УДК 517.942

Г. П. Сердюк

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В 1953 г. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов доказали теорему единственности решения задачи Коши для любой системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами [1] (см.

также [2]). Результат зависел от так называемого приведенного порядка p_0 системы. Согласно этой теореме, в случае $p_0 < 1$ единственность решения задачи Коши имеет место в классе всех функций, а при $p_0 = 1$ — в классе функций, растущих при $|x| \to \infty$ не быстрее $\exp\{|x|^\alpha\}$, с каким-либо $\alpha > 0$.

Целью настоящей работы является обобщение этого результата на случай уравнений и систем с переменными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Мы доказываем, что сохраняется тот же класс единственности решения задачи Коши для уравнений с коэффициентами произвольного роста на бесконечности в случае $p_0 < 1$, а в случае $p_0 = 1$ — для уравнений с коэффициентами, имеющими степенной порядок роста на бесконечности.

Исследование проводится развитым И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым операторным методом, с привлечением теории пространств типа S, на основе изученных нами дифференциальных операторов бесконечного порядка с переменными коэффициентами в таких пространствах [3].

1°. Большие латинские буквы и начальные буквы греческого алфавита (α, $A, \ldots, \lambda$, Λ) означают точки R^n, т. е. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; остальные греческие буквы — точки пространства R^k; малые латинские буквы — точки R^1, кроме $x \in R^n$ и $z \in C^k$. Все случаи отступления от этого правила специально оговариваются.

Используются символы следующего вида: $\bar{a} = (a, a, \ldots, a) \in R^n$ (или R^k, что будет ясно из текста); $\alpha^\beta = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\beta_i}$; $a^\beta = \bar{a}^\beta$; $\alpha \cdot \beta = (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n)$; $a \cdot \beta = \bar{a} \cdot \beta$; $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$; $\alpha < \beta$ означает $\alpha_i < \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (аналогично $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha \geqslant \beta$); $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$; $\frac{1}{\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$ при $\alpha > \bar{0}$. Если α мультииндекс, то $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$; $\alpha! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!$ Далее, $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|z\| = \sum_{i=1}^{k} |z_i|$, $\alpha \||x|\|^\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |x_i|^{\beta_i}$, $a \||x|\|^\beta = \bar{a} \||x|\|^\beta$.

Символами $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ обозначаются элементы некоторой некоммутативной алгебры над полем комплексных чисел C^1.

Наконец,

$$\partial^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \ldots \partial x_n^{\lambda_n}}, \quad \partial_t^m = \frac{\partial^m}{\partial t^m}.$$

2°. Пусть элементы $P_{ij}(\Omega)$ квадратной матрицы $P(\Omega)$ — полиномы от $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ с коэффициентами из C^1. Обозначим $P(z)$ матрицу, элементы $P_{ij}(z)$ которой получены из $P_{ij}(\Omega)$ заменой коэффициентов мажорирующими их модули числами, а также заменой Ω_m на z_m, $m = 1, 2, \ldots, k$ (и, естественно, приведением подобных членов). После этого матрицу $P(\Omega)$ будем называть *подчиненной* матрице $P(z)$ и обозначать $P(\Omega) \ll P(z)$.

При фиксированных t_0 и t обозначим символом $\widehat{\exp}\{(t_0-t)P(\Omega)\}$ матрицу $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t_0-t)^i}{i!} P^i_\wedge(\Omega)$, где $P^0_\wedge = E$ и $P^i_\wedge(\Omega) = P(\Omega)P^{i-1}_\wedge(\Omega)$, $i \geqslant 1$.

Пусть $P(\Omega) \ll P(z)$. Если как обычно $\exp\{(t_0-t)P(z)\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t_0-t)^i}{i!} P^i(z)$, то, как известно, элементы последней матрицы — целые аналитические функции, и легко видеть, что соответствующие элементы матрицы $\widehat{\exp}\{(t_0-t)P(\Omega)\}$ — подчиненные им разложения (см. [3]).

Под нормой $\|\exp\{(t_0-t)P(z)\}\|$ матрицы $\exp\{(t_0-t)P(z)\}$ будем понимать норму соответствующего линейного оператора в евклидовом пространстве.

3°. Пусть $(m \times m)$ — матрица $P(\Omega) \ll P(z)$. Рассматривается задача Коши

$$\partial_t \overline{U}(x, t) = P(L^*)\overline{U}(x, t) \quad (S),$$

$$\overline{U}(x, 0) = 0, \ t \in [0, t_1], \quad (s)$$

где матрица $P(L^*)$ получена из $P(\Omega)$ заменой Ω_j оператором

$$L_j^* = \sum_{|\lambda|=0}^{m_j} a_{\lambda j}(x)\partial^\lambda, \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{1}$$

с комплекснозначными коэффициентами $a_{\lambda j}(x) \in C^\infty(R^n)$. Обозначим $\mu = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$.

Сейчас докажем две теоремы «условного типа». Все утверждения этой работы о классах единственности решения задачи Коши будут получены из этих теорем как следствия.

Теорема 1. *Пусть существует число $t_2 > 0$ такое, что при $0 \leqslant t_0 - t < t_2$ имеет место с некоторыми $a > 0$, $c > 0$, $r > 0$ и $\omega > \overline{0}$ оценка*

$$\|\exp\{(t_0-t)P(z)\}\| \leqslant c(1+\|z\|)^r \exp\left\{a(t_0-t)\|\|z\|\|^{\frac{1}{\omega}}\right\}. \tag{2}$$

Предположим также, что порядки операторов (1) *удовлетворяют условию $\mu \leqslant \omega$, а коэффициенты — оценкам*

$$|\partial^\rho a_{\lambda j}(x)| \leqslant dC^\rho!\,(1+\|x\|)^{h_{\lambda j}}, \ |\rho| \geqslant 0 \tag{3}$$

с $h_{\lambda j} = 0$ при тех λ и j (если они существуют), для которых выполняются равенства $|\lambda| = m_j = \omega_j$ и с произвольными неотрицательными остальными $h_{\lambda j}$.

Тогда классом единственности решения задачи (S) — (s) является совокупность функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству $|f(x)| \leqslant b \exp\{\gamma |||x|||^{\beta}\}$ с любыми фиксированными b, β и γ.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\partial_t \overline{V}(x, t) = -P^*(L)\overline{V}(x, t), \tag{S^*}$$

$$\overline{V}(x, t_0) = \overline{\varphi}(x), \ t_0 \in [0, t_1], \tag{s^*}$$

где $P^*(L)$ — оператор, сопряженный к оператору, заданному матрицей $P(L^*)$. Пусть Φ и Φ_1 — линейные топологические пространства, а E — линейное нормированное пространство. Пусть, кроме того, $\Phi \subset \Phi_1 \subset E$ и Φ плотно в E. Как известно [2], решение задачи (S) — (s), принадлежащее при $t \in [0, t_1]$ пространству E', тождественно равно нулю, если для любой начальной функции $\overline{\varphi}(x) \in \Phi$ задача (S^*) — (s^*) имеет на $t \in [0, t_0]$ решение $Q^t_{t_0}\overline{\varphi}(x) \in \Phi_1$, где $Q^t_{t_0} : \Phi \to \Phi_1$, т. е $Q^t_{t_0}$ — линейный непрерывный оператор из Φ в Φ_1.

Оператор $P^*(L)$ определяется матрицей, получающейся из $P(L^*) = (P_{ij}(L^*))^m_{i,j=1}$ заменой операторов $P_{ij}(L^*)$ операторами $P^*_{ij}(L)$, сопряженными к $P_{ji}(L^*)$. Оператор $P^*_{ij}(L)$ получается из $P_{ji}(L^*)$ (многочлена с коэффициентами из C^1 от операторов $L^*_1, L^*_2, \ldots, L^*_k$, для которых формально-сопряженными являются операторы $L_1, L_2, \ldots, L_k$) заменой всех коэффициентов комплексно-сопряженными числами, перестановкой входящих в каждое слагаемое операторов в обратном порядке и заменой и формально-сопряженными операторами.

Определим зависимость между коэффициентами оператора L и формально-сопряженного ему оператора $L_j = \sum\limits_{|\rho|=0}^{m_j} b_{\rho j}(x)\partial^{\rho}$.

$$L_j\varphi(x) = \sum_{|\lambda|=0}^{m_j} (-1)^{\lambda}\partial^{\lambda}\left[\overline{a}_{\lambda j}(x)\varphi(x)\right] =$$

$$= \sum_{|\lambda|=0}^{m_j} (-1)^{\lambda} \sum_{\rho=\overline{0}}^{\lambda} C^{\rho}_{\lambda}[\partial^{\rho}\varphi(x)][\partial^{\lambda-\rho}\overline{a}_{\lambda j}(x)] =$$

$$= \sum_{|\rho|=0}^{m_j}\Bigl[\sum_{\substack{\lambda:\lambda\geqslant\rho,\\ |\lambda|\leqslant m_j}} C^{\rho}_{\lambda}(-1)^{\lambda}\partial^{\lambda-\rho}\overline{a}_{\lambda j}(x)\Bigr]\partial^{\rho}\varphi(x),$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Следовательно

$$b_{\rho j}(x) = \sum_{\substack{\lambda:\lambda\geqslant\rho,\\ |\lambda|\leqslant m_j}} C^{\rho}_{\lambda}(-1)^{\lambda}\partial^{\lambda-\rho}\overline{a}_{\lambda j}(x),$$

откуда, используя (3), легко показать, что коэффициенты операторов L_j удовлетворяют оценкам такого же вида.

Подставляя в $P^*(L)\,\Omega_j$ вместо оператора L_j, $j=1, 2, \ldots, k$, получим матрицу $P^*(\Omega)$, которая подчинена матрице $P'(z)$ (штрих означает транспонирование). Поэтому, как следует из 2°, элементы матрицы $\widehat{\exp}\{(t_0-t)\,P^*(\Omega)\}$ являются разложениями, подчиненными соответствующим элементам $\exp\{(t_0-t)\,P'(z)\}$. Но элементами матрицы $\exp\{(t_0-t)\,P'(z)\}$ являются целые функции порядка роста $\leqslant \frac{1}{\omega}$ и типа $<\overline{at_2}$, поскольку транспонированная матрица удовлетворяет (2). По теореме 1 [3], существует определяемое лишь матрицей $P^*(L)$, число $t_3>0$ $(t_3\leqslant t_2)$ такое, что при $0\leqslant t_0-t<t_3$ $\widehat{\exp}\{(t_0-t)\,P^*(L)\}:\overline{S}_{\alpha,\,A}^{1,\,B}=\Phi\to\overline{S}_{\alpha,\,2A}^{1,\,2D}=\Phi_1$, где вектор $\alpha>\bar{0}$ достаточно мал, а $\overline{S}_{\alpha,\,A}^{1,\,B}$ означает счетно-нормированное пространство вектор-функций $\bar{\varphi}(x)$ таких, что $\varphi_i(x)\in S_{\alpha,\,A}^{1,\,B}$, $i=1, 2, \ldots, m$, с нормами

$$\|\bar{\varphi}\|_{\varepsilon,\,\delta}=\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i\|_{\varepsilon,\,\delta}\quad (\text{см. [4]}).$$

Так же, как и в [2], доказывается, что $\widehat{\exp}\{(t_0-t)\,P^*(L)\}=Q_{t_0}^{t}$ или, другими словами, что функция $\overline{\Psi}(x,\ t)=\widehat{\exp}\{(t_0-t)\,P^*(L)\}\,\bar{\varphi}(x)$ является решением задачи $(S^*)-(s^*)$, т. е.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\Psi}(x,\ t+\Delta t)-\overline{\Psi}(x,\ t)}{\Delta t}=-P^*(L)\,\overline{\Psi}(x,\ t),$$

$$\lim_{t\to t_0}\overline{\Psi}(x,\ t)=\bar{\varphi}(x),$$

где сходимость понимается по топологии пространства Φ_1.

Пусть E — линейное нормированное пространство вектор-функций $\bar{\varphi}(x)$, компоненты которых измеримы, с такой нормой:

$$\|\bar{\varphi}\|_E=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{(2A)'}{2}\,|||x|||^{\frac{1}{\alpha}}\right\}\left(\sum_{i=1}^{m}|\varphi_i|\right)dx.$$

Тогда $\Phi_1\subset E$ и Φ плотно в E [4]. Следовательно, решение задачи $(S)-(s)$ может быть лишь тождественным нулем, если оно при каждом $t\in[0,\ t_3)$ принадлежит классу функций $f(x)$, изоморфному пространству функционалов над E, т. е. удовлетворяющих неравенству $|f(x)|\leqslant c\exp\left\{\frac{(2A')}{2}\,|||x|||^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$. Так как число t_3 определяется лишь матрицей системы (S) и не зависит от точки, в которой задается начальное условие, то конечным числом шагов распространим этот результат на промежуток $[0,\ t_1]$. Поскольку же компоненты α могут быть сколь угодно малыми, то тем самым теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть существует число* $t_2 > 0$ *такое, что при* $0 \leqslant t_0 - t < t_2$ *имеет место с некоторыми* $a > 0$, $c > 0$, $r > 0$ *и* $\omega > \bar{0}$ *оценка* (2).

Предположим также, что коэффициенты операторов (1) удовлетворяют при $\| x \| \leqslant d$ *оценкам*

$$|\partial^\rho a_{\lambda j}(x)| \leqslant f_{\lambda j}(d) C^\rho \rho^{\gamma\rho}, \ |\rho| \geqslant 0 \tag{4}$$

с некоторыми положительными, локально ограниченными на $[0, +\infty)$ *функциями* $f_{\lambda j}(d)$.

Пусть, кроме того, существует такой вектор $\beta > \bar{1}$, *что выполняются условия* 1) $\gamma \leqslant \beta$;

2) $(\beta, \lambda) \leqslant \omega_j$, $\lambda, j : a_{\lambda j}(x) \not\equiv 0$;

3) $f_{\lambda j}(d) \equiv \text{const}$, $\lambda, j : (\beta, \lambda) = \omega_j$.

Тогда задача $(S)-(s)$ *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. При этом используется замечание к теореме 2 [3], т. е. в качестве Φ и Φ_1 выбираются соответственно пространства $\bar{S}_0^{\beta, B}$ и $\bar{S}_0^{\beta, 2D}$ (которые достаточно богаты по запасу функций, в отличие от пространств $\bar{S}_{0, A}^{\beta, B}$ и $\bar{S}_{0, A}^{\beta, 2D}$ [4]).

В качестве E выбирается линейное нормированное пространство функций, в котором норма задается равенством $\| \bar{\varphi} \|_E = \int_{-\infty}^{\infty} M(x) \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(x)| \, dx$, где $M(x)$ — произвольная измеримая функция.

4°. Для извлечения эффективных следствий из теорем 1 и 2 необходимо получить оценку типа (2). Мы будем получать ее с помощью следующих фактов. Пусть $\lambda_s(z)$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$ — корни характеристического уравнения $\det [P(z) - \lambda E] = 0$, $\lambda \in C^1$, матрицы $P(z)$, элементы которой — полиномы с коэффициентами из C^1 от z, и пусть $\Lambda(z) = \max_{1 \leqslant s \leqslant m} \operatorname{Re} \lambda_s(z) \leqslant c_a ||| z |||^a$. Точным степенным порядком роста функции $\Lambda(z)$ называется число $p_0 = \inf a$. Известно (см., например, [2, § 6], что при $t_0 \geqslant t$ имеет место с некоторыми $c > 0$ и $p > 0$ оценка

$$\| \exp \{(t_0 - t) P(z)\} \| \leqslant c (1 + \| z \|^p \exp \{(t_0 - t) \Lambda(z)\}. \tag{5}$$

Следствие 1. *Пусть* $P(\Omega)$ *и* $P(z)$ — *матрицы из задачи* $(S)-(s)$ *и пусть для* $P(z)$ $0 < p_0 \leqslant 1$. *Предположим, что операторы (1) удовлетворяют с* $\omega = \overline{p_0^{-1}}$ *таким же условиям, как и в теореме 1. Тогда задача* $(S)-(s)$ *имеет такой же класс единственности решения, как и в этой теореме.*

Доказательство. Как показано в § 6 [2], имеет место оценка $\Lambda(z) \leqslant c_1 (\overline{1 + \| z \|^{p_0}}$. Подставив ее в (5), получим неравенство (2) с $\omega = \overline{p_0^{-1}}$. Применение теоремы 1 завершает доказательство.

Аналогичное применение теоремы 2 доказывает

Следствие 2. *Пусть $P(\Omega)$ и $P(z)$ — матрицы из задачи $(S)-(s)$ и пусть для $P(z)$ $0<p_0<1$. Предположим, что операторы (1) удовлетворяют таким же условиям, как и в теореме 2, но с $\omega=\overline{p_0^{-1}}$. Тогда задача $(S)-(s)$ имеет лишь тривиальное решение.*

В качестве примера рассмотрим задачу $(S)-(s)$, у которой $L_1^*=e^{iax}\partial+(1+x^2)^b$, $L_2^*=e^{-x^2}\partial+(1+x^2)^C$, $x\in R^1$, а

$$P(\Omega)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_1(\Omega) & 0 & a_2(\Omega) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_1(\Omega)$, $a_2(\Omega)$ — полиномы второй степени (по совокупности переменных) от Ω_1 и Ω_2 с положительными коэффициентами. Очевидно, $P(\Omega)\ll P(z)$, где матрица $P(z)$ получена из $P(\Omega)$ заменой Ω_j на z_j, $j=1, 2$. Поскольку $\det[P(z)-\lambda E]=-\lambda^3+\lambda[a_1(z)+a_2(z)]$, то, согласно [5], $p_0=1$. Нетрудно проверить, что коэффициенты операторов L_1^* и L_2^* удовлетворяют всем условиям следствия 1.

Заменив в этом примере $a_1(\Omega)$ и $a_2(\Omega)$ полиномами первого порядка, получим $p_0=\frac{1}{2}$. Легко проверить, что операторы $L_1^*=\exp(x^m)\partial+\exp(e^x)$ и $L_2^*=\exp(x^n)\partial+\exp[\exp(x^p)]$, где m, n и p — натуральные числа, удовлетворяют следствию 2.

5°. Пусть L_j^*, $j=1, 2, \ldots, k$ — операторы (1). Рассмотрим задачу

$$\partial_t^k U(x, t)=\left(\sum_{j=1}^{k} L_j^*\partial_t^{j-1}\right)U(x, t), \tag{Q}$$

$$\partial_t^i U(x, 0)=0,\ i=0, 1, \ldots, k-1,\ t\in[0, t_1]. \tag{q}$$

Следствие 3. *Предположим, что операторы (1) удовлетворяют таким же условиям, как и в теореме 1, но с вектором ω, у которого компонента $\omega_j=k+1-j$ $(j=1, 2, \ldots, k)$. Тогда классом единственности решения задачи $(Q)-(q)$ является совокупность функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству $|f(x)|\leqslant b\exp\{\gamma|||x|||^\beta\}$ с любыми фиксированными b, β и γ.*

Доказательство. Задача $(Q)-(q)$ эквивалентна задаче $(S)-(s)$, если $\overline{U}(x, t)=(U(x, t), \partial_t U(x, t), \ldots, \partial_t^{k-1}U(x, t))$ и $(k\times k)$ — матрицы $P(L^*)$ над главной диагональю стоят единицы, элемент последней строки P_{kj} равен L_j^*, $j=1, 2, \ldots, k$, а остальные элементы нули.

Обозначим $P(\Omega)$ $[P(z)]$ матрицу, полученную из $P(L^*)$ заменой L_j^* на Ω_j, $[z_j]$, $j=1, 2, \ldots, k$. Очевидно, $P(\Omega)\ll P(z)$.

Поскольку $\det[P(z)-\lambda E]=(-1)^{k+1}(z_1+\lambda z_2+\ldots+\lambda^{k-1}z_k-\lambda^k)$, то при $\lambda\neq 0$, характеристическое уравнение для $P(z)$

имеет вид $\sum_{i=1}^{k} z_i\lambda^{-(k+1-i)} = 1$. Поэтому существует такое i, что $|z_i\lambda^{-(k+1-i)}| \geqslant k^{-1}$, т. е. $|\lambda| \leqslant k|z_i|^{1/k+1-i}$, а значит при любом z $\Lambda(z) \leqslant k\sum_{j=1}^{k} |z_j|^{1/k+1-j}$. Отсюда и из (5) следует оценка (2) с вектором ω, у которого компонента $\omega_j = k+1-j$, $j=1, 2, \ldots, k$. Применяя теорему 1, получаем требуемое.

Аналогичное применение теоремы 2 доказывает

Следствие 4. *Пусть операторы (1) удовлетворяют таким же условиям, как и в теореме 2, но с вектором* ω, *у которого компонента* $\omega^j = k+1-j$, $j=1, 2, \ldots, k$. *Тогда единственным решением задачи* $(Q)-(q)$ *является функция* $U(x, t) \equiv 0$.

Замечание. Пусть в задаче $(Q)-(q)$ $x \in R^1$ и $L_j^* \equiv 0$, $j = 2, 3, \ldots, k$. Тогда последние два следствия хорошо согласуются с теоремами 5 и 6 из [6], но не содержат эти теоремы и не содержатся в них.

Автор благодарен проф. В. М. Борок за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Шилов. Г. Е. Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши.— УМН, 1953, т. 8, № 6, с. 3—54.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции, вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958. 247 с.
3. Сердюк Г. П. Функции от дифференциальных операторов с переменными коэффициентами в пространствах типа S. В сб.: «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 20, Харьков, 1974, с. 14—19.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции, вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М., Физматгиз, 1958. 306 с.
5. Борок В. М. Приведение линейной системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к системе нормального типа.— ДАН СССР, 1957, т. 115, № 1, с. 13—16.
6. Житомирский Я. И. Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1967, т. 31, вып. 4, с. 763—782.