УДК 517.54

*А. З. Мохонько*

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ КРИВЫХ. II

Настоящая статья является непосредственным продолжением статьи [1] со сплошной нумерацией параграфов и формул.

***Лемма 5.*** *Пусть а. к.* $\{\mu(t), [a', b']\}$ *и* $\{\lambda(r), [a'', b'']\}$ *не имеют точек складки. Предположим, что эти а. к. имеют беско-*

*нечно много общих точек. Тогда существует а. к. $\{\nu(s), [\alpha, \beta]\}$, которая тоже не имеет точек складки, и такая, что*

$$\nu([\alpha, \beta]) = \mu([a', b']) \cup \lambda([a'', b'']). \tag{32}$$

Согласно лемме 4, существуют такие $t_0$, $r_0$, что выполняется (22), а также одно из соотношений (23) или (24) и одновременно одно из соотношений (30), (31). Пусть имеют место соотношения (23) и (31). Легко видеть, что можно найти такие $a_1$, $b_1$; $a_1 < a'$; $b'' < b_1$ и а. к. $L_1 = \{\mu_1(t), [a_1, b']\}$, $L_2 = \{\lambda_1(r), [a'', b_1]\}$, что

$$\mu_1(t) = \mu(t),\ a' \leqslant t \leqslant b'; \quad \lambda_1(r) = \lambda(r),\ a'' \leqslant r \leqslant b''. \tag{33}$$

Из (23), (31) и (33) следует, что

$$\mu_1([t_0, b']) \subset \lambda_1([r_0, b_1]);\ \mu_1([a_1, t_0]) \supset \lambda_1([a'', r_0]);$$
$$a_1 < a' < t_0 < b';\ a'' < r_0 < b'' < b_1. \tag{34}$$

Так как $\mu_1'(t_0), \lambda_1'(r_0) \neq 0$, то существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что $\mu_1(t)$ однолистна в круге $g_1 = \{|t - t_0| < \varepsilon_1\}$, а $\lambda_1(r)$ однолистна в $g_2 = \{|r - r_0| < \varepsilon_1\}$. В точке $\mu_1(t_0)$ а. к. $L_1$ имеет касательную. Рассмотрим отрезок $h$ нормали к касательной в точке $\mu_1(t_0)$, такой, что $h \subset \mu_1(g_1) \cap \lambda_1(g_2)$. Прообразами $h$ в кругах $g_1$ и $g_2$ будут кривые $h_1 \subset g_1$; $h_2 \subset g_2$ с началом в точках $t_0$ и $r_0$, не имеющие точек самопересечения. Не уменьшая общности, можем считать, что $h_1 \subset \{\operatorname{Im} t \geqslant 0\}$, $h_2 \subset \{\operatorname{Im} r \geqslant 0\}$. В полуплоскости $\{\operatorname{Im} t \geqslant 0\}$ существует кривая $\tau_1$, соединяющая точку $a_1$ и конец кривой $h_1$, такая, что объединение отрезка $[a_1, t_0]$ и кривых $h_1$ и $\tau_1$ есть замкнутая жорданова кривая, ограничивающая односвязную область $G_1$, причем функция $\mu_1(t)$ регулярна в $\overline{G_1}$. Аналогично в $\{\operatorname{Im} r \geqslant 0\}$ существует кривая $\tau_2$, соединяющая точку $b_1$ и конец кривой $h_2$, такая, что объединение отрезка $[r_0, b_1]$ и кривых $h_2$ и $\tau_2$ есть замкнутая жорданова кривая, ограничивающая односвязную область $G_2$, причем функция $\lambda_1(r)$ регулярна в $\overline{G_2}$.

Пусть некоторая функция $z = f(t)$ регулярна в области $E$. Отображение, осуществляемое этой функцией, можно рассматривать или как, вообще говоря, неоднолистное, на плоскую область в $z$-плоскости, или как однолистное на некоторую риманову поверхность. В первом случае образ $E$ будем обозначать через $f(E)$, во втором — через $f^R(E)$.

Регулярные функции $z = \mu_1(t)$ и $z = \lambda_1(r)$ взаимно однозначно отображают жордановы области $\overline{G_1}$ и $\overline{G_2}$ на $\mu_1^R(\overline{G_1})$, $\lambda_1^R(\overline{G_2})$ — односвязные римановы поверхности с краем над $z$-плоскостью. При этом функция $z = \mu_1(t)$ топологически отображает сегмент $[a_1, t_0]$ на дугу $\gamma_1$ — часть границы $\mu_1^R(\overline{G_1})$, а $z = \lambda_1(r)$ топологически отображает сегмент $[r_0, b_1]$ на дугу $\gamma_2$ — часть границы $\lambda_1^R(\overline{G_2})$.

Обозначим через $\overline{F} = \mu_1^R(\overline{G_1}) \cup \lambda_1^R(\overline{G_2})$ риманову поверхность, полученную склеиванием поверхностей с краем $\mu_1^R(\overline{G_1})$ и $\lambda_1^R(\overline{G_2})$

по кривым $\mu_1^R(h_1)=\lambda_1^R(h_2)$. У нас $z_0=\mu_1(t_0)=\lambda_1(r_0)$. Обозначим через $\gamma\subset\overline{F}$ объединение дуг $\gamma_1\subset\overline{F}$ и $\gamma_2\subset\overline{F}$ и назовем точку $z_0=\mu_1(t_0)$ точкой склеивания.

Поверхность $\overline{F}$ — компактная односвязная риманова поверхность над конечной $z$-плоскостью с краем $\Gamma$, являющимся замкнутой кривой без самопересечений и состоящим из дуг $\mu_1^R(\tau_1)$, $\gamma$, $\lambda_1^R(\tau_2)$. Проекция дуги $\gamma$ на $z$-плоскость совпадает с $\mu_1([a_1, b'])\cup\cup\lambda_1([a'', b_1])$.

Покажем, что для всякого $t^*$, $a_1<t^*\leqslant t_0$ при достаточно малом $\varepsilon_2>0$ некоторая область $d^R\subset\overline{F}$ неразветвленно накрывает область $d=\mu_1(\{\operatorname{Im} t\geqslant 0\}\cap\{|t-t^*|<\varepsilon_2\})$. Действительно, если $a_1<t^*<t_0$, то это следует из определения $\mu_1^R(\overline{G_1})$ и $\overline{F}$. Если $t^*=t_0$, то утверждение выполняется, так как $\mu_1'(t_0)\neq 0$, $\lambda_1'(r_0)\neq 0$, $\mu_1([t_0-\varepsilon, t_0])=\lambda_1([r_0-\varepsilon', r_0])$, $\mu_1([t_0, t_0+\varepsilon])=\lambda_1([r_0, r_0+\varepsilon''])$, а кривые $h_1$ и $h_2$ переводятся функциями $\mu_1(t)$ и $\lambda_1(r)$ в одну и ту же нормаль $h$ к а. к. $L_1$ в точке $\mu_1(t_0)$.

Согласно известным теоремам [3, с. 46, 445], существует функция $z=\varphi(w)$, регулярная в круге $\{|w|<1\}$ и непрерывная в $\{|w|\leqslant 1\}$, которая взаимно однозначно отображает круг $\{|w|\leqslant 1\}$ на риманову поверхность $\overline{F}$, причем окружность $\{|w|=1\}$ переходит в $\Gamma$, а дуга $\{z=\exp(is), [\alpha_1, \beta_1]\}$, $0<\beta_1-\alpha_1<2\pi$, переходит в $\gamma$. При этом функция $\varphi(e^{is})$ переводит $[\alpha_1, s_0]$ в $\gamma_1$, а $[s_0, \beta_1]$ в $\gamma_2$; $z_0=\mu_1(t_0)=\varphi(\exp(is_0))$. Точке склеивания $z_0=\mu_1(t_0)$ отвечает единственная точка $s_0$, $\alpha_1<s_0<\beta_1$. Очевидно, что проекция кривой $\{\nu(s), [\alpha_1, \beta_1]\}$, где $\nu(s)=\varphi(\exp(is))$ совпадает с $\mu_1([a_1, t_0])\cup\lambda_1([r_0, b_1])$. Учитывая определения $\mu_1(t)$ и $\lambda_1(r)$, можем утверждать, что существуют такие $\alpha$, $\beta$; $\alpha_1<\alpha<s_0<\beta<\beta_1$, что выполняется (32). Покажем, что кривая $\{\nu(s), [\alpha, \beta]\}$ является а. к. и не имеет точек складки.

Пусть $z^*=\mu(t^*)$, $a_1<t^*\leqslant t_0$. Существует единственное $w^*$, $|w^*|=1$, такое, что $\varphi(w^*)=z^*$. При достаточно малом $\varepsilon_3>0$ выполняется

$$\begin{aligned}&\varphi^R(\{|w|\leqslant 1\}\cap\{|w-w^*|<\varepsilon_3\})\subset d^R;\\&\varphi^R(\{|w|=1\}\cap\{|w-w^*|<\varepsilon_3\})\subset\gamma\subset\Gamma.\end{aligned}\tag{35}$$

Функция $t=\mu_1^{-1}(z)$ взаимно однозначно отображает область $d^R$ на $\{\operatorname{Im} t\geqslant 0\}\cap\{|t-t^*|<\varepsilon_2\}$. Из (35) следует, что функция $t=\mu_1^{-1}(\varphi(w))$ отображает область $q=\{|w|\leqslant 1\}\cap\{|w-w^*|<\varepsilon_3\}$ в $\{\operatorname{Im} t\geqslant 0\}\cap\{|t-t^*|<\varepsilon_2\}$. В области $\{|w|<1\}\cap\{|w-w^*|<\varepsilon_3\}$ функция $\mu_1^{-1}(\varphi(w))$ однолистна, а дугу $\{|w|=1\}\cap\{|w-w^*|<\varepsilon_3\}$ отображает в отрезок прямой $[t^*-\varepsilon_2, t^*+\varepsilon_2]$. Из известной теоремы об аналитическом продолжении [3, с. 46, теорема 5] следует, что $t=\mu_1^{-1}(\varphi(w))$ может быть аналитически продолжена через эту дугу. Поэтому в $\{|w-w^*|<\varepsilon_4\}$ существует регулярная функция $\psi(w)$, такая, что

$$t=\psi(w)\equiv\mu_1^{-1}(\varphi(w)),\ w\in q;\quad \psi'(w^*)\neq 0,\ |w^*|=1. \tag{36}$$

Функция $t=\psi(w)$ отображает $\{|w-w^*|<\varepsilon_4\}$ в круг $\{|t-t^*|<\varepsilon_2\}$. Поэтому $z=\mu_1(\psi(w))$ — регулярная в $\{|w-w^*|<\varepsilon_4\}$ функция, причем при $w\in q$ $\mu_1(\psi(w))\equiv\mu_1(\mu_1^{-1}(\varphi(w)))=\varphi(w)$. Следовательно, $\varphi(w)$ аналитически продолжается через окружность в точке $w^*=\exp(is^*)$, $\alpha_1<s^*\leqslant s_0$. Аналогично покажем, что $\varphi(w)$ может быть аналитически продолжена через все точки дуги $w=\exp(is)$, $\alpha_1<s<\beta_1$. Поэтому кривая $\nu(s)=\varphi(e^{is})$, $\alpha_1<s<\beta_1$ — аналитическая кривая. Следовательно, $\{\nu(s),\ [\alpha,\ \beta]\}$ — тоже а. к. Покажем, что у нее нет точек складки. Сначала рассмотрим $s_0$. Точка $z_0=\mu_1(t_0)=\varphi(\exp(is_0))$ — точка склеивания. Обозначим $w_0=\exp(is_0)$. В $\{|w-w_0|<\varepsilon_4, |w|>1\}$ мы доопределим $\varphi(w)$, положив $\varphi(w)\equiv\mu_1(\psi(w))$ при $|w-w_0|<\varepsilon_4$. Поэтому, учитывая (36), имеем $\varphi'(w_0)=\mu'(\psi\times(w_0))\psi'(w_0)=\mu'(t_0)\psi'(w_0)\neq 0$. Следовательно, $\nu'(s_0)\neq 0$ и $s_0$ — регулярная точка. Доказательство регулярности во всех других точках очевидно.

## § 6. Доказательство теоремы 2.

Пусть $t_1,\ldots,t_{n-1}$ — все точки складки (если такие имеются) а. к. $L=\{\lambda(t),\ [a,\ b]\}$, расположенные в порядке возрастания параметра: $t_0=a<t_1<\ldots<t_{n-1}<b=t_n$. Разобьем $L$ на дуги $a_k$, где $a_k$:

$$a_k=\{\lambda(t),\ [t_{k-1},\ t_k]\},\ k=1,\ \ldots,\ n. \tag{37}$$

Очевидно, что все точки $t\in[t_{k-1},\ t_k]$ дуги $a_k$, $1\leqslant k\leqslant n$ — регулярные (точки $t_k$ — точки складки для $L$ и регулярные точки для дуги $a_k$). Если для всех $k$, $1\leqslant k\leqslant n$ проекция дуги $a_k$ принадлежит проекции дуги $a_1$, то мы имеем а. к. $\overset{*}{a}_1=a_1=\{\lambda(t),\ [a,\ t_1]\}$ без точек складки и такую, что проекция $\overset{*}{a}_1$ совпадает с проекцией $L$. В противном случае, пусть $a_{k_1}$, $2\leqslant k_1\leqslant n$, первая дуга, у которой есть точки, не принадлежащие проекции $a_1$. Обозначим через $t_1^*$, $t_{k_1-1}\leqslant t_1^*\leqslant t_{k_1}$ такую точку, что $\lambda([a,\ t_1^*])\subset\lambda([a,\ t_1])$, а в любой правосторонней окрестности $t_1^*$ есть точки $a_{k_1}$, которые не принадлежат $\lambda([a,\ t_1])$ Ясно, что $t_{k_1}\neq t_1^*$. Если $t_{k_1-1}=t_1^*$, то в силу определения точки $t_1^*$ имеем $\lambda([t_1^*-\varepsilon_1, t_1^*])\subset\lambda([a,t_1])$, но $t_1^*=t_{k_1-1}$ — точка складки. Согласно теореме 1, для точки складки имеем $\lambda([t_1^*-\varepsilon_1,\ t_1^*])=\lambda([t_1^*,\ t_1^*+\varepsilon_2])\subset\lambda([a,t_1])$, что противоречит определению $t_1^*$. Если $t_{k_1-1}<t_1^*<t_{k_1}$, то из определения $t_1^*$ следует, что $\lambda([t_{k_1-1},\ t_1^*])\subset\lambda([a,\ t_1])$, т. е. $a_1$ и $a_{k_1}$ имеют бесконечно много общих точек.

А к. $a_1$ и $a_{k_1}$ удовлетворяют всем условиям леммы 5. Поэтому существует а. к. $\overset{*}{a_2} = \{\mu_2(s), [\gamma_2, \beta_2]\}$, не имеющая точек складки, и такая, что

$$\mu_2([\gamma_2, \beta_2]) = \lambda([a, t_1]) \cup \lambda([t_{k_1-1}, t_{k_1}]) = \lambda([a, t_{k_1}]). \tag{38}$$

Если для всех $k$, $1 \leqslant k \leqslant n$ проекции кривых $a_k$ принадлежат проекции а. к. $\overset{*}{a_2}$, то проекция а. к. $L$ равна проекции $\overset{*}{a_2}$ — а. к., не имеющей точек складки. Предположим, что проекция $\overset{*}{a_2}$ не совпадает с проекцией $L$, и $a_{k_2}$, $k_2 \geqslant k_1 + 1$ — первая дуга, у которой проекция не принадлежит проекции $\overset{*}{a_2}$. Обозначим через $\overset{*}{t_2}$, $t_{k_2-1} \leqslant \overset{*}{t_2} \leqslant t_{k_2}$ точку на промежутке определения дуги $a_{k_2}$, такую, что $\lambda\left([a, \overset{*}{t_2})\right] \subset \mu_2([\gamma_2, \beta_2])$, а в любой правосторонней окрестности $\overset{*}{t_2}$ есть точки $a_{k_2}$, которые не принадлежат проекции $\overset{*}{a_2}$. Так же, как и при построении $\overset{*}{a_2}$, покажем, что $t_{k_2-1} < \overset{*}{t_2} < t_{k_2}$. Итак, $\lambda\left([t_{k_2-1}, \overset{*}{t_2}]\right) \subset \mu_2([\gamma_2, \beta_2])$. Следовательно, а. к. $\overset{*}{a_2}$ и $a_{k_2} = \{\lambda(t), [t_{k_2-1}, t_{k_2}]\}$ удовлетворяют условиям леммы 5. Учитывая выбор дуги $a_{k_2}$ и (38), можем сказать, что существует а. к. $\{\mu_3(s), [\gamma_3, \beta_3]\}$, не имеющая точек складки, и такая, что

$$\mu_3([\gamma_3, \beta_3]) = \mu_2([\gamma_2, \beta_2]) \cup \lambda([t_{k_2-1}, t_{k_2}]) = \lambda([a, t_{k_2}]). \tag{39}$$

Через конечное число шагов мы переберем все дуги $a_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и построим а. к. $\overset{*}{a_r} = \{\mu_r(s), [\gamma_r, \beta_r]\}$, не имеющую точек складки, и такую, что

$$\mu_r([\gamma_r, \beta_r]) = \lambda[a, b]). \tag{40}$$

Определим точку $\alpha_r \in [\gamma_r, \beta_r]$ таким образом:

$$\alpha_r = \max\{s : \mu_r([s, \beta_r]) = \mu_r([\gamma_r, \beta_r])\}. \tag{41}$$

Если $\gamma_r < \alpha_r$, то $\lambda([\gamma_r, \beta_r]) = \lambda([\alpha_r, \beta_r])$. Поэтому вместо а. к. $\{\mu_r(s), [\gamma_r, \beta_r]\}$ можно рассматривать а. к. $\{\mu_r(s), [\alpha_r, \beta_r]\}$. Покажем, что она имеет не более конечного числа точек самопересечения. Если эта а. к. имеет бесконечно много точек самопересечения, то существует бесконечное множество пар $(s'_\sigma, s''_\sigma)$ значений $s$, таких, что $s'_\sigma > s''_\sigma$, $\mu_r(s'_\sigma) = \mu_r(s''_\sigma)$. Обозначим через $S$ совокупность всех таких пар, а через $\{s'_\sigma\}$ и $\{s''_\sigma\}$ обозначим множества

$$\{s'_\sigma\} = \{s'_\sigma : (s'_\sigma, s''_\sigma) \in S\}, \quad \{s''_\sigma\} = \{s''_\sigma : (s'_\sigma, s''_\sigma) \in S\}.$$

Множества $\{s'_\sigma\}$ и $\{s''_\sigma\}$ бесконечны, ибо иначе $\mu_r(s) \equiv \text{const}$, следовательно, и $\lambda(t) \equiv \text{const}$, что противоречит определению а. к.

Точную нижнюю грань множества точек сгущения для $\{s'_\sigma\}$ обозначим через $s^*$. Существует последовательность $s'_n$, $s'_n \in \{s'_\sigma\}$, такая, что $s'_n \to s^*$. Последовательности $\{s'_n\}$ соответствует последовательность $\{s''_n\}$, $s''_n \in \{s''_\sigma\}$, $\mu_r(s'_n) = \mu_r(s''_n)$. Переходя в случае необходимости к подпоследовательностям, можем считать, что $s_n'' \to s^{**}$. Очевидно,

$$\mu_r(s^{**}) = \lim_{n\to\infty} \mu_r(s_n'') = \lim_{n\to\infty} \mu_r(s_n') = \mu_r(s^*).$$

Так как $s_n' > s_n''$, то $s^* \geqslant s^{**}$. Если $s^* = s^{**}$, то получаем, что в любой окрестности $s^*$ имеются точки самопересечения а. к. $\{\mu_r(s), [\alpha_r, \beta_r]\}$, т. е. функция $\mu_r(s)$ не взаимно однозначна в любой окрестности $s^*$. Получаем противоречие с утверждением, что все точки $\overset{*}{a}_r$ — регулярные. Пусть $s^* > s^{**}$. Выберем такое $p$, чтобы $s^* > p > s^{**}$. Рассмотрим дуги $\{\mu_r(s), [\alpha_r, p]\}$, $\{\mu_r(s), [p, \beta_r]\}$. Эти дуги имеют бесконечно много общих точек при значениях параметров $\{s_n'\}$, $s_n' \to s^*$, и $\{s_n''\}$, $s_n'' \to s^{**}$.

Предположим, что $s^* = \beta_r$. Из леммы 2 следует, что существуют такие $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, что либо

$$\mu_r([\beta_r - \varepsilon_1, \beta_r]) = \mu_r([s^{**} - \varepsilon_2, s^{**}]),$$

либо

$$\mu_r([\beta_r - \varepsilon_1, \beta_r]) = \mu_r([s^{**}, s^{**} + \varepsilon_2]),$$

а это означает, что точки $s^* - \varepsilon_1 = \beta_r - \varepsilon_1$ и $s^{**} - \varepsilon_2$ (или $s^* - \varepsilon_1$ и $s^{**} + \varepsilon_2$) тоже являются предельными точками для $\{s_\sigma'\}$, $\{s_\sigma''\}$. Это противоречит определению $s^*$.

Предположим, что $\alpha_r = s^{**} < s^* < \beta_r$. В силу леммы 2 существуют такие $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, что либо

$$\mu_r([\alpha_r, \alpha_r + \varepsilon_1]) = \mu_r([s^* - \varepsilon_2, s^*]), \tag{42}$$

либо

$$\mu_r([\alpha_r, \alpha_r + \varepsilon_1]) = \mu_r([s^*, s^* + \varepsilon_2]). \tag{43}$$

Пусть выполняется равенство (43). Значит ту же проекцию, что и а. к. $\{\mu_r(s), [\alpha_r, \beta_r]\}$, имеет дуга $\{\mu_r(s), [\alpha_r + \varepsilon_1, \beta_r]\}$, что противоречит определению точки $\alpha_r$.

Если $\alpha_r < s^{**} < s^* < \beta_r$, то доказательство такое же, как для случая $s^* = \beta_r$. Мы доказали, что бесконечного числа точек самопересечения быть не может. Теорема 2 доказана.

## § 7. Доказательство теорем 3 и 4.

Если а. к. $\{\lambda_1(t'), [a', b']\}$ и $\{\lambda_2(t''), [a'', b'']\}$ имеют бесконечно много общих точек, то и соответствующие им а. к. $l_1 = \{\mu_1(s'), [c', d']\}$ и $l_2 = \{\mu_2(s''), [c'', d'']\}$ имеют бесконечно много общих точек. А. к. $l_1$ и $l_2$ удовлетворяют условиям леммы 4. Как было показано в этой лемме, существуют такие $t_0$, $r_0$, $c' < t_0 < d'$, $c'' < r_0 < d''$, и такие $\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2'$, $\varepsilon_1''$, $\varepsilon_2'' > 0$, что

$$\mu_1([t_0 - \varepsilon_1', t_0]) = \mu_2([r_0 - \varepsilon_1'', r_0]), \tag{44}$$

$$\mu_1([t_0, t_0 + \varepsilon_2']) = \mu_2([r_0, r_0 + \varepsilon_2'']), \quad \mu_1(t_0) = \mu_2(r_0). \tag{45}$$

Положим

$$t^* = \min\{s' : \mu_1([s', t_0]) \subset \mu_2([c'', d''])\}, \quad (46)$$

$$t^{**} = \max\{s' : \mu_1([t_0, s']) \subset \mu_2([c'', d''])\}. \quad (47)$$

Ясно, что $c' \leqslant t^* < t_0 < t^{**} \leqslant d'$ и

$$\mu_1([t^*, t^{**}]) \subset \mu_2([c'', d'']). \quad (48)$$

Если $c' < t^* < t^{**} < d'$, то так же, как и в лемме 4, можем показать, что тогда выполняется

$$\mu_2([r_0, d'']) \subset \mu_1([t_0, t^{**}]) \quad (49)$$

и аналогично доказывается, что

$$\mu_2([c'', r_0]) \subset \mu_1([t^*, t_0]). \quad (50)$$

Из (49), (50) следует, что

$$\mu_2([c'', d'']) \subset \mu_1([t^*, t^{**}]) \subset \mu_1([c', d']),$$

т. е. а. к. $l_1$ и $l_2$ имеют одну общую дугу. Предположим, что $t^* = c'$, $t^{**} = d'$. Из (48) следует $\mu_1[(c', d']) \subset \mu_2([c'', d''])$. Следовательно, наши а. к. снова имеют одну общую дугу.

Предположим, что $c' < t^* < t^{**} = d'$ или $c' = t^* < t^{**} < d'$. Пусть для определенности $c' = t^* < t^{**} < d'$. Тогда (48) запишется так:

$$\mu_1([c', t^{**}]) \subset \mu_2([c'', d'']), \quad (51)$$

т. е. а. к. $l_1$ и $l_2$ уже имеют по крайней мере одну общую дугу. Покажем, что концом этой общей дуги $\{\mu_1(s'), [c', t^{**}]\}$ является начальная или конечная точка а. к. $l_2$. Действительно, из (51) и определения (13) следует, что для точки $t^{**}$, $c' < t^{**} < d'$ существует такое $r^{**} \in [c'', d'']$, что $r^{**} \sim t^{**}$. Пусть $c'' < r^{**} < d''$. Все точки а. к. $l_1$ и $l_2$ — регулярные. Поэтому из определения соответствующих точек следует, что $\mu_1([t^{**}, t^{**} + \varepsilon_2']) \subset \mu_2([c'', d''])$, что противоречит определению (47) точки $t^{**}$. Следовательно, $t^{**}$ соответствует либо $c''$, либо $d''$.

Если оказалось, что дуга $\{\mu_1(s'), [t^{**}, d']\}$ имеет не более конечного числа общих точек с а. к. $l_2$, то найденная общая дуга а. к. $l_1$ и $l_2$ — единственная. Предположим противное, что дуга $\{\mu_1(s'), [t^{**}, d']\}$ имеет бесконечно много общих точек с $l_2$. Из леммы 2 следует, что существует такой сегмент $[r_1, r_2] \subset [t^{**}, d']$, что $\mu_1([r_1, r_2]) \subset \mu_2([c'', d''])$. Выбрав $p$, $t^{**} \leqslant r_1 < p < r_2 \leqslant d'$, определим

$$s^\circ = \min\{r_1 : \mu_1([r_1, p]) \subset \mu_2([c'', d''])\}, \quad (52)$$

$$s^{\circ\circ} = \max\{r_2 : \mu_1([p, r_2]) \subset \mu_2([c'', d''])\}. \quad (53)$$

Ясно, что

$$\mu_1([s^\circ, s^{\circ\circ}]) \subset \mu_2([c'', d'']), \quad (54)$$

$s^\circ \leqslant r_1 < r_2 \leqslant s^{\circ\circ}$. Учитывая, что $[r_1, r_2] \subset [t^{**}, d']$, имеем $t^{**} < s^{\circ\circ}$. Если $t^{**} > s^\circ$, то из (51) и (54) следует, что $\mu_1([c', s^{\circ\circ}]) \subset \mu_2 \times$

$\times([c'', d''])$, а это противоречит определению (47) точки $t^{**}$, так как $t^{**} < s^{\circ\circ}$. Поэтому $t^{**} < s^{\circ}$ и $c' < t^{**} < s^{\circ} < s^{\circ\circ} \leqslant d'$. Покажем, что $s^{\circ\circ} = d'$. Действительно, если $s^{\circ\circ} < d'$, то $c' < s^{\circ} < s^{\circ\circ} < d'$. Точки $s^{\circ}$ и $s^{\circ\circ}$ мы определили аналогично точкам $t^{*}$ и $t^{**}$. Согласно сказанному при рассмотрении сегмента $[t^{*}, t^{**}]$ (когда $c' < < t^{*} < t^{**} < d'$), мы имели бы

$$\mu_2([c'', d'']) \subset \mu_1([s^{\circ}, s^{\circ\circ}]). \qquad (55)$$

Так как $c' < t^{**} < s^{\circ} < s^{\circ\circ}$, то из (51) и (55) следует, что $\mu_1([c', t^{**}])$ и $\mu_1([s^{\circ}, s^{\circ\circ}])$ имеют бесконечно много общих точек, т. е. $l_1$ имеет бесконечно много точек самопересечения, что противоречит выбору $l_1$. Поэтому $s^{\circ\circ} = d'$ и соотношение (54) можно записать так: $\mu_1([s^{\circ}, d']) \subset \mu_2([c'', d''])$, $t^{**} < s^{\circ}$. Таким образом, а. к. $l_1$ и $l_2$ имеют множество общих точек, состоящее из дуг $\{\mu_1(s'), [c', t^{**}]\}$, $\{\mu_1(s'), [s^{\circ}, d']\}$ и, может быть, конечного числа точек дуги $\{\mu_1(s'), [t^{**}, s^{\circ}]\}$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4.

Справедливость теоремы 4 следует из теоремы 2 и леммы 5.

Выражаю глубокую благодарность А. А. Гольдбергу за руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мохонько А. З. О некоторых свойствах аналитических кривых. 1.— В сб.: «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 21, Харьков, 1974, с. 47—56.
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, т. 1 и 2. М., «Наука», 1968. 488. 624 с.
3. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., «Наука», 1966. 628 с.