# 7. Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов.

В этом разделе речь пойдет о квадратурных формулах для интегралов (см. [3])

$$(\mathsf{A}f_n)(\varphi_0) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_n(\varphi)}{2\sin^2\dfrac{\varphi-\varphi_0}{2}}\,d\varphi\,, \tag{7.1}$$

где $f_n(\varphi)$ – тригонометрический полином порядка $n$, и (см. [3])

$$(Ap_{n-2})(t_0) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{p_{n-2}(t)}{(t-t_0)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt\,, \tag{7.2}$$

где $p_{n-2}(t)$ – алгебраический полином степени $n-2$.

Также получены квадратурные формулы интерполяционного типа для интегралов от многочленов по интервалу (-1,1) с весом $\sqrt{1-t^2}$ и интегралов с логарифмическим ядром и тем же весом.

Рассмотренные в этом разделе квадратурные формулы используются при вычислении потенциалов двойного слоя.

**7.1.** Для вычисления интеграла (1) подставим в формулу (1) выражение для $f_n(\varphi) \equiv (P_n^{(1)} f_n)(\varphi)$ в виде интерполяционного тригонометрического полинома. Имеем $(\mathsf{A}f_n)(\varphi_0) = \sum_{k=0}^{2n} f_n(\varphi_k^n)(\mathsf{A}S_{n,k})(\varphi_0)$. И найдем выражения интегралов (1) для фундаментальных интерполяционных тригонометрических полиномов порядка точно $n$. В силу (1) и (6.7) получаем

$$(\mathsf{A}S_{n,k})(\varphi_0) = -\frac{2}{2n+1}\sum_{q=1}^{n} q\cos q\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right) = -\frac{2}{2n+1}\frac{d}{d\varphi_0}\sum_{q=1}^{n}\sin q\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right)$$

и, используя тождество

$$\sum_{q=1}^{n}\sin q\theta = \frac{\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}},$$

(в самом деле,

$$\sum_{q=1}^{n}\sin q\theta = \operatorname{Im}\sum_{q=1}^{n}e^{iq\theta} = \operatorname{Im}\frac{e^{i(n+1)\theta}-e^{i\theta}}{e^{i\theta}-1} = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \quad ),$$

после несложных преобразований находим

$$(\mathsf{A}S_{n,k})(\varphi_0) = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{\sin^2\frac{n}{2}\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right)}{\sin^2\frac{1}{2}\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right)} - \frac{n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right)}\right] \tag{7.3}$$

Окончательно имеем интерполяционную квадратурную формулу для гиперсингулярного интеграла (1):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f_n(\varphi)}{2\sin^2\frac{\varphi-\varphi_0}{2}}d\varphi = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}f_n(\varphi_k^n)\left[\frac{\sin^2\frac{n}{2}\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right)}{\sin^2\frac{1}{2}\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right)} - \frac{n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right)}\right] \tag{7.4}$$

Эта формула значительно упрощается при $\varphi_0 \in \left\{\varphi_j^n\right\}_{j=0}^{2n}$:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f_n(\varphi)}{2\sin^2\frac{\varphi-\varphi_j^n}{2}}d\varphi = \frac{1}{2n+1}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{2n}f_n(\varphi_k^n)\frac{1-(-1)^{j-k}\cos\frac{\varphi_j^n-\varphi_k^n}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi_j^n-\varphi_k^n}{2}} - \frac{n(n+1)}{2n+1}f_n(\varphi_j^n)} \tag{7.5}$$

**7.2.** Прежде чем переходить к выводу интерполяционной квадратурной формулы для интеграла (2), займемся *интерполяционными полиномами Лагранжа с* $(n-1)$ *чебышевскими узлами 2-го типа*:

$$t_{0j}^n = \cos\frac{j}{n}\pi\,,\ j = 1,2,\ldots,n-1$$

Пусть $f(t), t\in[-1,1]$ -заданная функция, обозначим

$$(P_{n-2}^{II}f)(t) \equiv \sum_{j=1}^{n-1}f(t_{0j}^n)l_{n-2,j}^{II}(t)\,, \tag{7.6}$$

где $l_{n-2,j}^{II}(t)$ – фундаментальные интерполяционные полиномы 2-го типа, определенные следующим образом :

$$l_{n-2,j}^{II}(t) \equiv \frac{U_{n-1}(t)}{U'_{n-1}(t_{0j}^n)(t-t_{0j}^n)}\,,\ j = 1,2,\ldots,n-1 \tag{7.7}$$

Непосредственно проверяется, что

$$l^{II}_{n-2,j}(t^n_{0k}) = \delta_{jk}\ ;\ j,k = 1,2,\ldots,n-1 \tag{7.8}$$

откуда следует, что

$$(P^{II}_{n-2}f)(t^n_{0k}) = f(t^n_{0k})\ ,\ k = 1,2,\ldots,n-1 \tag{7.9}$$

И если $f = p_{n-2}(t)$ - полином степени $(n-2)$, то в силу (9) два полинома степени $(n-2)$: $p_{n-2}(t)$ и $(P^{II}_{n-2}p_{n-2})(t)$ совпадают в $(n-1)$ различных точках, так что

$$\boxed{(P^{II}_{n-2}p_{n-2})(t) \equiv p_{n-2}(t), t \in R} \tag{7.10}$$

В общем случае гладких функций $f(t) \in C^{r,\alpha}_{[-1,1]}$ оценка скорости сходимости $(P^{II}_{n-2}f)(t)$ к $f(t)$ приведена в заключительном пункте настоящего раздела.

**7.3.** Теперь можно получить квадратурную формулу интерполяционного типа для интеграла с чебышевским весом

$$J^{II}_f \equiv \int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

Имеем $\int_{-1}^{1}(P^{II}_{n-2}f)(t)\sqrt{1-t^2}\,dt + r_n$, где $r_n = \int_{-1}^{1}\left[f(t) - (P^{II}_{n-2}f)(t)\right]\sqrt{1-t^2}\,dt$, тогда, в силу (6)-(7),

$$\int_{-1}^{1}(P^{II}_{n-2}f)(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \sum_{j=1}^{n-1} f(t^n_{0j})\int_{-1}^{1} l^{II}_{n-2,j}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} f(t^n_{0j})\frac{1}{U'_{n-1}(t^n_{0j})}\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(t)}{t-t^n_{0j}}\sqrt{1-t^2}\,dt\,.$$

Используя формулу (4.27), имеем

$$\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(t)}{t-t^n_{0j}}\sqrt{1-t^2}\,dt = -\pi T_n(t^n_{0j})\ ,$$

и, вычисляя производную $U'_{n-1}(t)$, находим $U'_{n-1}(t^n_{0j}) = (-1)^{j+1}\dfrac{n}{1-(t^n_{0j})^2}$ *)

---

* Положим $t_0 = \cos\theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi$.

Тогда $\dfrac{dU_{n-1}(t_0)}{dt_0} = \dfrac{1}{-\sin\theta_0}\dfrac{d}{d\theta_0}\dfrac{\sin n\theta_0}{\sin\theta_0} = -\dfrac{n\cos n\theta_0}{\sin^2\theta_0} - \dfrac{\sin n\theta_0\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}$ и, полагая $\theta_0 = \theta^n_{0j} = \dfrac{\pi}{n}j$, $j = 1,2,\ldots n-1$, получаем требуемый результат.

теперь имеем, с учетом значения $T_n(t_{0j}^n) = (-1)^j$,

$$\int_{-1}^{1} (P_{n-2}^{II} f)(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n-1} f(t_{0j}^n)\left(1-(t_{0j}^n)^2\right)$$

и, окончательно, получаем квадратурную формулу интерполяционного типа

$$J_f^{II} \equiv \int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n-1} f(t_{0j}^n)\left(1-(t_{0j}^n)^2\right) + \int_{-1}^{1}\left[f(t)-(P_{n-2}^{II} f)(t)\right]\sqrt{1-t^2}\,dt\,. \qquad (7.11)$$

Эта квадратурная формула с $(n-1)$ узлами $\left\{t_{0j}^n\right\}_{j=1}^{n-1}$, очевидно, точна $(r_n = 0)$ для полиномов степени $(n-2)$.

Действуя точно так же как в пункте 5.3, нетрудно показать, что квадратурная формула интерполяционного типа (11) точна для полиномов степени $(2n-3)$, а именно, имеет место следующая формула

$$\int_{-1}^{1} P_{2n-3}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P_{2n-3}(t_{0j}^n)\left(1-(t_{0j}^n)^2\right). \qquad (7.12)$$

В общем случае, когда $f(t)$- гладкая функция класса $C_{[-1,1]}^{r,\alpha}$, оценка остаточного члена в формуле (11) дана в заключительном пункте настоящего раздела.

В заключение этого пункта покажем, что в пространстве полиномов $\Pi^{II}$ со скалярным произведением $(p,q)_{II} \equiv \int_{-1}^{1} p(t)\overline{q(t)}\sqrt{1-t^2}\,dt$ система фундаментальных алгебраических полиномов $\left\{ l_{n-2,j}^{II}(t)\right\}_{j=1}^{n-1}$ степени точно $(n-2)$ - ортогональна, а также вычислим нормы этих полиномов.

Положим в формуле (12) $p_{2n-3}(t) = l_{n-2,k}^{II}(t) l_{n-2,l}^{II}(t)$. С учетом (8), имеем

$$\int_{-1}^{1} l_{n-2,k}^{II}(t) l_{n-2,l}^{II}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n-1} l_{n-2,k}^{II}(t_{0j}^n) l_{n-2,l}^{II}(t_{0j}^n)\left(1-(t_{0j}^n)^2\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ при } \mathrm{k} \neq l;\ \mathrm{k,l} = 1,\ldots \mathrm{n}-1 \\ \dfrac{\pi}{\mathrm{n}}(1-(t_{0k}^n)^2), \text{ при } \mathrm{k} = l \end{cases}$$

Доказано, что

$$\boxed{(l_{n-2,k}^{II}, l_{n-2,k}^{II})_{II} = \frac{\pi}{n}(1-(t_{0k}^n)^2)\delta_{kl}\,,\ \mathrm{k,l} = 1,\ldots,\mathrm{n}-1} \qquad (7.13)$$

**7.4.** Переходя к выводу *квадратурной формулы интерполяционного типа с* $(n-1)$ *узлами* $\left\{t_{0j}^n\right\}_{j=1}^{n-1}$ *для интеграла с логарифмическим ядром*

$$(L^{II}f)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|f(t)\sqrt{1-t^2}\,dt, \tag{7.14}$$

воспользуемся выражением (6) для интерполяционного полинома $(P_{n-2}^{II}f)(t)$ заданной функции $f(t), t\in[-1,1]$. Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|f(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \sum_{j=1}^{n-1}f(t_{0j}^n)(L^{II}l_{n-2,j}^{II})(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|\left[f(t)-(P_{n-2}^{II}f)(t)\right]\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

а для вычисления интегралов $(L^{II}l_{n-2,j}^{II})(t_0), j=1,\ldots n-1$ используем явное выражение (7) фундаментального полинома $l_{n-2,j}^{II}(t)$:

$$(L^{II}l_{n-2,j}^{II})(t_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|\frac{U_{n-1}(t)(1-t^2)}{t-t_{0j}^n}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{U'_{n-1}(t_{0j}^n)} \tag{7.15}$$

Теперь разложим полином степени $n$: $\dfrac{U_{n-1}(t)(1-t^2)}{t-t_{0j}^n}$ по полиномам Чебышева 1-го рода:

$$\frac{U_{n-1}(t)(1-t^2)}{t-t_{0j}^n} = \sum_{k=0}^{n}b_{j,k}^n T_k(t) \tag{7.16}$$

и для вычисления коэффициентов разложения $b_{j,0}^n; b_{j,1}^n; \ldots; b_{j,n-1}^n; b_{j,n}^n$ воспользуемся полученными в разделе 4 формулами (4.27). Имеем

$$b_{j,0}^n \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(t)(1-t^2)}{t-t_{0j}^n}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(t)}{t-t_{0j}^n}\sqrt{1-t^2}\,dt = -T_n(t_{0j}^n) = (-1)^{j+1}$$

$$b_{j,k}^n \equiv \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(t)(1-t^2)}{t-t_{0j}^n}T_k(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{2U_{n-1}(t)}{t-t_{0j}^n}T_k(t)\sqrt{1-t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-k-1}(t)+U_{n+k-1}(t)}{t-t_{0j}^n}\sqrt{1-t^2}\,dt = -\left(T_{n-k}(t_{0j}^n)+T_{n+k}(t_{0j}^n)\right) = -2T_n(t_{0j}^n)T_k(t_{0j}^n) =$$

$$= -2(-1)^j T_k(t_{0j}^n),\ k=1,\ldots,n-1;\quad j=1,\ldots,n-1$$

$$b_{j,n}^n \equiv \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(t)(1-t^2)}{t-t_{0j}^n}T_n(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{2U_{n-1}(t)}{t-t_{0j}^n}T_n(t)\sqrt{1-t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_{2n-1}(t)}{t-t_{0j}^n}\sqrt{1-t^2}\,dt = -T_{2n}(t_{0j}^n) = -1,\ j=1,\ldots,n-1$$

Подставим разложение (16) с найденными коэффициентами в представление (15) для интеграла $(L^{II} l^{II}_{n-2,j})(t_0)$, воспользуемся формулами (4.31), (4.34), а также найденными ранее значениями при $t = t^n_{0j}$ производной $U'_{n-1}(t)$. Получаем

$$(L^{II} l^{II}_{n-2,j})(t_0) = -\frac{1}{n}\left(1-(t^n_{0j})^2\right)\left[\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{T_k(t^n_{0j})}{k}T_k(t_0) + \frac{(-1)^j}{n}T_k(t_0)\right] \quad (7.17)$$

Теперь мы можем выписать квадратурную формулу интерполяционного типа для интеграла (14) с логарифмическим ядром. Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|f(t)\sqrt{1-t^2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} f(t^n_{0j})\left(1-(t^n_{0j})^2\right)\left[\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{T_k(t^n_{0j})}{k}T_k(t_0) + \frac{(-1)^j}{n}T_k(t_0)\right] + R_n(t_0), \quad (7.18)$$

где $R_n(t_0) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|\left[f(t)-(P^{II}_{n-2}f)(t)\right]\sqrt{1-t^2}\,dt$.

Отметим, что если $f = p_{n-2}(t)$ - полином степени $(n-2)$, то $R_n(t_0) \equiv 0$. В этом случае мы говорим, что интерполяционная квадратурная формула (18) точна для полиномов степени $(n-2)$.

В общем случае, когда гладкая функция $f(t)$ принадлежит классу $C^{r,\alpha}_{[-1,1]}$, оценка остаточного члена $R_n(t_0)$ приведена в заключительном пункте настоящего раздела.

**7.5.** Наконец, выведем квадратурную формулу интерполяционного типа для гиперсингулярного интеграла (2). Представим полином $p_{n-2}(t)$ степени $(n-2)$ в виде:

$$p_{n-2}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} p_{n-2}(t^n_{0j}) l^{II}_{n-2,j}(t)$$

и вычислим интегралы (2) для фундаментальных интерполяционных полиномов $l^{II}_{n-2,j}(t)$. Имеем

$$(A l^{II}_{n-2,j})(t_0) \equiv -\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-(t^n_{0j})^2\right) k U_{k-1}(t^n_{0j}) U_{k-1}(t_0).$$

Для доказательства этого тождества воспользуемся явным выражением для фундаментального интерполяционного полинома

$$l^{II}_{n-2,j}(t)=\frac{U_{n-1}(t)}{U'_{n-1}(t^n_{0j})(t-t^n_{0j})}=\frac{(-1)^{j+1}}{n}\left(1-(t^n_{0j})^2\right)\frac{U_{n-1}(t)}{t-t^n_{0j}}\ ,$$

и разложим полином степени $(n-2)$ по полиномам Чебышева 2-го рода:

$$\frac{U_{n-1}(t)}{t-t^n_{0j}}=\sum_{k=1}^{n-1}a^n_{j,k}U_{k-1}(t)\,,\ j=1,\ldots,n-1\ ,$$

где $a^n_{j,k}\equiv\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(t)U_{k-1}(t)}{t-t^n_{0j}}\sqrt{1-t^2}\,dt$ .

Поскольку $2U_{n-1}(t)U_{k-1}(t)(1-t^2)=2\sin k\theta\sin n\theta=\cos(n-k)\theta-\cos(n+k)\theta=$ $=T_{n-k}(t)-T_{n+k}(t)$ , $k=1,\ldots,n-1$ (здесь $\theta=\arccos t$), для коэффициентов $a^n_{j,k}$ находим

$$a^n_{j,k}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_{n-k}(t)-T_{n+k}(t)}{t-t^n_{0j}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_{n-k}(t)}{t-t^n_{0j}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_{n+k}(t)}{t-t^n_{0j}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=U_{n-k-1}(t^n_{0j})-U_{n+k-1}(t^n_{0j})=\frac{\sin(n-k)\frac{j}{n}\pi-\sin(n+k)\frac{j}{n}\pi}{\sin\frac{j}{n}\pi}=$$

$$=-\frac{2\sin k\frac{j}{n}\pi\cos n\frac{j}{n}\pi}{\sin\frac{j}{n}\pi}=(-1)^{j+1}2U_{k-1}(t^n_{0j})\,.$$

Итак,

$$l^{II}_{n-2,j}(t)=\frac{2}{n}\left(1-(t^n_{0j})^2\right)\sum_{k=1}^{n-1}U_{k-1}(t^n_{0j})U_{k-1}(t) \tag{7.19}$$

и, используя соотношение (6.24), находим

$$\boxed{(Al^{II}_{n-2,j})(t_0)=-\frac{2}{n}(1-(t^n_{0j})^2)\sum_{k=1}^{n-1}kU_{k-1}(t^n_{0j})U_{k-1}(t_0)} \tag{7.20}$$

и окончательно получаем квадратурную формулу интерполяционного типа для гиперсингулярного интеграла (2):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{p_{n-2}(t)}{(t-t_0)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt=-\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}p_{n-2}(t^n_{0j})\left(1-(t^n_{0j})^2\right)\sum_{k=1}^{n-1}kU_{k-1}(t^n_{0j})U_{k-1}(t_0) \tag{7.21}$$

Эта формула верна для любого $t_0\in(-1,1)$.

**7.6.** Выведем ещё одну квадратурную формулу для гиперсингулярного интеграла (2). Имеем (в силу (6.26)):

$$(Al^{II}_{n-2,j})(t_0) = \frac{1}{U'_{n-1}(t^n_{0j})}\frac{d}{dt_0}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(t)}{(t-t^n_{0j})(t-t_0)}\sqrt{1-t^2}\,dt =$$

$$= -\frac{(-1)^j(1-(t^n_{0j})^2)}{n}\frac{d}{dt_0}\left[\frac{1}{t_0-t^n_{0j}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(t)}{t-t_0}\sqrt{1-t^2}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(t)}{t-t^n_{0j}}\sqrt{1-t^2}\,dt\right)\right] =$$

$$= \frac{(-1)^j\left(1-(t^n_{0j})^2\right)}{n}\frac{d}{dt_0}\frac{T_n(t_0)-T_n(t^n_{0j})}{t_0-t^n_{0j}} =$$

$$= \frac{(-1)^j\left(1-(t^n_{0j})^2\right)}{n}\frac{nU_{n-1}(t_0)(t_0-t^n_{0j})-\left(T_n(t_0)-T_n(t^n_{0j})\right)}{(t_0-t^n_{0j})^2}.$$

Итак, показано, что при $t_0 \neq t^n_{0j}$

$$\boxed{(Al^{II}_{n-2,j})(t_0) = \frac{(-1)^j(1-(t^n_{0j})^2)}{n}\left[\frac{nU_{n-1}(t_0)}{t_0-t^n_{0j}} - \frac{T_n(t_0)-T_n(t^n_{0j})}{(t_0-t^n_{0j})^2}\right]} \qquad (7.22)$$

и при $t_0 \notin \left\{t^n_{0j}\right\}_{j=1}^{n-1}$ имеем такую квадратурную формулу интерполяционного типа для гиперсингулярного интеграла:

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p_{n-2}(t)}{(t-t_0)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt = \sum_{j=1}^{n-1}p_{n-2}(t^n_{0j})\frac{(-1)^j(1-(t^n_{0j})^2)}{n}\left[n\frac{U_{n-1}(t_0)}{t_0-t^n_{0j}} - \frac{T_n(t_0)-T_n(t^n_{0j})}{(t_0-t^n_{0j})^2}\right]} \qquad (7.23)$$

А теперь сосчитаем $(Al^{II}_{n-2,j})(t^n_{0j})$ как предел при $t \to t^n_{0j}$ правой части равенства (22), для чего сначала преобразуем выражение

$$\frac{nU_{n-1}(t_0)}{t_0-t^n_{0j}} - \frac{T_n(t_0)-T_n(t^n_{0j})}{\left(t_0-t^n_{0j}\right)^2} =$$

$$= \frac{T'_n(t_0)}{t_0-t^n_{0j}} - \frac{T'_n(t^n_{0j})(t_0-t^n_{0j}) + \frac{1}{2}T''_n(t^n_{0j})(t_0-t^n_{0j})^2 + \bar{o}\left(\left|t_0-t^n_{0j}\right|^2\right)}{(t_0-t^n_{0j})^2} =$$

$$= \frac{T'_n(t_0)-T'_n(t^n_{0j})}{t_0-t^n_{0j}} - \frac{1}{2}T''_n(t^n_{0j}) + \bar{o}(1), \quad t_0 \neq t^n_{0j}.$$

Подставляя это выражение в (22) и переходя к пределу, получаем

$$(Al^{II}_{n-2,j})(t^n_{0j}) = \frac{(-1)^j\left(1-(t^n_{0j})^2\right)}{2n}T''_n(t^n_{0j}) = -\frac{1}{U'_{n-1}(t^n_{0j})}\frac{nU'_{n-1}(t^n_{0j})}{2} = -\frac{n}{2} \quad .$$

Значение выражения (22) при $t_0 = t^n_{0k}\,, k \neq j$ вычислим непосредственно. Учитывая, что $U_{n-1}(t^n_{0k}) = 0$, а $T_n(t^n_{0q}) = (-1)^q$, находим

$$(Al^{II}_{n-2,j})(t^n_{0k}) = \frac{(-1)^j\left(1-(t^n_{0j})^2\right)}{n}\left[-\frac{(-1)^k-(-1)^j}{(t^n_{0k}-t^n_{0j})^2}\right] = \frac{1-(t^n_{0j})^2}{n}\frac{1-(-1)^{k+j}}{(t^n_{0k}-t^n_{0j})^2} \quad .$$

Наконец, мы можем выписать окончательную квадратурную формулу интерполяционного типа, которая справедлива в $(n-1)$ точках $t^n_{0k}, k = 1,\ldots,n-1$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p_{n-2}(t)}{(t-t^n_{0k})^2}\sqrt{1-t^2}\,dt = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-1} p_{n-2}(t^n_{0j})\frac{\left(1-(-1)^{j+k}\right)\left(1-(t^n_{0j})^2\right)}{(t^n_{0k}-t^n_{0j})^2}\frac{1}{n} - p_{n-2}(t^n_{0k})\frac{n}{2}. \quad (7.24)$$

**7.7.** Выпишем джексоновскую оценку для *наименьшего отклонения полиномов из* $\Pi^{II}_{n-2}$ *от* функции $f(t) \in C^{r,\alpha}_{[-1,1]}$:

$$\boxed{E_{n-2} \le \frac{12^{r+1}r^r(r+1)^\alpha M_r}{r!}\frac{1}{(n-2)^{r+\alpha}}, \quad n > r+2} \qquad (7.25)$$

Здесь $M_r$ - константа в условии Гёльдера для $r$-ой производной функции $f(t), t \in [-1,1]$.

Доказательство этой оценки можно найти в уже цитированной книге И.П. Натансона (*И.П. Натансон. Конструктивная теория функций.-М.-Л.:ГИТТЛ, 1949.-688с.*).

Для *среднеквадратичного (с чебышевским весом* $\sqrt{1-t^2}$*) отклонения* интерполяционного полинома $(P^{II}_{n-2}f)(t)$ функции $f \in C^{r,\alpha}_{[-1,1]}$ от этой функции находим

$$\left\|P^{II}_{n-2}f - f\right\|_{II} \le \sqrt{2\pi}E_{n-2} \qquad (7.26)$$

(вывод этого неравенства аналогичен выводу неравенства (5.28), проведенному в пятом разделе).

Используя неравенство (26) и действуя так же как при выводе формулы (5.30), получаем оценку для остаточного члена в формуле (11):

$$\left|\int_{-1}^{1}\left(f(t)-(P_{n-2}^{II}f)(t)\right)\sqrt{1-t^2}\,dt\right| \le \sqrt{\pi}E_{n-2}. \qquad (7.27)$$

А оценка для остаточного члена $R_n(t_0)$ в квадратурной формуле интерполяционного типа (18) выглядит следующим образом:

$$\left|R_n(t_0)\right| = \underline{O}\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \qquad (7.28)$$

Если функция $f(t), t \in [-1,1]$ в формулах (11) и (18) принадлежит классу гладкости $C_{[-1,1]}^{r,\alpha}$, то для $E_{n-2}$ в оценках остаточного члена (27) и (28) имеем неравенство (25).