можем без ограничения общности считать, что $\| u_0 \| = 1$ и $\| x_n \| = \| y_n \| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Выбираем индекс $p$ так, что

$$\| x_p \otimes y_p - u_0 \| < \frac{1}{2}.$$

Пусть $x_p'$ и $y_p'$ — опорные функционалы к $x_p$ и $y_p$ соответственно. Тогда

$$x_p' \otimes y_p' \in L(E, F') = (E \hat{\otimes} F)',$$

причем

$$\| x_p' \otimes y_p' \| = \| x_p' \| \, \| y_p' \| = 1.$$

Поэтому мы имеем

$$| \langle x_p, x_p' \rangle \langle y_p, y_p' \rangle - \langle u_0, x_p' \otimes y_p' \rangle | =$$
$$= | 1 - \langle u_0, x_p' \otimes y_p \rangle | < \frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\langle u_0, x_p' \otimes y_p' \rangle \neq 0.$$

Из (2) мы получим

$$\lim_{n\to\infty} <x_n, x_p'> <y_n, y_p'> = <u_0, x_p^* \otimes y_p^*> \neq 0.$$

Принимая во внимание, что

$$|<x_n, x_p'>| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad |<y_n, y_p'>| \leqslant 1 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

мы можем выбирать подпоследовательности

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$$

так, что

$$\lim_{k\to\infty} <x_{n_k}, x_p'> = \mu_1 \neq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} <y_{n_k}, y_p'> = \mu_2 \neq 0. \qquad (3)$$

Очевидно, для любых $k$ и $l$

$$\|x_{n_k} \otimes y_{n_k} - x_{n_l} \otimes y_{n_l}\| \geqslant \sup_{x' \in U_{E'}} <x_{n_k}, x'> <y_{n_k}, y_p'> -$$

$$- <x_{n_l}, x'> <y_{n_l}, y_p'>| = \| <y_{n_k}, y_p'> x_{n_k} - <y_{n_l}, y_p'> x_{n_l} \|.$$

Тогда в силу (2)

$$\lim_{k,\, l\to\infty} \| <y_{n_k}, y_p'> x_{n_k} - <y_{n_l}, y_p'> x_{n_l} \| = 0$$

и из этого, согласно (3), получим

$$\lim_{k,\, l\to\infty} \|x_{n_k} - x_{n_l}\| = 0,$$

а значит

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0, \quad x_0 \in U_E.$$

Аналогично получаем

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0, \quad y_0 \in U_F.$$

Поскольку

$$\|x_{n_k} \otimes y_{n_k} - x_0 \otimes y_0\| = \|x_{n_k} \otimes y_{n_k} - x_{n_k} \otimes y_0 + x_{n_k} \otimes y_0 -$$

$$- x_0 \otimes y_0\| \leqslant \|x_{n_k} \otimes (y_{n_k} - y_0)\| + \|(x_{n_k} - x_0) \otimes y_0\| =$$

$$= \|x_{n_k}\| \|y_{n_k} - y_0\| + \|x_{n_k} - x_0\| \|y_0\| \leqslant \|x_{n_k} - x_0\| + \|y_{n_k} - y_0\|,$$

то следует

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} \otimes y_{n_k} - x_0 \otimes y_0\| = 0,$$

а значит $u_0 = x_0 \otimes y_0$. Лемма доказана.

***Лемма 2.*** $U_{E \hat{\otimes} F} = \overline{\operatorname{conv}} (U_E \otimes U_F)$.

Доказательство. В силу (1) и того, что выпуклая замкнутая оболочка множества есть пересечение содержащих это множество замкнутых полупространств, мы имеем

$$\overline{\mathrm{conv}}\,(U_E \otimes U_F) = \bigcap_{T \in L(E,\, F')} \{u \in E \hat{\otimes} F : \mathrm{Re} < u, T > \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{v \in U_E \otimes U_F} \mathrm{Re} < v,\ T > \}.$$

Очевидно,

$$\sup_{v \in U_E \otimes U_F} \mathrm{Re} < v, T > = \sup_{x \in U_E,\ y \in U_F} \mathrm{Re} < Tx,\ y > =$$

$$= \sup_{x \in U_E,\ y \in U_F} |< Tx,\ y >| = \| T \| = \sup_{v \in U_{E \hat{\otimes} F}} |< v,\ T >| =$$

$$= \sup_{v \in U_{E \hat{\otimes} F}} \mathrm{Re} < v,\ T >.$$

Следовательно,

$$\overline{\mathrm{conv}}\,(U_E \otimes U_F) = \bigcap_{T \in L(E,\, F')} \{u \in E \hat{\otimes} F : \mathrm{Re} < u,\ T > \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{v \in U_{E \hat{\otimes} F}} \mathrm{Re} < v,\ T > \} = U_{E \hat{\otimes} F}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $u_0$ — строго выставленная или коническая точка шара $U_{E \hat{\otimes} F}$. Тогда в обоих случаях заведомо существует $T_0 \in L(E,\ F')$, $\| T_0 \| = 1$, что $< u_0, T_0 > = 1$ и $(*)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\| u_0 - u \| < \varepsilon$ как только $u \in U_{E \hat{\otimes} F}$ и $1 - \mathrm{Re} < u,\ T_0 > < \delta$.

Согласно лемме 2, существует

$$u_1 \in \mathrm{conv}\,(U_E \otimes U_F),$$

что

$$\| u_0 - u_1 \| < \delta$$

и поэтому также

$$1 - \mathrm{Re} < u_1,\ T_0 > < \delta.$$

Подставим сюда представление $u_1$ как

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,(x_i \otimes y_i),$$

где

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad x_i \in U_E, \quad y_i \in U_F \quad (i = 1,\ \ldots,\ n) \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \{1 - \mathrm{Re} < T_0 x_i, y_i > \} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{Re} < T_0 x_i, y_i > < \delta.$$

Очевидно, это влечет существование индекса $k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, что $1 - \mathrm{Re} < T_0 x_k, y_k > < \delta$. Но последнее неравенство вместе с $(*)$ дает $\| u_0 - x_k \otimes y_k \| < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon$ элемент $u_0$ должен принадлежать замыканию множества $U_E \otimes U_F$, а согласно лемме 1, тогда и самому множеству, т. е.

$$u_0 = x_0 \otimes y_0, \quad x_0 \in U_E, \quad y_0 \in U_F.$$

Так как

$$\| u_0 \| = 1, \quad \text{то} \quad \| x_0 \| = \| y_0 \| = 1.$$

Теперь мы можем отождествить пространство $E$ с подпространством $E_1 = E \otimes y_0$ пространства $E \hat{\otimes} F$, причем точке $x_0$ соответствует точка $x_0 \otimes y_0$. Строго выставленная [коническая] точка $U_{E \hat{\otimes} F}$ подавно есть строго выставленная [коническая] точка единичного шара $U_{E_1}$ подпространства $E_1$, которому она принадлежит. Тем самым $x_0$ есть строго выставленная [коническая] точка шара $U_E$, а для $y_0$ утверждение получается аналогично. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть $x_0$ и $y_0$ строго выставленные [конические] точки единичных шаров $U_E$ и $U_F$ соответственно. Тогда $x_0 \otimes y_0$ есть строго выставленная [коническая] точка единичного шара $U_{E \hat{\otimes} F}$.*

***Лемма 3.*** *Пусть $\alpha$ — неотрицательное, а $z_1$ и $z_2$ — комплексные числа, такие, что*

$$|z_1| \leqslant 1, \ |z_2| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad 1 - \mathrm{Re}(z_1 z_2) \leqslant \alpha.$$

*Тогда существует число $\theta$, $|\theta| = 1$, что*

$$1 - \mathrm{Re}(\theta z_1) \leqslant \alpha \quad \text{и} \quad 1 - \mathrm{Re}(\theta^{-1} z_2) \leqslant \alpha.$$

Доказательство. Выберем в комплексной плоскости непрерывную ветвь аргумента, считая $\arg z = 0$ на положительной вещественной оси и $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Полагаем

$$\theta = \exp \left\{ i \left( \frac{\arg(z_1 z_2)}{2} - \arg z_1 \right) \right\},$$

тогда

$$\arg(\theta z_1) = \frac{\arg(z_1 z_2)}{2} \ \text{и} \ \arg(\theta^{-1} z_2) = \frac{\arg(z_1 z_2)}{2}.$$

Так как

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\arg(z_1 z_2)}{2} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

мы имеем

$$\operatorname{Re}(\theta z_1) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}(\theta^{-1} z_2) \geqslant 0.$$

Поскольку аргументы чисел $\theta z_1$ и $\theta^{-1} z_2$ совпадают, мы также получим

$$\operatorname{Im}(\theta z_1) \operatorname{Im}(\theta^{-1} z_2) \geqslant 0.$$

Значит,

$$\alpha \geqslant 1 - \operatorname{Re}(z_1 z_2) = 1 - \operatorname{Re}(\theta z_1 \theta^{-1} z_2) = 1 - \operatorname{Re}(\theta z_1) \operatorname{Re}(\theta^{-1} z_2) + \\ + \operatorname{Im}(\theta z_1) \operatorname{Im}(\theta^{-1} z_2) \geqslant 1 - \operatorname{Re}(\theta z_1) \operatorname{Re}(\theta^{-1} z_2) \geqslant 1 - \operatorname{Re}(\theta z_1).$$

Аналогично получаем

$$1 - \operatorname{Re}(\theta^{-1} z_2) \leqslant \alpha.$$

Лемма доказана.

***Лемма 4.*** *Пусть*

$$x_0 \in U_E, \ x_0' \in U_{E'}, \quad \langle x_0, x_0' \rangle = 1$$

*и пусть* $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ *такие числа, что для* $x \in U_E$ *из* $1 - \operatorname{Re}\langle x, x_0' \rangle < \delta_0$ *следует* $\| x_0 - x \| < \varepsilon_0$. *Пусть* $x_1$ *произвольный элемент* $x_1 \in U_E$. *Положим* $\alpha = 1 - \operatorname{Re}\langle x_1, x_0' \rangle$. *Тогда*

$$\| x_0 - x_1 \| < \varepsilon_0 \left(1 + \frac{2\alpha}{\delta_0}\right).$$

Доказательство. Если $\alpha < \sigma_0$, то из предположения следует, что $\| x_0 - x_1 \| < \varepsilon_0$. Если же $\alpha \geqslant \delta_0$, то мы полагаем

$$x_2 = \frac{\delta_0}{2\alpha} x_1 + \left(1 - \frac{\delta_0}{2\alpha}\right) x_0.$$

Очевидно, $x_2 \in U_E$ и

$$\operatorname{Re}\langle x_2, x_0' \rangle = \frac{\delta_0}{2\alpha} \operatorname{Re}\langle x_1, x_0' \rangle + \left(1 - \frac{\delta_0}{2\alpha}\right)$$

и поэтому

$$1 - \operatorname{Re}\langle x_2, x_0' \rangle = \frac{\delta_0}{2\alpha} \{1 - \operatorname{Re}\langle x_1, x_0' \rangle\} = \frac{\delta_0}{2} < \delta_0.$$

Тогда опять по предположению заключим $\| x_0 - x_2 \| < \varepsilon_0$, т. е.

$$\left\| \frac{\delta_0}{2\alpha} x_0 - \frac{\delta_0}{2\alpha} x_1 \right\| < \varepsilon_0$$

и поэтому

$$\| x_0 - x_1 \| < \varepsilon_0 \frac{2\alpha}{\delta_0}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть сначала $x_0$ и $y_0$ строго выставленные точки $U_E$ и $U_F$ соответственно. Тогда существуют $x_0' \in U_{E'}$ и $y_0 \in U_{F'}$ такие, что $\langle x_0, x_0' \rangle = 1$, $\langle y_0, y_0' \rangle = 1$ и (**)

к любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что для $x \in U_E$ из $1 - \mathrm{Re} < x, x_0' > < \delta$ следует $\| x_0 - x \| < \varepsilon$, а для $y \in U_F$ из $1 - \mathrm{Re} < y, y_0' > < \delta$ следует $\| y_0 - y \| < \varepsilon$. Фиксируем $\varepsilon$ и $\delta$ и предположим без ограничения общности $\delta \leqslant \varepsilon$. Очевидно,

$$< x_0 \otimes y_0, x_0' \otimes y_0' > = 1.$$

Пусть $u \in U_{E \hat{\otimes} F}$ и пусть

$$1 - \mathrm{Re} < u, x_0' \otimes y_0' > < \frac{\delta}{2}. \tag{4}$$

Тогда в силу леммы 2 существует $u_1 \in \mathrm{conv}(U_E \otimes U_F)$ такое что

$$\| u - u_1 \| < \frac{\delta}{2}. \tag{5}$$

Тогда

$$1 - \mathrm{Re} < u_1, x_0' \otimes y_0' > < \delta.$$

Подставляя сюда представление $u_1$ как

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i \otimes y_i),$$

где $x_i \in U_E$,

$$y_i \in U_F, \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

мы получим

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{Re} \{ < x_i, x_0' > < y_i, y_0' > \} < \delta.$$

Обозначим

$1 - \mathrm{Re} \{ < x_i, x_0' > < y_i, y_0' > \} = \alpha_i$, тогда $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и из последнего неравенства получим

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i < \delta. \tag{6}$$

Применяя лемму 3, мы найдем числа $\theta_i$, $|\theta_i| = 1$ такие, что

$$1 - \mathrm{Re} < \bar{x}_i, x_0' > \leqslant \alpha_i \text{ и } 1 - \mathrm{Re} < \bar{y}_i, y_0' > \leqslant \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

где

$$\bar{x}_i = \theta_i x_i, \quad \bar{y}_i = \theta_i^{-1} y_i.$$

Ясно, что $\bar{x}_i \in U_E$,

$$\bar{y}_i \in U_F, \quad \bar{x}_i \otimes \bar{y}_i = x_i \otimes y_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

а поэтому

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\bar{x}_i \otimes \bar{y}_i).$$

В силу (**) мы можем применить лемму 4, а тогда (7) дает для $i = 1, \ldots, n$

$$\| x_0 - \bar{x}_i \| < \varepsilon \left(1 + \frac{2\alpha_i}{\delta}\right) \text{ и } \| y_0 - \bar{y}_i \| < \varepsilon \left(1 + \frac{2\alpha_i}{\delta}\right). \quad (8)$$

Очевидно,

$$\| x_0 \otimes y_0 - u_1 \| = \left\| x_0 \otimes y_0 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\bar{x}_i \otimes \bar{y}_i) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_0 \otimes y_0 - \bar{x}_i \otimes \bar{y}_i) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| x_0 \otimes y_0 - \bar{x}_i \otimes \bar{y}_i \| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| x_0 \otimes y_0 - x_0 \otimes \bar{y}_i + x_0 \otimes \bar{y}_i - \bar{x}_i \otimes \bar{y}_i \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \{ \| x_0 \| \| y_0 - \bar{y}_i \| + \| x_0 - \bar{x}_i \| \| \bar{y}_i \| \} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \{ \| x_0 - \bar{x}_i \| + \| y_0 - \bar{y}_i \| \}.$$

Тогда (8) дает

$$\| x_0 \otimes y_0 - u_1 \| < 2\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(1 + \frac{2\alpha_i}{\delta}\right) = 2\varepsilon + \frac{4\varepsilon}{\delta} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i,$$

а согласно (6) получим

$$\| x_0 \otimes y_0 - u_1 \| < 2\varepsilon + 4\varepsilon = 6\varepsilon.$$

Наконец, это вместе с (5) дает

$$\| x_0 \otimes y_0 - u \| < 6\varepsilon + \frac{\delta}{2} < 7\varepsilon$$

для произвольного $u \in U_{E \hat{\otimes} F}$, удовлетворяющее (4).

Этим доказано, что $x_0 \otimes y_0$ есть строго выставленная точка шара $U_{E \hat{\otimes} F}$.

Пусть теперь $x_0$ и $y_0$ — конические точки $U_E$ и $U_F$ соответственно. Тогда существуют $x_0' \in U_{E'}$, $y_0' \in U_{F'}$ и константа $k > 0$, что $\langle x_0, x_0' \rangle = \langle y_0, y_0' \rangle = 1$ и для любого $\delta > 0$ из $x \in U_E$ и $1 - \operatorname{Re} \langle x, x_0' \rangle < \delta$ следует $\| x_0 - x \| < K\delta$, а из $y \in U_F$ и $1 -$

$-\operatorname{Re} < y, y_0' > < \delta$ следует $\| y_0 - y \| < K\delta$. Проделав те же оценки, как в случае строго выставленных точек, мы получим, что для любого $u \in U_{E \hat{\times} F}$ из

$$1 - \operatorname{Re} < u, x_0' \otimes y_0' > < \frac{\delta}{2}$$

следует

$$\| x_0 \otimes y_0 - u \| < 6K\delta + \frac{\delta}{2} = \left(6K + \frac{1}{2}\right)\delta.$$

Значит, $x_0 \otimes y_0$ есть коническая точка шара $U_{E \hat{\otimes} F}$. Теорема доказана.

Отметим в заключение, что без значительных изменений в рассуждениях в теоремах 1 и 2 шары $U_E$ и $U_F$ могут быть заменены любыми абсолютно выпуклыми, замкнутыми и ограниченными множествами $A \subset E$ и $B \subset F$, каждое из которых содержит больше одной точки, $U_{E \hat{\otimes} F}$ в таком случае следует заменить множеством $\overline{\operatorname{conv}} (A \otimes B)$, которое условно можно было бы назвать проективным тензорным произведением множеств $A$ и $B$.

Нетрудно видеть также, что все теоремы переносятся соответствующим образом и на проективное тензорное произведение конечного числа сомножителей.

Выражаю благодарность М. И. Кадецу за руководство.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Namioka J., Phelps R. R. Tensor products of compact convex sets. — «Pacif. J. Math.», 1969, Vol. 31, N 2, p. 469—480.
2. Johnson J. A. Extreme points in tensor products and a theorem of de Leeuw. — «Studia Math.», 1971, Vol. 37, N 2, p. 159—162.
3. Schatten R. A theory of cross-spaces. — «Ann. Math. Studies», 1950, N 26, p. 1—153.