УДК 517.942

А. С. Сохин, канд. физ.-мат. наук

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЛЕВИНСОНА

Рассмотрим дифференциальное уравнение Штурма—Лиувилля

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda^2 y,\ 0 < x < \infty \tag{1}$$

с вещественным потенциалом $q(x)$, подчиненным условию

$$\int_0^\infty x\, |q(x) - q_0(x)|\, dx < \infty, \tag{2}$$

где

$$q_0(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)x^{-2}, & 0 < x < 1 \\ \beta(\beta+1)x^{-2}, & x > 1 \end{cases}$$

$\left(\alpha,\ \beta\right.$ — любые вещественные числа из интервала $\left.\left(-\frac{1}{2},\ \infty\right)\right)$. Уравнение (1) и граничное условие

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha} y(x) = 0 \tag{3}$$

порождают самосопряженную граничную задачу, которую обозначим через $U(q)$. Пусть $g(x,\ \lambda)$ и $l(x,\ \lambda)$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$g(x,\ \lambda) = x^{\alpha+1}[1 + o(1)],\ x \to 0, \tag{4}$$

$$l(x,\ \lambda) = l^{i\lambda x}[1 + o(1)],\ x \to \infty; \tag{5}$$

тогда

$$g(x,\ \lambda) = \frac{l(\lambda)}{2i\lambda}[S(\lambda)\, l(x,\ \lambda) - l(x,\ -\lambda)],$$

где $l(\lambda) = w[l(x,\ \lambda),\ g(x,\ \lambda)] = lg' - l'g$;

$$S(\lambda) = \frac{l(-\lambda)}{l(\lambda)}\ (|S(\lambda)| = 1,\ \lambda > 0).$$

Функция $S(\lambda)$ называется функцией рассеяния.

Теорема Левинсона [3] устанавливает связь между изменением аргумента функции $\tilde{S}(\lambda)$ на интервале $(0,\ \infty)$ и числом p собственных значений граничной задачи $\tilde{U}(q)$ в случае $q_0(x) \equiv 0$:

$$\frac{1}{2\pi}[\arg\tilde{S}(0) - \arg\tilde{S}(\infty)] = p + r,\quad r = \begin{cases} 0, \\ \frac{1}{2}, \end{cases}\ g(x,\ 0) \sim \begin{cases} x, \\ 1, \end{cases}\ x \to \infty.$$

В данной заметке получено обобщение этой теоремы на случай потенциалов, подчиненных условию (2).

Теорема. *Функция рассеяния* $S(\lambda)$ *задачи* $U(q)$ *удовлетворяет следующему равенству:*

$$\frac{1}{2\pi}[\arg S(0) - \arg S(\infty)] = \frac{\alpha-\beta}{2} + p + r, \tag{6}$$

где p — *число отрицательных собственных значений задачи, а*

$$r = \begin{cases} 0 \\ \beta + \frac{1}{2}, \\ 1 \end{cases}$$

$$\text{если}\ \ g(x,\ 0) \sim \begin{cases} x^{\beta+1}, & -\frac{1}{2} < \beta \\ x^{-\beta}, & -\frac{1}{2} < \beta \leqslant \frac{1}{2}\ \ \text{при}\ \ x \to \infty. \\ x^{-\beta}, & \beta > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим через $g_0(x, \lambda)$, $l_0(x, \lambda)$, $S_0(\lambda)$, $l_0(\lambda)$ соответствующие функции в случае задачи $U(q_0)$, т. е. при $q(x) \equiv q_0(x)$. Для доказательства теоремы удобно представить функцию $S(\lambda)$ в виде

$$S(\lambda) = S_0(\lambda) \frac{E(-\lambda)}{E(\lambda)}, \tag{7}$$

где $S_0(\lambda)$ — функция рассеяния задачи $U(q_0)$, а $E(\lambda) = \frac{l(\lambda)}{l_0(\lambda)}$, и изучить в равенстве (7) изменение аргумента каждого сомножителя в отдельности. Ниже будут доказаны следующие утверждения,

Лемма 1.

$$\frac{1}{2\pi}[\arg S_0(0) - \arg S_0(\infty)] = \frac{\alpha - \beta}{2}. \tag{8}$$

Лемма 2. *Функция $E(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, непрерывна при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, квадратные корни $i|\lambda_k|$ из собственных значений задачи $U(q)$ и только они являются простыми нулями функции $E(\lambda)$, существует*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} E(\lambda) = 1 \tag{9}$$

равномерно по $\arg\lambda \in [0, \pi]$. Если $E(0) = 0$, то при $\lambda \to 0$ $(\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0)$

$$E(\lambda) = \begin{cases} a(-i\lambda)^{2\beta+1}[1 + o(1)], & -\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}, \\ b\lambda^2 \ln\lambda[1 + o(1)], & \beta = \frac{1}{2}, \\ c(-i\lambda)^2[1 + o(1)], & \beta > \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{10}$$

где a, b и $c \neq 0$ и вторые члены асимптотики малы равномерно по $\arg\lambda \in [0, \pi]$.

Из поведения функции $E(\lambda)$ при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$ $(\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0)$ вытекает

Следствие. *Функция $E(\lambda)$ может иметь только конечное число нулей в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$.*

Из представления (7) и леммы 1 следует

$$\frac{1}{2\pi}[\arg S(0) - \arg S(\infty)] \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{1}{2\pi} \arg \frac{E(-\lambda)}{E(\lambda)} \Big|_{\infty}^{0}.$$

Для вычисления второго слагаемого в последнем равенстве применим к функции $E(\lambda)$ принцип аргумента. Принимая во внимание свойства функции $E(\lambda)$ и повторяя рассуждения, проведенные в [2, с. 156—157], получим

$$\frac{1}{2\pi} \arg \frac{E(-\lambda)}{E(\lambda)} \Big|_{\infty}^{0} = p + r,$$

$$r = \begin{cases} 0 \\ \beta + \frac{1}{2}, \\ 1 \end{cases} \text{если } E(0) = \begin{cases} \neq 0, & -\frac{1}{2} < \beta \\ 0, & -\frac{1}{2} < \beta \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0, & \beta > \frac{1}{2} \end{cases}$$

где p — число отрицательных собственных значений задачи $U(q)$. Замечая, что (как будет показано ниже) $E(0)=0$ ($E(0)\neq 0$) тогда и только тогда, когда $g(x, 0)\sim x^{-\beta}$ ($g(x, 0)\sim x^{\beta+1}$) при $x\to+\infty$, будем иметь формулу (6).

Приведем теперь доказательства сформулированных лемм.

Доказательство леммы 1. Из явного вида потенциала $q_0(x)$ следует, что решения $g_0(x, \lambda)$ и $l_0(x, \lambda)$ являются линейными комбинациями функций Ханкеля—Риккати с индексом α при $0<x<1$ и индексом β при $x>1$. Из непрерывности этих решений и их производных по x при $x=1$ нетрудно найти их явный вид, из которого вытекают следующие свойства:

а) функция $l_0(x, \lambda)$ для каждого $x>0$ аналитична по λ при $\operatorname{Im}\lambda>0$ и

$$|l_0(x, \lambda)|\leqslant A_{\alpha, \beta}\begin{cases}\left(\dfrac{|\lambda|}{1+|\lambda|}\right)^{\alpha-\beta}\left(\dfrac{1+|\lambda|x}{|\lambda|x}\right)^{\alpha}e^{-x\operatorname{Im}\lambda}, & 0<x\leqslant 1,\\ \left(\dfrac{1+|\lambda|x}{|\lambda|x}\right)^{\beta}e^{-x\operatorname{Im}\lambda}, & x\geqslant 1;\end{cases} \tag{11}$$

б) функция $g_0(x, \lambda)$ для каждого $x\geqslant 0$ является четной целой функцией λ и

$$|g_0(x, \lambda)|\leqslant A_{\alpha, \beta}\begin{cases}\left(\dfrac{x}{1+|\lambda|x}\right)^{\alpha+1}e^{x\operatorname{Im}\lambda}, & 0<x\leqslant 1,\\ \left(\dfrac{1}{1+|\lambda|}\right)^{\alpha-\beta}\left(\dfrac{x}{1+|\lambda|x}\right)^{\beta+1}e^{x\operatorname{Im}\lambda}, & x\geqslant 1.\end{cases} \tag{12}$$

Как известно, квадратные корни из собственных значений задачи $U(q_0)$ и только они являются нулями функции $l_0(\lambda)$. Ввиду положительной определенности [1] оператора, порождаемого дифференциальным выражением $-\dfrac{d^2}{dx_2}+q_0(x)$ и граничным условием (3), задача $U(q_0)$ не имеет собственных значений, т. е. $l_0(\lambda)\neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda>0$. Из формулы

$$l_0(\lambda)=(2\alpha+1)\lim_{x\to 0}x^{\alpha}l_0(x, \lambda)=\frac{2^{\alpha+1}\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\lambda^{-\alpha}w\left[h_{\beta}^{(1)}(\lambda),\ j_{\alpha}(\lambda)\right], \tag{13}$$

где

$$h_{\beta}^{(1)}(x)=ie^{\frac{i\pi\beta}{2}}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}H^{(1)}_{\beta+\frac{1}{2}}(x),\quad j_{\alpha}(x)=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}I_{\alpha+\frac{1}{2}}(x)$$

($H_p^{(1)}$, I_p — функции Ханкеля и Бесселя), находим асимптотическое поведение $l_0(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$:

$$l_0(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\alpha+\beta+1}{(2\beta+1)a_{\beta}}(-i\lambda)^{-\beta}[1+O(\lambda^2)], & \lambda\to 0,\\ \dfrac{1}{a_{\alpha}}(-i\lambda)^{-\alpha}\left[1+O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\right], & \lambda\to\infty,\end{cases} \tag{14}$$

$$a_\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}.$$

Замечая, что

$$\frac{1}{2\pi}[\arg S_0(0) - \arg S_0(\infty)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} \right) d \ln l_0(z)$$

$$\text{и} \oint_{\Gamma_{\varepsilon, R}} d \ln l_0(z) = 0$$

по замкнутому контуру

$$\Gamma_{\varepsilon, R} = \{z : \operatorname{Im} z = 0, \quad \varepsilon \leqslant |\operatorname{Re} z| \leqslant R; \ |z| = \varepsilon, \ |z| = R, \ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$$

получим формулу (8), вычислив интегралы по малой и большой полуокружности, когда $\varepsilon \to 0$ и $R \to +\infty$, при помощи асимптотического равенства (12).

Доказательство леммы 2. Приведем задачу (1), (5) к эквивалентному интегральному уравнению

$$l(x, \lambda) = l_0(x, \lambda) + \int_x^\infty r(x, t, \lambda)\, l(t, \lambda)\, dt$$

с ядром

$$r(x, t; \lambda) = \frac{l_0(x, \lambda)\, g_0(t, \lambda) - l_0(t, \lambda)\, g_0(x, \lambda)}{l_0(\lambda)} [q(t) - q_0(t)].$$

Преобразуем это уравнение к виду, более удобному для изучения. Для этого введем следующие обозначения:

$$E_0(x, \lambda) = \frac{l_0(x, \lambda)}{l_0(\lambda)\, h_0(x)}, \quad G_0(x, \lambda) = \frac{g_0(x, \lambda)}{h_0(x)},$$

$$E(x, \lambda) = \frac{l(x, \lambda)}{l_0(\lambda)\, h_0(x)},$$

где $h_0(x)$ — решение уравнения (1) при $q(x) \equiv q_0(x)$ и $\lambda = 0$:

$$h_0(x) = \begin{cases} x^{-\alpha} + \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta + 1} x^{\alpha+1}, & 0 < x \leqslant 1, \\ \dfrac{2\alpha + 1}{\alpha + \beta + 1} x^{-\beta}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функции $E_0(x, \lambda)$ и $G_0(x, \lambda)$ при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ аналитичны по λ при $\operatorname{Im} \lambda > 0$, непрерывны по совокупности переменных x и λ при $x \geqslant 0$, $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$ и удовлетворяют, как следует из (11) и (12), неравенствам

$$|E_0(x, \lambda)| \leqslant C_{\alpha, \beta} \begin{cases} (1 + |\lambda| x)^\alpha e^{-x \operatorname{Im} \lambda}, & 0 < x \leqslant 1, \\ (1 + |\lambda|)^{\alpha-\beta} (1 + |\lambda| x)^\beta e^{-x \operatorname{Im} \lambda}, & x \geqslant 1; \end{cases} \tag{15}$$

$$|G_0(x, \lambda)| \leqslant C_{\alpha, \beta} \begin{cases} \dfrac{x^{2\alpha+1}}{(1 + |\lambda| x)^{\alpha+1}} e^{x \operatorname{Im} \lambda}, & 0 < x \leqslant 1, \\ \left(\dfrac{1}{1 + |\lambda|}\right)^{\alpha-\beta} \dfrac{x^{2\beta+1}}{(1 + |\lambda| x)^{\beta+1}} e^{x \operatorname{Im}}, & x \geqslant 1. \end{cases} \tag{16}$$

Функция $E(x, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$E(x, \lambda) = E_0(x, \lambda) + \int_x^\infty R(x, t; \lambda) E(t, \lambda)\, dt \tag{17}$$

с ядром

$$R(x, t; \lambda) = [E_0(x, \lambda) G_0(t, \lambda) - E_0(t, \lambda) G_0(x, \lambda)] \times \\ \times h_0^2(t) [q(t) - q_0(t)].$$

Обозначим правую часть неравенства (15) через $m_0(x, \lambda)$ и введем функции

$$\hat{E}(x, \lambda) = \frac{E(x, \lambda)}{m_0(x, \lambda)}, \quad \hat{E}_0(x, \lambda) = \frac{E_0(x, \lambda)}{m_0(x, \lambda)};$$

тогда интегральное уравнение (17) преобразуется к виду

$$\hat{E}(x, \lambda) = \hat{E}_0(x, \lambda) + \int_x^\infty \hat{R}(x, t; \lambda) \hat{E}(t, \lambda)\, dt, \tag{18}$$

где

$$\hat{R}(x, t; \lambda) = \left[\hat{E}_0(x, \lambda) G_0(t, \lambda) m_0(t, \lambda) - \right. \\ \left. - \hat{E}_0(t, \lambda) \frac{G_0(x, \lambda) m_0^2(t, \lambda)}{m_0(x, \lambda)}\right] h_0^2(t) [q(t) - q_0(t)].$$

Пользуясь оценками (15), (16), нетрудно установить, что

$$|\hat{R}(x, t; \lambda)| \leqslant C_{\alpha, \beta} \frac{t}{1 + |\lambda| t} |q(t) - q_0(t)|.$$

Решая уравнение (18) методом последовательных приближений, получим

$$|\hat{E}(x, \lambda)| \leqslant \exp\left[C_{\alpha, \beta} \int_x^\infty \frac{t\, |q(t) - q_0(t)|}{1 + |\lambda| t}\, dt\right] \leqslant C^{(1)}_{\alpha, \beta}$$

или

$$|E(x, \lambda)| \leqslant C^{(1)}_{\alpha, \beta} \begin{cases} (1 + |\lambda| x)^\alpha e^{-x \operatorname{Im} \lambda}, & 0 < x \leqslant 1, \\ (1 + |\lambda|^{\alpha - \beta} (1 + |\lambda| x)^\beta e^{-x \operatorname{Im} \lambda}, & x \geqslant 1. \end{cases} \tag{19}$$

Заметим, что имеют место равенства

$$E(\lambda) = (2\alpha + 1) E(0, \lambda);$$

$$(2\alpha + 1) E_0(0, \lambda) = (2\alpha + 1) E_0(0, \lambda) = 1.$$

Из интегрального уравнения (17) следует, что функция $E(x, \lambda)$ является при каждом $x \geqslant 0$ аналитической функцией по λ при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и непрерывной по совокупности переменных x и λ при $x \geqslant 0$, $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$.

В частности, при $x=0$ имеем равенство

$$E(\lambda)=1+\int_0^\infty G_0(t, \lambda)h_0^2(t)[q(t)-q_0(t)]E(t, \lambda)\,dt,$$

из которого вытекает неравенство

$$|E(\lambda)-1|\leqslant C_{\alpha, \beta}\int_0^\infty \frac{t\,|q(t)-q_0(t)|}{1+|\lambda|t}\,dt,$$

а значит, и равенство (9).

Из интегрального уравнения (17) при $\lambda=0$ и $x=0$ следует, что возможны два случая: $E(0)\neq 0$, $E(0)=0$. Установим в последнем случае поведение функции $E(\lambda)$ при $\lambda\to 0$ по любому лучу из верхней полуплоскости.

Функция $h_0(x)E(x, 0)$ удовлетворяет уравнению (1) при $\lambda=0$ и ведет себя при $x\to\infty$ как $x^{-\beta}$. Так как

$$\lim_{x\to 0}E(x, 0)=E(0, 0)=\lim_{\lambda\to 0}E(0, \lambda),$$

то в силу одинакового поведения при $x\to 0$ функции $E(x, 0)$ и $G(x, 0)$ пропорциональны:

$$E(x, 0)=A_{\alpha, \beta}G(x, 0).$$

Заметим, что $g(x, 0)\in L_2(0, \infty)$ при $\beta>\frac{1}{2}$, так как при $E(0)=0$ для всех $\beta>-\frac{1}{2}$ справедлива асимптотика

$$g(x, 0)=B_{\alpha, \beta}x^{-\beta}+0(x^{-\beta}),\quad x\to\infty. \tag{20}$$

Обратно, если есть асимптотика (20), то $E(0)=0$. Функции $E(x, \lambda)$ и $G(x, \lambda)$ удовлетворяют уравнениям

$$-E''-2\frac{h_0'}{h_0}E'+q(x)E=\lambda^2E,\ 0<x<\infty, \tag{21}$$

$$-G''-2\frac{h_0'}{h_0}G'+q(x)G=0,\quad 0<x<\infty. \tag{21'}$$

Положим

$$w(x, \lambda)=E'G-EG';$$

тогда, вычитая из умноженного на $G(x, 0)$ уравнения (21) уравнение (21'), умноженное на $E(x, \lambda)$, придем к такому уравнению для $w(x, \lambda)$:

$$-w'-2\frac{h_0'}{h_0}w=\lambda^2EG,\quad 0<x<\infty.$$

Решая это уравнение, находим

$$h_0^2(x)w(x, \lambda)-h_0^2(b)w(b, \lambda)=$$
$$=\lambda^2\int_x^b h_0^2(t)E(t, \lambda)G(t, 0)\,dt,\quad 0<x<b. \tag{22}$$

Нетрудно доказать справедливость следующих асимптотик:

$$G(x, 0) = \begin{cases} x^{2\alpha+1}[1+o(1)], & x \to 0, \\ B_{\alpha,\beta}[1+o(1)], & x \to \infty; \end{cases}$$

$$\frac{dG(x, 0)}{dx} = \begin{cases} (2\alpha+1)x^{2\alpha}[1+o(1)], & x \to 0, \\ 0\left(\frac{1}{x}\right), & x \to \infty; \end{cases} \tag{23}$$

$$E(x, \lambda) = \begin{cases} E(0, \lambda)[1+o(1)], & x \to 0, \\ \frac{\alpha+\beta+1}{(2\alpha+1)l_0(\lambda)} x^\beta h_\beta^{(1)}(\lambda x) + o(x^{-1+\beta}), & x \to \infty; \end{cases}$$

$$\frac{dE(x, \lambda)}{dx} = \begin{cases} o\left(\frac{1}{x}\right), & x \to 0, \\ \frac{\alpha+\beta+1}{(2\alpha+1)l_0(\lambda)}\left[x^\beta h_\beta^{(1)}(\lambda x)\right]'_x + o(x^{-2+\beta}), & x \to \infty. \end{cases}$$

Заметим, что вторые члены этих асимптотик имеют указанный порядок равномерно относительно λ ($\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, $|\lambda| \leqslant \mathrm{const}$).

Из асимптотики (23) следует

$$\lim_{x\to 0} h_0^2(x)\, w(x, \lambda) = -E(\lambda).$$

Положив $b = |\lambda|^{-1}$ ($|\lambda| < 1$) и переходя к пределу при $x \to 0$, из равенства (22) получим

$$E(\lambda) = -h_0^2\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) w\left(\frac{1}{|\lambda|}, \lambda\right) -$$

$$-\lambda^2 \int_0^{|\lambda|^{-1}} h_0^2(t)\, E(t, \lambda)\, G(t, 0)\, dt = i_1(\lambda) + i_2(\lambda). \tag{24}$$

Из асимптотики (23) следует

$$i_1(\lambda) = -h_0^2\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) w\left(\frac{1}{|\lambda|}, \lambda\right) = O(|\lambda|^{2\beta+1}), \quad 2\beta+1 > 0.$$

В силу оценки

$$|E(t, \lambda)| \leqslant \mathrm{const}, \quad 0 < t < \frac{1}{|\lambda|},$$

получаемой из неравенства (19), в равенстве (24), деленном на $-\lambda^2$, при $\beta > \frac{1}{2}$ существует предел

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{E(\lambda)}{(-i\lambda)^2} = \lim_{\lambda\to 0}\left[O(\lambda^{2\beta-1}) + \int_0^{|\lambda|^{-1}} h_0^2(t)\, E(t, \lambda)\, G(t, 0)\, dt\right] =$$

$$= A_{\alpha,\beta} \int_0^\infty g^2(t, 0)\, dt.$$

Пусть теперь $\beta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. При помощи асимптотики (23) нетрудно установить, что

$$\lim_{|\lambda|\to 0} \frac{i_1(\lambda)}{(-i\lambda)^{2\beta+1}} = B_{\alpha,\beta} \frac{(2\alpha+1)(2\beta+1)a_\beta}{(\alpha+\beta+1)^2} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\beta} h^{(1)}_{\beta-1}(e^{i\theta})$$

равномерно по $\theta = \arg\lambda$, меняющемуся в сегменте $[0, \pi]$. При этом мы воспользовались формулой

$$\frac{d}{dz}\left[z^\beta h^{(1)}_\beta(z)\right] = iz^\beta h^{(1)}_{\beta-1}(z),$$

известной в теории функции Бесселя. Из равенств (23) вытекает, что

$$\frac{i_2(\lambda)}{(-i\lambda)^{2\beta+1}} = \frac{(-i\lambda)^{1-2\beta}}{l_0(\lambda)} \int\limits_0^{|\lambda|^{-1}} h_0^2(t)\, E(t, \lambda)\, G(t, 0)\, dt =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^{1-\beta}}{(-i\lambda)^\beta l_0(\lambda)} \left[\int\limits_0^1 (\cdot)\, dt + \int\limits_1^{|\lambda|^{-1}} (\cdot)\, dt\right] = O_1[\lambda^{1-\lambda} E(0, \lambda)] +$$

$$+ \frac{2\alpha+1}{\alpha+\beta+1} \frac{(-i\lambda)^{1-\beta}}{(-i\lambda)^\beta l_0(\lambda)} B_{\alpha,\beta} \int\limits_0^{|\lambda|^{-1}} t^{-\beta} h^{(1)}_\beta(\lambda t)\, dt + O_2(\lambda), \quad \lambda \to 0.$$

Используя формулу

$$z^{-\alpha} h^{(1)}_\alpha(z) = -i\left[z^{-\alpha} h^{(1)}_{\alpha-1}(z)\right]',$$

вычислим интеграл в последнем равенстве:

$$\lim_{\lambda\to 0} (-i\lambda)^{1-\beta} \int\limits_0^{|\lambda|^{-1}} t^{-\beta} h^{(1)}_\beta(\lambda t)\, dt = e^{-\frac{i\pi(1-\beta)}{2}} \lim_{\lambda\to 0} \int\limits_\lambda^{e^{i\theta}} z^{-\beta} h^{(1)}_\beta(z)\, dz =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}{2^\beta \sqrt{\pi}} - e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\beta} h^{(1)}_{\beta-1}(e^{i\theta}).$$

Учитывая (13) и последнее равенство, будем иметь

$$\lim_{|\lambda|\to 0} \frac{i_2(\lambda)}{(-i\lambda)^{2\beta+1}} = \frac{(2\alpha+1)(2\beta+1)a_\beta}{(\alpha+\beta+1)^2} B_{\alpha,\beta} \times$$

$$\times \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}{2^\beta\sqrt{\pi}} - e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\beta} h^{(1)}_{\beta-1}(e^{i\theta})\right]$$

равномерно по $\arg\lambda$ из $[0, \pi]$.

Итак, получено равенство

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{E(\lambda)}{(-i\lambda)^{2\beta+1}} = \frac{(2\alpha+1)(2\beta+1)a_\beta}{(\alpha+\beta+1)^2} B_{\alpha,\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}{2^\beta\sqrt{\pi}}, \quad |\beta| < \frac{1}{2}.$$

Наконец, рассмотрим случай $\beta = \frac{1}{2}$. Имеем

$$\frac{i_1(\lambda)}{\lambda^2 \ln \lambda} = O\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right), \quad \lambda \to 0.$$

Снова пользуясь асимптотикой (23), получим

$$\begin{aligned} \frac{i_2(\lambda)}{-\lambda^2 \ln \lambda} &= \frac{\sqrt{-i\lambda}}{\sqrt{-i\lambda}\, l_0(\lambda)\, \ln \lambda} \int_0^{|\lambda|^{-1}} l(t, \lambda)\, g(t, \lambda)\, dt = \\ &= \frac{B_{\alpha, \frac{1}{2}} \sqrt{-i\lambda}}{\sqrt{-i\lambda}\, l_0(\lambda) \ln \lambda} \int_1^{|\lambda|^{-1}} t^{-\frac{1}{2}} h^{(1)}_{\frac{1}{2}}(\lambda t)\, dt + o(1), \quad \lambda \to 0. \end{aligned} \tag{25}$$

При помощи асимптотики

$$h^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z) = e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} + o(\sqrt{z}), \; z \to 0$$

интеграл в равенстве (25) нетрудно оценить:

$$\sqrt{-i\lambda} \int_1^{|\lambda|^{-1}} t^{-\frac{1}{2}} h^{(1)}_{\frac{1}{2}}(\lambda t)\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ln \frac{e^{i\theta}}{\lambda} + O(1), \; \lambda \to 0.$$

Пользуясь этой оценкой и замечая, что

$$\lim_{\lambda \to 0} \sqrt{-i\lambda}\, l_0(\lambda) = \frac{\alpha + \frac{3}{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \; \beta = \frac{1}{2},$$

из равенства (25) получим

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{i_2(\lambda)}{\lambda^2 \ln \lambda} = \frac{2B_{\alpha, \frac{1}{2}}}{\alpha + \frac{3}{2}}.$$

Оставшиеся утверждения легко получить обычным путем [2, с. 133]. Лемма доказана.

Автор выражает благодарность проф. В. А. Марченко за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., Физматгиз, 1963. 214 с.
2. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев, «Наукова думка», 1972. 150 с.
3. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М., «Мир», 1969. 320 с.