УДК 519.9+575.1

Ю. И. Любич

ЛИНЕЙНЫЕ БЕРНШТЕЙНОВСКИЕ ПОПУЛЯЦИИ

Бернштейновской популяцией называется [1] квадратичное отображение

$$V : x_j' = \sum_{i,\, k=1}^{n} p_{ik,j} x_i x_k \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \tag{1}$$

с коэффициентами

$$p_{ki,\,j} = p_{ik,\,j} \geqslant 0; \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ik,\,j} = 1, \tag{2}$$

удовлетворяющее условию

$$V^2 = V \tag{3}$$

на гиперплоскости

$$s(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \tag{4}$$

В силу (2) отображение V сохраняет гиперплоскость (4) и, более того, оно сохраняет стохастический симплекс

$$x_j \geqslant 0; \quad s(x) = 1. \tag{5}$$

Указанный класс отображений был введен С. Н. Бернштейном [2—4] в связи с некоторыми вопросами математической генетики. С. Н. Бернштейн поставил и для $n = 3$ полностью решил проблему явного описания всех таких отображений. При $n > 3$ он указал некоторые важные частные случаи. Дальнейшее исследование бернштейновских популяций было проведено в наших работах [1, 5, 6]. В общем случае проблема С. Н. Бернштейна остается нерешенной. В настоящей заметке описываются бернштейновские популяции, линейные на гиперплоскости $s(x) = 1$.

Очевидно, для того чтобы квадратичное отображение V совпадало на гиперплоскости $s(x) = 1$ с некоторым линейным отображением, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $p_{ik,\,j}$ имели вид

$$p_{ik,\,j} = \frac{p_{ji} + p_{jk}}{2}. \tag{6}$$

При этом $(p_{ji})_{j,\,i=1}^{n}$ — матрица линейного отображения, определенная однозначно, ибо $p_{ji} = p_{ii,\,j}$.

Пусть бернштейновская популяция V линейна на гиперплоскости $s(x) = 1$ и P — соответствующее линейное отображение.

Условия (2) в силу формулы (6) эквивалентны тому, что матрица отображения P стохастична по столбцам:

$$p_{ji} \geqslant 0; \quad \sum_{j=1}^{n} P_{ji} = 1. \tag{7}$$

Между прочим, интересно отметить, что, так как $p_{ji} = p_{ii,j}$, то в линейном случае система условий (2) эквивалентна своей диагональной подсистеме.

Условие (3) на гиперплоскости $s(x) = 1$ эквивалентно тому, что

$$P^2 = P. \tag{8}$$

Действительно, $V = P$ при $s(x) = 1$, поэтому (3) эквивалентно тому, что $P^2x = Px$ при $s(x) = 1$, а это, в свою очередь, эквивалентно (8).

Итак, *описание линейных бернштейновских популяций равносильно описанию стохастических (по столбцам) проекторов.*

Для требуемого описания удобны следующие термины. Вектор e называется *неотрицательным* ($e \geqslant 0$), если все его координаты неотрицательны. Неотрицательный вектор e называется стохастическим, если сумма его координат равна единице: $s(e) = 1$. Множество номеров положительных координат вектора $e \geqslant 0$ называется *носителем* этого вектора и обозначается $\operatorname{supp} e$. Два неотрицательных вектора называются *ортогональными*, если их носители не пересекаются (что равносильно ортогональности векторов в смысле обычного координатного скалярного произведения). Аналогично определяются все эти термины для линейных форм. Напомним также, что, если e — вектор, f — линейная форма, то их тензорным произведением называется линейный оператор: $(f \times e)(x) = f(x)e$.

Лемма. *Общий вид стохастических проекторов дается формулой*

$$P = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (s_\alpha + c_\alpha) \otimes e_\alpha, \tag{9}$$

где e_α — попарно ортогональные стохастические векторы,

$$s_\alpha(x) = \sum_{j \in \operatorname{supp} e_\alpha} x_j, \tag{10}$$

c_α — неотрицательные линейные формы,

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} c_\alpha(x) = \sum_{j \bar{\in} \operatorname{supp} e_\alpha} x_j. \tag{11}$$

Доказательство. Если оператор P задан формулой с выполнением всех последующих условий, то

$$Px = \sum_{\alpha=1}^{\nu} [s_\alpha(x) + c_\alpha(x)]\, e_\alpha,$$

откуда видно, что $x \geqslant 0 \Rightarrow Px \geqslant 0$ и

$$s(Px) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} [s_\alpha(x) + c_\alpha(x)] = s(x),$$

т. е. P — стохастический оператор. Кроме того,

$$s_\beta(Px) = s_\beta(x) + c_\beta(x); \quad c_\beta(Px) = 0,$$

откуда

$$s_\beta(Px) + c_\beta(Px) = s_\beta(x) + c_\beta(x)$$

(линейные формы $f_\beta = s_\beta + c_\beta$ инвариантны относительно P). Поэтому $P^2x = Px$, т. е. P — проектор.

Теперь нужно доказать основную часть леммы — утверждение, обратное доказанному: *если P — стохастический проектор, то он имеет вид* (9) *с выполнением всех последующих условий.*

Рассмотрим подпространство I_P всех инвариантных относительно P линейных форм:

$$f(Px) = f(x).$$

Очевидно, $s \in I_P$, так что $\dim I_P \geqslant 1$. В подпространстве I_P выделим многогранный конус C_P неотрицательных форм. Так как $s \in C_P$ и $s > 0$, то конус C_P телесен. Пусть $f_1, \ldots, f_\nu$ — базис конуса C_P. Так как P — проектор, то координаты $(Px)_j$ вектора Px являются инвариантными линейными формами. Кроме того, они неотрицательны. Поэтому

$$(Px)_j = \sum_{\beta=1}^{\nu} \varepsilon_{j\beta} f_\beta(x) \quad (\varepsilon_{j\beta} \geqslant 0). \tag{12}$$

Пусть

$$f_\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{\alpha j} x_j \quad (\varphi_{\alpha j} \geqslant 0).$$

Тогда

$$f_\alpha(Px) = \sum_{\beta=1}^{\nu} f_\beta(x) \sum_{j=1}^{n} \varphi_{\alpha j} \varepsilon_{j\beta}. \tag{13}$$

Но $f_\alpha(Px) = f_\alpha(x)$. Так как в (13) все коэффициенты неотрицательны, а f_α — базисная точка конуса C_P, то

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{\alpha j} \varepsilon_{j\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

откуда

$$\varepsilon_{j\beta} = 0 \quad (j \in \operatorname{supp} f_\alpha, \ \beta \neq \alpha). \tag{14}$$

Следовательно,

$$(Px)_j = \varepsilon_{j\alpha} f_\alpha(x) \quad (j \in \operatorname{supp} f_\alpha). \tag{15}$$

Заметим, что каждый номер j входит в носитель некоторой f_α, ибо форма s, содержащая все координаты, является комбинацией форм $f_1, \ldots, f_\nu$. Поэтому все $(Px)_j$ имеют вид (15), и, следовательно,

$$Px = \left(\sum_{\alpha=1}^{\nu} f_\alpha \otimes e_\alpha \right)_j x, \tag{16}$$

где e_α — вектор с координатами $\varepsilon_{j\alpha}$. Очевидно, $e_\alpha \geqslant 0$ и $e_\alpha \neq 0$, ибо

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{\alpha j} \varepsilon_{j\alpha} = 1.$$

Соотношение (14) означает, что

$$\operatorname{supp} f_\alpha \cap \operatorname{supp} f_\beta = \varnothing \ (\alpha \neq \beta). \tag{17}$$

Поэтому

$$\operatorname{supp} e_\beta \subset \operatorname{supp} f_\beta \tag{18}$$

и

$$\operatorname{supp} e_\alpha \cap \operatorname{supp} e_\beta = \varnothing \ (\alpha \neq \beta), \tag{19}$$

т. е. векторы e_α и e_β $(\alpha \neq \beta)$ ортогональны.

Теперь запишем

$$f_\alpha(x) = s_\alpha(x) + c_\alpha(x),$$

где

$$s_\alpha(x) = \sum_{j \in \operatorname{supp} e_\alpha} \varphi_{\alpha j} x_j.$$

Применим к (16) форму s и оставим только координаты, входящие в $\operatorname{supp} e_\alpha$. В силу (17) получится

$$\sum_{j \in \operatorname{supp} e_\alpha} x_j = s(e_\alpha)\, s_\alpha(x).$$

Нормируя e_α так, чтобы $s(e_\alpha) = 1$ и соответственно нормируя f_α так, чтобы $f_\alpha \otimes e_\alpha$ не изменилось, получаем

$$s_\alpha(x) = \sum_{j \in \operatorname{supp} e_\alpha} x_j. \tag{20}$$

Кроме того, так как теперь

$$s(x) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} f_\alpha(x) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} s_\alpha(x) + \sum_{\alpha=1}^{\nu} c_\alpha(x),$$

то из (20) и (19) следует

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} c_\alpha(x) = \sum_{j \bar{\in} \bigcup \operatorname{supp} e_\alpha} x_j.$$

Лемма доказана. Из нее следует

Теорема. *Общий вид бернштейновских популяций, линейных на гиперплоскости* $s(x)=1$ *дается (с точностью до перестановки координат) следующими формулами:*

$$\begin{gathered} x_1' = \varepsilon_{11} f_1(x)\, s(x), \ \ldots, \ x_{n_1}' = \varepsilon_{n_1 1} f_1(x)\, s(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n_{\nu-1}+1}' = \varepsilon_{n_{\nu-1}+1,\nu} f_\nu(x)\, s(x), \ \ldots, \ x_{n_\nu}' = \varepsilon_{n_\nu \nu} f_\nu(x)\, s(x), \\ x_{n_\nu+1}' = 0, \ \ldots, \ x_n' = 0, \end{gathered} \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered} f_1(x) = \sum_{j=1}^{n_1} x_j + \sum_{k=n_\nu+1}^{n} c_{1k} x_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_\nu(x) = \sum_{j=n_{\nu-1}+1}^{n_\nu} x_j + \sum_{k=n_\nu+1}^{n} c_{\nu k} x_k, \end{gathered}$$

матрицы $(c_{\alpha k})$ *и* $(\varepsilon_{j\alpha})$ — *стохастические по столбцам, причем все* $\varepsilon_{j\alpha}$, *стоящие в* (21), *положительны, остальные* $\varepsilon_{j\alpha}=0$.

В терминах математической генетики (см. [1]) доказанная теорема означает, что все линейные бернштейновские популяции обладают элементарной генной структурой: формулы (21) задают оператор оплодотворения, а формулы (22) — оператор мейоза. Отметим, что введенное в [1] условие нормальности популяции выполняется среди линейных популяций лишь для «единичного» отображения:

$$x_j' = x_j s(x) \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Любич Ю. И. Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций.— «Успехи мат. наук», 1971, т. XXVI, вып. 5, с. 52—116.
2. Bernstein S. N. — «Comptes Rendus Academie des Sciences» (Paris), 1923, a. 177, p. 581—584.
3. Bernstein S. N. — «Comptes Rendus Academie des Sciences» (Paris). 1923, a. 177, p. 528—531.
4. Бернштейн С. Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности.— «Учен. зап. науч.-исслед. кафедр Украины. Отд. мат.», 1924, вып. 1, с. 83—115.
5. Любич Ю. И. К математической теории наследственности.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 209, № 5, с. 1028—1030.
6. Любич Ю. И. Об одной теореме С. Н. Бернштейна.— «Сиб. мат. ж.», 1973, № 3, с. 678—679.