УДК 517.43

Рябушко Т. И.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ ПО ДВУМ СПЕКТРАМ

Согласно теореме Борга [1], уравнение Штурма — Лиувилля на конечном интервале однозначно восстанавливается по спектрам двух краевых задач с одним и тем же краевым условием на одном из концов рассматриваемого интервала.

В предыдущей работе [2] мы оценили погрешность, с которой может быть восстановлено такое уравнение, если известны только N первых собственных значений рассматриваемых краевых задач.

В настоящей работе будет рассмотрен вопрос о том, как влияет априорное предположение о гладкости потенциала восстанавливаемого уравнения Штурма — Лиувилля на эту погрешность.

Будем говорить, что оператор Штурма—Лиувилля

$$L[y] = -y'' + q(x)y \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$$

принадлежит множеству $V_r(A)$, если функция $q(x)$ (потенциал) вещественна, r раз непрерывно дифференцируема и

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant \pi} \sum_{j=0}^{r} |q^{(j)}(x)| \leqslant A.$$

Рассмотрим на отрезке $[0,\pi]$ две краевые задачи Штурма—Лиувилля, определяемые дифференциальными операциями

$$L_j[y] = -y'' + q_j(x)y \quad (j = 1, 2),$$

принадлежащими множеству $V_r(A)$, и краевыми условиями

$$y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (K),$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \quad (\Lambda).$$

Пусть $\{\lambda_{j,m}^2\}$ и $\{\mu_{j,m}^2\}$ — собственные значения этих краевых задач, которые для простоты будем считать неотрицательными.

Целью настоящей заметки является доказательство следующих двух теорем

Теорема 1. *Если операторы L_1, L_2 принадлежат множеству $V_r(A)$ и первые $N+1$ собственных значений краевых задач (K) и (Λ) этих операторов совпадают:*

$$\lambda_{1,m}^2 = \lambda_{2,m}^2;$$

$$\mu_{1,m}^2 = \mu_{2,m}^2 \tag{1}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, N+1),$$

то при достаточно больших N

$$\left| \int_0^x [q_1(t) - q_2(t)]\, dt \right| < \frac{CD_N}{N^{r-1}},$$

где константа C зависит только от A, а

$$D_N = \frac{2^{r-1}}{\left(1 - \frac{r-1}{N}\right)^r \cdot (r-2)!} + \frac{4}{N^{r-2}}.$$

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то при $\lambda^2 < \left(\frac{N}{2}\right)^2$ и достаточно больших N*

$$|\omega_1(\lambda, x) - \omega_2(\lambda, x)|^2 < \frac{CD_N}{N^r} \left\{ 1 + \frac{1}{N\left(1 - \frac{4\lambda^2}{N^2}\right)} \right\},$$

где $\omega_j(\lambda, x)$ — решение уравнения

$$-y'' + q_j(x)y = \lambda^2 y$$

$$(j = 1, 2),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\omega_j(\lambda, 0) = 1,$$

$$\omega_j'(\lambda, 0) = 0.$$

Докажем сначала несколько предварительных лемм. При этом все встречающиеся константы, которые зависят только от A, будем обозначать одной и той же буквой C.

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то при* $n > N$

$$|\mu_{1,n+1} - \mu_{2,n+1}| < \frac{CB_N}{nN^r}, \tag{2}$$

$$|\lambda_{1,n+1} - \lambda_{2,n+1}| < \frac{CB_N}{nN^r}, \tag{3}$$

где

$$B_N = \frac{2}{(r-1)!\left(1 - \frac{r-1}{N}\right)^r} + \frac{2}{N^{r-1}}. \tag{4}$$

Доказательство. Как известно [3], имеют место следующие асимтотические формулы:

$$\mu_{j,n+1} = n + \frac{c_{j,1}}{n} + \ldots + \frac{c_{j,r}}{n^{2r-1}} + \frac{\gamma_{j,n}}{n^{2r}}, \tag{5}$$

$$\lambda_{j,n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{c_{j,1}}{n+\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{c_{j,r}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2r-1}} + \frac{\gamma_{j,n}'}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2r}}, \tag{6}$$

где

$$|\gamma_{j,n}| < C, \quad |\gamma_{j,n}'| < C.$$

Очевидно, что

$$|\mu_{1,n+1} - \mu_{2,n+1}| = \frac{\varphi(n)}{n^{2r-1}} + \frac{\gamma_{1,n} - \gamma_{2,n}}{n^{2r}},$$

где

$$\varphi(n) = (c_{1,1} - c_{2,1})\, n^{2r-2} + (c_{1,2} - c_{2,2})\, n^{2r-4} + \ldots + (c_{1,r} - c_{2,r}).$$

Так как при $n = N, \ldots, N - r + 1$

$$\mu_{1,n+1} = \mu_{2,n+1},$$

то

$$\varphi(N) = \frac{\gamma_{2,N} - \gamma_{1,N}}{N},$$

. . . .

$$\varphi(N - r + 1) = \frac{\gamma_{2,N-r+1} - \gamma_{1,N-r+1}}{N - r + 1}.$$

Представляя многочлен $\varphi(x)$ через интерполяционную формулу Лагранжа

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\varphi(N-j)\,\omega_{N-j}(x)}{\omega_{N-j}(N-j)}, \tag{7}$$

где

$$\omega_{N-j}(x) = \frac{\prod\limits_{m=0}^{r-1}[x^2-(N-m)^2]}{x^2-(N-j)^2}, \tag{8}$$

находим, что при $|x|>N$

$$|\varphi(x)| \leqslant \max_{0<j<r-1} |\varphi(N-j)| \frac{x^{2(r-1)}}{(r-1)!\left(1-\frac{r-1}{N}\right)^{r-1} \cdot N^{r-1}}.$$

Так как

$$\max_{0<j<r-1} |\varphi(N-j)| \leqslant \frac{2\gamma}{N\left(1-\frac{r-1}{N}\right)},$$

где константа

$$\gamma = \max_{0<j<r-1} |\gamma_{2,\,N-j} - \gamma_{1,\,N-j}|$$

зависит только от A, то при $|x|>N$

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{2\gamma x^{2(r-1)}}{(r-1)!\left(1-\frac{r-1}{N}\right)^{r} N^{r}}.$$

Следовательно, при $n>N$

$$|\mu_{1,\,n+1} - \mu_{2,\,n+1}| < \frac{2\gamma}{(r-1)!\left(1-\frac{r-1}{N}\right)^{r} nN^{r}} +$$

$$+ \frac{|\gamma_{1,\,n+1} - \gamma_{2,\,n+1}|}{n^{2r}} < \frac{CB_N}{nN^r},$$

где

$$B_N = \frac{2}{(r-1)!\left(1-\frac{r-1}{N}\right)^{r}} + \frac{2}{N^{r-1}}.$$

Аналогично получается оценка (3).

Лемма доказана.

Напомним, что спектральной функцией краевой задачи Штурма—Лиувилля (K) называется функция

$$\rho(\mu) = \sum_{\lambda_k^2<\mu} \frac{1}{\alpha_k}, \tag{9}$$

где
$$\alpha_k = \int_0^\pi \omega^2(\lambda_k, x)\,dx, \tag{10}$$
а $\omega(\lambda, x)$ — решение уравнения
$$-\omega''(\lambda, x) + q(x)\,\omega(\lambda, x) = \lambda^2\omega(\lambda, x)$$
при начальных данных
$$\omega(\lambda, 0) = 1,$$
$$\omega'(\lambda, 0) = 0.$$

Лемма 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то при достаточно больших* N *для спектральных функций* $\rho_1(\mu)$ *и* $\rho_2(\mu)$ *двух краевых задач* K_1, K_2 *справедливо*
$$\underset{-\infty<\mu<(N+1)^2}{\mathrm{Var}}\{\rho_1(\mu) - \rho_2(\mu)\} < \rho_1\{(N+1)^2\}\cdot\frac{CB_N}{N^r}, \tag{11}$$
где B_N *определяется равенством* (4).

Доказательство. Из известных выражений для коэффициентов α_k через два спектра (1) получим
$$\max_{k\leqslant N+1}\left|1 - \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}}\right| = \max_{k\leqslant N+1}\left|1 - \prod_{n=N+2}^{\infty}\frac{\left(\mu_{1,n}^2 - \mu_{1,k}^2\right)\left(\lambda_{1,n}^2 - \mu_{1,k}^2\right)}{\left(\mu_{2,n}^2 - \mu_{2,k}^2\right)\left(\lambda_{2,n}^2 - \mu_{2,k}^2\right)}\right|. \tag{12}$$

Полагая
$$\Psi(\mu_k) = \prod_{n=N+2}^{\infty}\frac{\left(\mu_{1,n}^2 - \mu_{1,k}^2\right)\left(\lambda_{1,n}^2 - \mu_{1,k}^2\right)}{\left(\mu_{2,n}^2 - \mu_{2,k}^2\right)\left(\lambda_{2,n}^2 - \mu_{2,k}^2\right)},$$
будем иметь
$$\ln\Psi(\mu_k) = \sum_{n>N+2}\left\{\ln\left(1 - \frac{\mu_{2,n}^2 - \mu_{1,n}^2}{\mu_{2,n}^2 - \mu_{1,k}^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \ln\left(1 - \frac{\lambda_{2,n}^2 - \lambda_{1,n}^2}{\lambda_{2,n}^2 - \mu_{1,k}^2}\right)\right\}.$$

При $n > N+1$, $k \leqslant N+1$, согласно лемме 1 и оценкам (6), (9) из [2], имеем
$$\left|\frac{\lambda_{2,n}^2 - \lambda_{1,n}^2}{\lambda_{2,n}^2 - \mu_{1,k}^2}\right| < \frac{16CB_N}{7N^{r+1}},$$
если $N > 3\beta(\pi)$, где
$$\max_{j=1,2}\int_0^x |q_j(t)|\,dt \leqslant \beta(x).$$

Применяя те же оценки, получим при $n > N + 1$, $k \leqslant N + 1$, $N > 3\beta(\pi)$

$$\left| \frac{\mu_{2,n}^2 - \mu_{1,n}^2}{\mu_{2,n}^2 - \mu_{1,k}^2} \right| < \frac{2CB_N}{N^{r+1}}.$$

Поэтому

$$\ln \Psi(\mu_k) = \sum_{n \geqslant N+2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left(\frac{\mu_{2,n}^2 - \mu_{1,n}^2}{\mu_{2,n}^2 - \mu_{1,k}^2} \right)^p + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \cdot \left(\frac{\lambda_{2,n}^2 - \lambda_{1,n}^2}{\lambda_{2,n}^2 - \mu_{1,k}^2} \right)^p \right\},$$

если $N^{r+1} \geqslant \frac{16}{7} CB_N$.

Оценивая аналогично предыдущему слагаемые этих сумм, будем иметь при $n > N + 1$, $k \leqslant N + 1$, $N > 3\beta(\pi)$

$$\left| \frac{\lambda_{2,n}^2 - \lambda_{1,n}^2}{\lambda_{2,n}^2 - \mu_{1,k}^2} \right| < \frac{2CB_N \left(1 + \frac{1}{N}\right)^3}{(n-1)^2 N^{r-1}},$$

$$\left| \frac{\mu_{2,n}^2 - \mu_{1,n}^2}{\mu_{2,n}^2 - \mu_{1,k}^2} \right| < \frac{2CB_N \left(1 + \frac{1}{N}\right)^3}{(n-1)^2 N^{r-1}}. \tag{13}$$

Тогда

$$|\ln \Psi(\mu_k)| \leqslant 2 \sum_{n \geqslant N+2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left\{ \frac{2CB_N \left(1 + \frac{1}{N}\right)^3}{(n-1)^2 N^{r-1}} \right\}^p <$$

$$< \frac{8CB_N \left(1 + \frac{1}{N}\right)^3}{N^r},$$

если

$$N^{r+1} \geqslant 4CB_N \left(1 + \frac{1}{N}\right)^3.$$

Из полученной оценки и формулы (12) следует, что при достаточно больших N

$$\max_{k \leqslant N+1} \left| 1 - \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}} \right| < \frac{CB_N}{N^r}. \tag{14}$$

Согласно формуле (9),

$$\rho_1(\mu) - \rho_2(\mu) = \sum_{\lambda_k^2 < \mu} \left(\frac{1}{\alpha_{1,k}} - \frac{1}{\alpha_{2,k}} \right) = \sum_{\lambda_k^2 < \mu} \frac{1}{\alpha_{1,k}} \left(1 - \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}} \right).$$

Поэтому при $\mu_0 \leqslant \lambda_{N+1}^2$

$$\operatorname*{Var}_{-\infty<\mu<\mu_0} \{\rho_1(\mu) - \rho_2(\mu)\} \leqslant \rho_1(\mu_0) \cdot \max_{\lambda_k^2<\mu_0} \left| 1 - \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}} \right|.$$

Отсюда и из оценки (14) получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Если выполнены условия теоремы 1, то при достаточно больших N и $k > N+1$*

$$\left| 1 - \frac{\alpha_{2,k}}{\alpha_{1,k}} \right| < \frac{CD_N}{(k-1)^2 N^{r-2}},$$

где

$$D_N = \frac{2^{r-1}}{\left(1 - \frac{r-1}{N}\right)^r \cdot (r-2)!} + \frac{4}{N^{r-2}}.$$

Доказательство. Из известных выражений для коэффициентов α_k имеем

$$1 - \frac{\alpha_{2,k}}{\alpha_{1,k}} = 1 - \frac{\lambda_{2,k}^2 - \mu_{2,k}^2}{\lambda_{1,k}^2 - \mu_{1,k}^2} \times$$

$$\times \prod_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\left(\mu_{2,n}^2 - \mu_{2,k}^2\right)\left(\lambda_{2,n}^2 - \mu_{2,k}^2\right)}{\left(\mu_{1,n}^2 - \mu_{1,k}^2\right)\left(\lambda_{1,n}^2 - \mu_{1,k}^2\right)}, \tag{15}$$

где штрих означает, что пропущен множитель с $n = k$.

Из асимптотических формул

$$\mu_{j,n+1}^2 = n^2 + a_{j,1} + \frac{a_{j,2}}{n^2} + \ldots + \frac{a_{j,r}}{n^{2r-2}} + \frac{\alpha'_{j,n}}{n^{2r-1}},$$

где

$$|\alpha'_{j,n}| < C,$$

следует, что

$$\mu_{1,n+1}^2 - \mu_{2,n+1}^2 = (a_{1,1} - a_{2,1}) + \ldots +$$

$$+ \frac{a_{1,r} - a_{2,r}}{n^{2r-2}} + \frac{\alpha'_{1,n} - \alpha'_{2,n}}{n^{2r-1}} = \frac{\varphi(n)}{n^{2r-2}} + \frac{\alpha'_{1,n} - \alpha'_{2,n}}{n^{2r-1}},$$

где

$$\varphi(n) = (a_{1,1} - a_{2,1})\, n^{2r-2} + \ldots + (a_{1,r} - a_{2,r}).$$

Согласно (7),

$$\varphi(n) = \varphi(N) \frac{[n^2 - (N-1)^2] \ldots [n^2 - (N-r+1)^2]}{[N^2 - (N-1)^2] \ldots [N^2 - (N-r+1)^2]} +$$

$$+ \ldots + \varphi(N-r+1) \cdot \frac{[n^2 - N^2] \ldots [n^2 - (N-r+2)^2]}{[(N-r+1)^2 - N^2] \ldots [(N-r+1)^2 - (N-r+2)^2]}.$$

Отсюда

$$|a_{1,2} - a_{2,2}| \leqslant 4\alpha \left\{ \frac{(N-1)^2 + \ldots + (N-r+1)^2}{(r-1)! \cdot 2N \cdot (2N-1) \ldots (2N-r+1)} + \ldots + \right.$$

$$+\frac{N^2+\ldots+(N-r+2)^2}{(r-1)!\,(2N-r+1)\ldots(2N-2r+2)}\Big\}<$$

$$<\frac{2\alpha C_{r-1}^{1}}{\left(1-\frac{r-1}{N}\right)^r (r-1)!\,N^{r-2}},$$

где

$$\alpha=\max_{0\leqslant j\leqslant r-1}|\alpha'_{1,\,N-j}-\alpha'_{2,\,N-j}|.$$

Аналогично

$$|a_{1,\,3}-a_{2,\,3}|<\frac{2\alpha C_{r-1}^{2}}{\left(1-\frac{r-1}{N}\right)^r (r-1)!\,N^{r-4}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|a_{1,\,r}-a_{2,\,r}|<\frac{2\alpha C_{r-1}^{r-1}N^{r-2}}{\left(1-\frac{r-1}{N}\right)^r (r-1)!}.$$

Поэтому при $n>N$, $k>N$ $(k\neq n)$

$$\left|\mu_{1,\,n+1}^2-\mu_{2,\,n+1}^2+\mu_{2,\,k+1}^2-\mu_{1,\,k+1}^2\right|=\left|(a_{1,\,2}-a_{2,\,2})\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)+\right.$$

$$+\ldots+(a_{1,\,r}-a_{2,\,r})\left(\frac{1}{n^{2r-2}}-\frac{1}{k^{2r-2}}\right)+$$

$$\left.+\frac{\alpha'_{1,\,n}-\alpha'_{2,\,n}}{n^{2r-1}}-\frac{\alpha'_{1,\,k}-\alpha'_{2,\,k}}{k^{2r-1}}\right|\leqslant\left|\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right|\times$$

$$\times\left\{\frac{2^{r-1}\alpha}{\left(1-\frac{r-1}{N}\right)^r (r-2)!}+\frac{4C}{N^{r-2}}\right\}\frac{1}{N^{r-2}}.$$

Используя эту оценку и (9) из [2], получим при $n>N$, $k>N$ $(k\neq n)$ и $N>3\beta(\pi)$

$$\left|\frac{\mu_{1,\,n+1}^2-\mu_{2,\,n+1}^2+\mu_{2,\,k+1}^2-\mu_{1,\,k+1}^2}{\mu_{1,\,n+1}^2-\mu_{1,\,k+1}^2}\right|<$$

$$<\frac{1}{n^2k^2N^{r-2}}\left\{\frac{2^{r-1}\alpha}{\left(1-\frac{r-1}{N}\right)^r (r-2)!}+\frac{4C}{N^{r-2}}\right\}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{|\mu_{1,\,n+1}^2-n^2|+|\mu_{1,\,k+1}^2-k^2|}{|\mu_{1,\,n+1}^2-\mu_{1,\,k+1}^2|}\right\}<$$

$$<\frac{CD_N\left(1+\frac{1}{N}\right)^2}{n^2\cdot k^2N^{r-2}},$$

где

$$D_N = \frac{2^{r-1}}{\left(1-\frac{r-1}{N}\right)^r (r-2)!} + \frac{4}{N^{r-2}},$$

и аналогично при $k,\ n > N;\ N > 3\beta(\pi)$

$$\left|\frac{\lambda_{1,\,n+1}^2 - \lambda_{2,\,n+1}^2 + \mu_{2,\,k+1}^2 - \mu_{1,\,k+1}^2}{\lambda_{1,\,n+1}^2 - \mu_{1,\,k+1}^2}\right| <$$

$$< \frac{CD_N\left(1+\frac{1}{N}\right)^2}{n^2k^2N^{r-2}}.$$

Из этих оценок и (13) следует, что при $k > N+1,\ N > 3\beta(\pi)$

$$\left|\ln \frac{\lambda_{2,\,k}^2 - \mu_{2,\,k}^2}{\lambda_{1,\,k}^2 - \mu_{1,\,k}^2} \prod_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(\mu_{2,\,n}^2 - \mu_{2,\,k}^2)(\lambda_{2,\,n}^2 - \mu_{2,\,k}^2)}{(\mu_{1,\,n}^2 - \mu_{1,\,k}^2)(\lambda_{1,\,n}^2 - \mu_{1,\,k}^2)}\right| <$$

$$< \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}\left\{\sum_{n=1}^{N+1}\left[\left|\frac{\mu_{2,\,k}^2 - \mu_{1,\,k}^2}{\mu_{1,\,k}^2 - \mu_{1,\,n}^2}\right|^p + \sum_{n=1}^{N+1}\left|\frac{\mu_{2,\,k}^2 - \mu_{1,\,k}^2}{\mu_{1,\,k}^2 - \lambda_{1,\,n}^2}\right|^p + \sum_{n>N+1}{}'\left|\frac{\mu_{2,\,n}^2 - \mu_{1,\,n}^2 +}{\mu_{1,\,n}^2 - \mu_{1,\,k}^2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{+\,\mu_{1,\,k}^2 - \mu_{2,\,k}^2}{\mu_{1,\,n}^2 - \mu_{1,\,k}^2}\right|^p + \sum_{n>N+1}\left|\frac{\lambda_{2,\,n}^2 - \lambda_{1,\,n}^2 + \mu_{1,\,k}^2 - \mu_{2,\,k}^2}{\lambda_{1,\,n}^2 - \mu_{1,\,k}^2}\right|^p\right]\right\} <$$

$$< \frac{13CD_N\left(1+\frac{1}{N}\right)^3}{(k-1)^2N^{r-2}},$$

если

$$N^{r+1} \geqslant 8CD_N\left(1+\frac{1}{N}\right)^3.$$

Отсюда и из формулы (15) вытекает, что для достаточно больших N и $k > N+1$

$$\left|1 - \frac{\alpha_{2,\,k}}{\alpha_{1,\,k}}\right| < \frac{CD_N}{(k-1)^2N^{r-2}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $F(\lambda,\ x) = \omega_1(\lambda,\ x)\,\omega_2(\lambda,\ x)$, *тогда для достаточно больших* N

$$\left|\sum_{n>N+1}\{F(\lambda_{1,\,n},\ x) - F(\lambda_{2,\,n},\ x\}\right| < \frac{CD_N}{N^r}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\omega_1(\lambda,\ x)\,\omega_2(\lambda,\ x) = \cos^2\lambda x + [\omega_1(\lambda,\ x) + \omega_2(\lambda,\ x) - 2\cos\lambda x]\cos\lambda x +$$

$$+ [\omega_1(\lambda,\ x) - \cos\lambda x]\,[\omega_2(\lambda,\ x) - \cos\lambda x] =$$

$$= \cos^2\lambda x + \frac{1}{\lambda}\cdot r(\lambda,\ x),$$

где

$$r(\lambda, x) = \lambda [\omega_1(\lambda, x) + \omega_2(\lambda, x) - 2\cos\lambda x]\cos\lambda x + \lambda [\omega_1(\lambda, x) - \cos\lambda x][\omega_2(\lambda, x) - \cos\lambda x].$$

Тогда

$$F(\lambda_{1,n}, x) - F(\lambda_{2,n}, x) = (\lambda_{1,n} - \lambda_{2,n})\, x \cdot \sin 2\theta x + \left(\frac{1}{\lambda_{1,n}} - \frac{1}{\lambda_{2,n}}\right) r(\lambda_{1,n}, x) + \frac{1}{\lambda_{2,n}} \cdot (\lambda_{1,n} - \lambda_{2,n})\, r'(\theta_1, x),$$

где, согласно неравенству (7) из [2],

$$\left|\theta - \left(n - \frac{1}{2}\right)\right| < \frac{\beta(\pi)}{2(n-1)\left[1 - \frac{\beta(\pi)}{n-1}\right]} < \frac{3\beta(\pi)}{4(n-1)},$$

если $n - 1 > 3\beta(\pi)$.

Используя формулы (6), получим

$$F(\lambda_{1,n}, x) - F(\lambda_{2,n}, x) = 2x(c_{2,1} - c_{1,1}) \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = 2x \left\{ \frac{\sin 2\theta x - \sin(2n-1)x}{2n-1} (c_{2,1} - c_{1,1}) + (c_{2,2} - c_{1,2}) \times \frac{\sin 2\theta x}{(2n-1)^3} + \ldots + (\gamma'_{2,n} - \gamma''_{1,n}) \frac{\sin 2\theta x}{(2n-1)^{2r}} \right\} + \frac{\lambda_{2,n} - \lambda_{1,n}}{\lambda_{2,n}} \left\{ \frac{r(\lambda_{1,n}, x)}{\lambda_{1,n}} + r'(\theta_1, x) \right\}.$$

Учитывая неравенство (3) из [2], будем иметь при $n > N + 1$, $N > 3\beta(\pi)$

$$|r(\lambda_n, x)| \leqslant \lambda_n \frac{2\beta(x)}{\lambda_n - \beta(x)} + \lambda_n \frac{\beta^2(x)}{[\lambda_n - \beta(x)]^2} < 4\beta(x)$$

и

$$|r'(\lambda_n, x)| < 8x\beta(x),$$

так как функция $r(\lambda, x)$ по λ является целой функцией экспоненциального типа $2x$.

Теперь, используя оценки леммы 1, нетрудно получить, что при достаточно больших N

$$|R_n(x)| < \frac{CD_N}{(n-1)^2 N^r}.$$

Из этой оценки и леммы 1 вытекает утверждение нашей леммы.

Полученные в леммах оценки позволяют перейти к доказательству сформулированных ранее теорем.

Доказательство теоремы 1. Известно [4], что

$$\int_0^x [q_1(t) - q_2(t)]\,dt = \int_0^\infty \omega_1(\lambda, x)\,\omega_2(\lambda, x)\,d[\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)] = \int_0^{(N+1)^2} \omega_1(\lambda, x)\,\omega_2(\lambda, x)\,d[\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)] +$$

$$+\sum_{n=N+2}^{\infty} F(\lambda_{2,n}, x)\left[\frac{1}{\alpha_{1,n}}-\frac{1}{\alpha_{2,n}}\right]+\frac{2}{\pi}\sum_{n=N+2}^{\infty}[F(\lambda_{1,n}, x)-F(\lambda_{2,n}, x]) +$$

$$+\sum_{n=N+2}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_{1,n}}-\frac{2}{\pi}\right)[F(\lambda_{1,n}, x)-F(\lambda_{2,n}, x)]=I_1+S_1+S_2+S_3.$$

Первый интеграл оценим, используя лемму 2 и неравенства (3.21) и (3.25) из [4], откуда при достаточно больших N

$$|I_1|<\frac{3}{2}\frac{CB_N}{N^{r-1}}\left[1+\frac{1}{N}+\beta\left(\frac{1}{N}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{2\beta_1\left(\frac{1}{N}\right)\right\}\right]\exp\{2\beta_1(x)\},$$

где

$$\beta_1(x)=\int_0^x \beta(t)\,dt.$$

Из леммы 3 и неравенства (3.15) из [4] следует, что при достаточно больших N

$$|S_1|<\frac{CD_N}{N^{r-1}}\exp\left\{2\frac{\beta(x)}{N}\right\}.$$

Сумма S_2 оценена в лемме 4.

Воспользовавшись леммой 4 из [5] и неравенством (3), получим для достаточно больших N

$$|S_3|<\sum_{n=N+2}^{\infty}\left|\frac{1}{\alpha_{1,n}}-\frac{2}{\pi}\right||\lambda_{1,n}-\lambda_{2,n}||F'(\theta, x)|<$$

$$<\sum_{n=N+2}^{\infty}\frac{CB_N}{N^r(n-1)^2}2x\exp\left\{\frac{2\beta(x)}{N}\right\}<\frac{2xCB_N}{N^{r+1}}\exp\left\{\frac{2\beta(x)}{N}\right\}.$$

Эти оценки и позволяют получить утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2. Согласно формуле (2.11) из [4],

$$[\omega_1(\lambda, x)-\omega_2(\lambda, x)]^2=\omega_2(\lambda, x)\int_0^{\left(\frac{N}{2}\right)^2}\omega_2(\mu, x)\,d\rho_{1,2}(x)\int_0^x\omega_1(\mu, t)\times$$

$$\times\omega_1(\lambda, t)\,dt-\omega_1(\lambda, x)\int_0^{\left(\frac{N}{2}\right)^2}\omega_1(\mu, x)\,d\rho_{1,2}(\mu)\int_0^x\omega_2(\mu, t)\,\omega_2(\lambda, t)\,dt+$$

$$+\int_0^x q_{1,2}(t)\,dt\int_{\left(\frac{N}{2}\right)^2}^{\infty}\frac{\omega_1(\lambda, t)\,\omega_2(\lambda, t)\,\omega_1(\mu, x)\,\omega_2(\mu, x)-\omega_1(\lambda, x)\,\omega_2(\lambda, x)\times\omega_1(\mu, t)\,\omega_2(\mu, t)}{\mu^2-\lambda^2}\times$$

$$\times d\rho_{1,2}(\mu)=I_1-I_2+I_3-I_4,$$

где введены очевидные обозначения и

$$q_{1,2}(t) = q_1(t) - q_2(t), \quad \rho_{1,2}(\mu) = \rho_1(\mu) - \rho_2(\mu).$$

Обозначим

$$F_{\lambda,x}(\mu, t) = \omega_1(\lambda, t)\,\omega_2(\lambda, t)\,\omega_1(\mu, x)\,\omega_2(\mu, x) - \\ - \omega_1(\lambda, x)\,\omega_2(\lambda, x)\,\omega_1(\mu, t)\,\omega_2(\mu, t),$$

тогда

$$[\omega_1(\lambda, x) - \omega_2(\lambda, x)]^2 = I_1 - I_2 + \int_0^x q_{1,2}(t)\left\{\sum_{n>\frac{N}{2}}\left(\frac{1}{a_{1,n}} - \frac{1}{a_{2,n}}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{F_{\lambda,x}(\lambda_{1,n}, t)}{\lambda_{1,n}^2 - \lambda^2} + \sum_{n>N+1}\frac{1}{a_{2,n}}\,\frac{\lambda_{1,n} - \lambda_{2,n}}{\lambda_{1,n}^2 - \lambda^2}\cdot F'_{\lambda,x}(\theta, t) +$$

$$\left. + \sum_{n>N+1} F_{\lambda,x}(\lambda_{2,n}, t)\,\frac{\lambda_{2,n}^2 - \lambda_{1,n}^2}{(\lambda_{1,n}^2 - \lambda^2)(\lambda_{2,n}^2 - \lambda^2)}\right\}dt.$$

Оценивая интегралы I_1, I_2 и все суммы также, как в предыдущем доказательстве, получим утверждение теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm — Liouvillschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte — «Acta Math»., 1945, Bd. 78, H2, S. 1—96.
2. Рябушко Т. И. Устойчивость восстановления оператора Штурма — Лиувилля по двум спектрам (I).— В сб.: «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 16. Харьков, 1972, с. 186—198.
3. Левитан Б. М., Гасымов М. Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам.— «Успехи мат. наук», 1964, т. XIX, вып. 2 (116), с. 3—63.
4. Марченко В. А., Маслов К. В. Устойчивость задачи восстановления оператора Штурма — Лиувилля по спектральной функции.— «Мат. сб.», 1970, т. 81 (124) : 4, с. 525—551.
5. Рябушко Т. И. Устойчивость восстановления оператора Штурма — Лиувилля по двум спектрам (II).— В сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 18. Харьков, 1973, с. 176—185.