УДК 517.55

В. Н. Логвиненко

ТЕОРЕМЫ ТИПА ТЕОРЕМЫ М. КАРТРАЙТ И ВЕЩЕСТВЕННЫЕ МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Через C^n мы обозначим n-мерное комплексное линейное пространство, через R^n — вещественную гиперплоскость в C^n, через R^n_+ — положительный гипероктант в R^n. В пространстве C^n мы рассматриваем метрики, порожденные нормами

$$|z|_p = \left\{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}},\ 1 \leqslant p < \infty,\ \text{и}\ |z|_\infty = \max_{1 \leqslant j < n} |z_j|,$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n$. Пусть $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс. По определению положим

$$z^k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}, k_1! = k_1! \ldots k_n!$$

Мы говорим, что целая функция $f(z)$, заданная в C^n, имеет тип $\sigma \in (0, \infty)$ при порядке $\rho \in (0, \infty)$, если величина

$$\sup_{z \in C^n} \{ |f(z)| \exp(-A|z|_1^\rho) \}$$

конечна при любом $A > \sigma$ и бесконечна при любом $A < \sigma$.

Определение 1. *Множество $E \subset R^n$ называется вещественным множеством единственности (или просто множеством единственности) для данных $\rho \in (0, \infty)$ и $\sigma \in (0, \infty)$, если любая целая функция $f(z)$, $z \in C^n$, растущая не быстрее типа σ при порядке ρ и обращающаяся в нуль на E, равна нулю тождественно.*

Любое множество $E \subset R^n$ положительной n-мерной меры Лебега является, очевидно, множеством единственности для всех конечных ρ и σ. Ясно также, что для того, чтобы множество $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \subset R^n$ была множеством единственности для данных ρ и σ, необходимо и достаточно, чтобы каждое из множеств $E_j \subset R^1$ было множеством единственности для этих ρ и σ. Рассмотрение вещественных множеств единственности в R^n, являющихся прямым произведением множеств из R^1, сводится, таким образом, к соответствующим одномерным задачам, довольно подробно изученным (см., например, [1, гл. IV]). Изучением счетных множеств единственности общего положения в R^n занимались Кореваар [2], получивший достаточные условия того, что подмножество целочисленных точек R^2 является множеством единственности для функций, голоморфных и ограниченных в области $\{(z_1, z_2) : \mathrm{Re}\, z_1 > 0, \mathrm{Re}\, z_2 > 0\}$ и Л. И. Ронкин [3], доказавший следующую теорему о вещественных множествах единственности для целых функций экспоненциального типа[1]. Пусть $\mu_E(r)$ — число точек дискретного множества $E \subset R^n$, попавших в гиперкуб $\{x \in R^n : |x|_\infty < r\}$, а

$$d_E = \limsup_{r \to \infty} \{ \mu_E(r) / (2r)^n \}.$$

[1] В той же работе Л. И. Ронкина показано, что если дополнительно к условиям сформулированной теоремы потребовать, чтобы $\sup_{x \in R^n} |f(x)| < \infty$, то значение константы A можно уточнить, положив

$$A = \frac{2}{n!e} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \left\{ 1 + \frac{25}{3} \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{29}{3}\right)^{n-j-2} \right\}^{-1}.$$

Как сообщил Л. И. Ронкин, уже после опубликования работы им найдено для этого случая еще более точное значение константы $A : A = \frac{2}{n!e}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n$.

Теорема. (Л. И. Ронкин [3]) *Пусть счетное множество $E \subset R^n$ таково, что*

$$\inf |x-y|_2 = h > 0,\ x \in E,\ y \in E,\ x \neq y.$$

Пусть, далее, целая функция $f(z)$, $z \in C^n$ удовлетворяет условию $f(x)=0$ $\forall x \in E$ и имеет экспоненциальный тип $\sigma_f < Ah^{n-1}d_E$, где

$$A = \frac{2}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}\left\{\frac{n-1}{2}+e+\sum_{j=0}^{n-2}\left[\left(\frac{29}{3}\right)^{n-j-2}\left(\frac{13}{3}j+\frac{25}{3}e\right)\right]\right\}^{-1}. \quad (1)$$

Тогда $f(z) \equiv 0$.

Из результатов работы [4] вытекают иные достаточные условия того, что множество $E \subset R^n$ является множеством единственности для целых функций экспоненциального типа. В этой работе были введены следующие определения.

Определение 2. *Множество $E \subset R^n$ называется δ-сетью, если*

$$\sup_{x \in R^n} \operatorname{dist}(x, E) \leqslant \delta, \quad (\operatorname{dist}(x, y) = |x-y|)_1.$$

Определение 3. *Множество $E \subset R^n$ называется нормирующим при данном $\sigma \in (0, \infty)$, если для любой целой функции $f(z)$, $z \in C^n$, экспоненциального типа не выше σ, удовлетворяющей условию*

$$\sup_{x \in E} |f(x)| \leqslant M < \infty,$$

выполняется неравенство

$$\sup_{x \in R^n} |f(x)| \leqslant CM, \quad (2)$$

где величина $C < \infty$ зависит от n, σ и множества E и не зависит от функции f

Там же доказана такая теорема типа теоремы М. Картрайт.

Теорема 1. *Пусть p — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенствам*

$$p > en,\ p > \frac{e^2}{2}\max_{0 \leqslant \tau \leqslant 2}\left\{e^{\tau}\left(\frac{\sin \tau}{\tau}\right)^p\right\}^{n-1}, \quad (3)$$

и пусть σ и δ — положительные числа, удовлетворяющие условию $2p\sigma\delta < 1$. Тогда любая δ-сеть $E \subset R^n$ является нормирующим множеством для целых функций $f(z)$, $z \in C^n$, экспоненциального типа не выше σ. Более того, неравенство (2) выполняется при $C = (1-\sigma\delta)^{-1}$.

Поскольку каждое нормирующее при данном σ множество является множеством единственности для $\rho = 1$ и этого σ, то в теореме 1 содержится как частный случай следующая теорема о множествах единственности.

Теорема 2. *Если положительные числа σ и δ удовлетворяют условию $2p\sigma\delta < 1$, где p — наименьшее натуральное число, для которого выполняются неравенства (3), то любая δ-сеть $E \subset R^n$ является множеством единственности для целых функций экспоненциального типа не выше σ.*

Сравним утверждения теоремы Л. И. Ронкина и теоремы 2. В теореме Л. И. Ронкина условия на множество единственности формулируются в терминах верхней плотности и несближаемости точек этого множества, а в теореме 2 требуется равномерное, в некотором смысле, распределение этих точек. С другой стороны, наименьшее натуральное число p, удовлетворяющее неравенствам (3), меньше чем $(2A)^{-1}$, где величина A определяется равенством (1), а значит, ограничения на тип функции $f(z)$, накладываемые в теореме Л. И. Ронкина, жестче.

Основной результат настоящей работы — аналог теоремы 2 для случая произвольного конечного порядка.

Определение 4. *Множество $E \subset R^n$ называется δ-сетью порядка ρ, $0 < \rho < \infty$, $\rho \neq 1$, если при отображении пространства R^n в себя:*

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (|x_1| \overset{\rho}{\operatorname{sign}} x_1 \ \ldots, \ |x_n| \overset{\rho}{\operatorname{sign}} x_n),$$

множество E переходит в *δ-сеть в смысле определения 2.*

Теорема 3. *Пусть даны натуральное число n и число $\rho \in (0,1)$ и пусть q — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству*

$$q > (ne^{1/(eq^2n)} + 1)\left(en + \frac{1}{\rho}\right).$$

Тогда, если положительные числа σ и δ связаны неравенством $2q\sigma^{\rho}\delta < 1$, то любая δ-сеть $E \subset R^n$ порядка ρ есть множество единственности при данных ρ и σ.

Если $\rho \in (1, \infty)$ и *q — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству*

$$q > (ne^{8/n} + 1)(ne + 4)(4\rho)^n n^{\rho}, \tag{4}$$

а положительные числа σ и δ связаны неравенством

$$2q\sigma^{3\frac{1+\operatorname{sign}(\sigma-1)}{2}+\delta 1} < 1,$$

то любая δ-сеть $E \subset R^n$ порядка ρ есть множество единственности при данных ρ и σ.

Теорему 3 мы выводим из следующей теоремы, одномерные аналоги которой хорошо известны.

Теорема 4. *Пусть заданы натуральное число n и число $\rho \in (0, 1)$, пусть r — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству*

$$r > (ne^{1/e\rho^2 n} + 1)\left(en + \frac{1}{\rho}\right),$$

и пусть положительные числа σ и δ удовлетворяют условию $2r\sigma^{\rho}\delta < 1$. Тогда, каково бы ни было множество $E \subset R^n$ являющееся δ-сетью порядка ρ, любая целая функция $f(z)$, $z \in C^n$, растущая не быстрее типа σ при порядке ρ и ограниченная на E, есть константа.

Теорему 4 мы, в свою очередь, выводим из теоремы 1 и, как будет видно из доказательства, любое ослабление условий на множество E в теореме 1, при котором оно остается нормирующим при данном σ, повлечет за собой соответствующие усиления теорем 2, 3 и 4. Поэтому, доказав в § 1 теоремы 3 и 4, мы доказываем в § 2, что достаточные условия, сформулированные в теореме 1, того, что множество $E \subset R^n$ является нормирующим при данном $\sigma \subset (0, \infty)$, можно несколько ослабить.

В конце § 2 показано, что при некоторых дополнительных условиях множество $E \subset R^n$, являющееся множеством единственности для целых функций экспоненциального типа не выше σ, есть нормирующее множество при $\sigma' = \sigma/(2p)$, где p — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенствам (3). Основные идеи доказательства и сама формулировка этой теоремы родились в беседе с Б. Я. Левиным. Пользуюсь случаем выразить ему свою искреннюю признательность за внимание к работе и ценные советы. Я также весьма признателен Л. И. Ронкину за полезные обсуждения и глубоко благодарен Г. М. Фельдману за помощь в оформлении настоящей работы.

§

Нам понадобятся следующие две леммы. Первая из них, по-видимому, хорошо известна. Формулировка второй для случая $\rho = 1$ приведена в [4].

Лемма 1. *Пусть $f(z)$, $z \in C^n$ — целая функция экспоненциального типа не выше σ, ограниченная на R^n, а E — некоторая δ-сеть в R^n. Если $\sigma\delta < 1$ и $\sup\limits_{x \in E} |f(x)| \leqslant 1$, то*

$$\sup_{x \in R^n} |f(x)| \leqslant (1 - \sigma\delta)^{-1}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\sup\limits_{x \in R^n} |f(x)| = M < \infty$ и пусть точка $x^{(\varepsilon)} \in R^n$ такова, что $|f(x^{(\varepsilon)})| > M - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$. Существует такая точка $y^{(\varepsilon)} \in E$, что $|x^{(\varepsilon)} - y^{(\varepsilon)}|_1 \leqslant \delta$. Имеем

$$|f(y^{(\varepsilon)}) - f(x^{(\varepsilon)})| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in R^n} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \right\} \cdot |y_j^{(\varepsilon)} - x_j^{(\varepsilon)}|. \tag{6}$$

По известному неравенству С. Н. Бернштейна

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ \sup_{x \in R^n} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \right) \right\} \leqslant \sigma \sup_{x \in R^n} |f(x)| = \sigma M.$$

Учитывая это, из (6) получаем

$$|f(x^{(\varepsilon)})| \leqslant |f(y^{(\varepsilon)})| + \sigma M\delta \leqslant 1 + \sigma M\delta$$

или, в силу выбора точки $x^{(\varepsilon)}$,

$$M - \varepsilon < 1 + \sigma M\delta.$$

Значит, $M < \frac{1+\varepsilon}{1-\sigma\delta}$, что в силу произвольности ε эквивалентно (5). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $f(z) = \sum_{|k|_1=0}^{\infty} c_k z^k$ — *целая функция, заданная в* C^n *и имеющая тип* $\sigma \in (0, \infty)$ *при порядке* $\rho \in (0, \infty)$. *Тогда, если натуральное число* $p > e\rho\sigma n^\rho$, *то*

$$\max_{|z|_\infty \leqslant m^{1/\rho}} \left| f(z) - \sum_{|k|_1=0}^{pm} c_k z^k \right| = o(1), \quad m \to \infty.$$

Доказательство. Согласно известной формуле [5, с. 21]

$$(e\rho\sigma)^{1/\rho} = \limsup_{|k|_1 \to \infty} \left\{ |k|_1^{1/\rho} \left(|c_k| \frac{k!}{|k|_1!} \right)^{1/|k|_1} \right\}.$$

Зададимся таким $\varepsilon > 0$, чтобы $e\rho(\sigma + \varepsilon) n^\rho < p$. Для всех достаточно больших $|k|_1$ имеем

$$|c_k| \leqslant \frac{\{e\rho(\sigma+\varepsilon)\}^{|k|_1/\rho} |k|_1!}{|k|_1^{|k|_1/\rho} k!}.$$

Таким образом, при всех достаточно больших m выполняется неравенство

$$\max_{|z|_\infty \leqslant m^{1/\rho}} \left| f(z) - \sum_{|k|_1=0}^{pm} c_k z^k \right| = \max_{|z|_\infty \leqslant m^{1/\rho}} \left| \sum_{|k|_1=pm+1}^{\infty} c_k z^k \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|k|_1=pm+1}^{\infty} \left(\frac{e\rho(\sigma+\varepsilon)}{|k|_1} \right)^{|k|_1/\rho} \frac{|k|_1!}{k!} m^{|k|_1/\rho} = \sum_{\nu=pm+1}^{\infty} \left(\frac{e\rho(\sigma+\varepsilon) m}{\nu} \right)^{\nu/\rho} \sum_{|k|_1=\nu} \frac{|k|_1!}{k!} =$$

$$= \sum_{\nu=pm+1}^{\infty} \left(\frac{e\rho(\sigma+\varepsilon) n^\rho m}{\nu} \right)^{\nu/\rho} < \sum_{\nu=pm+1}^{\infty} \left(\frac{e\rho(\sigma+\varepsilon) n^\rho}{p} \right)^{\nu/\rho} = o(1), \quad m \to \infty.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Будем считать (это не ограничивает общности), что $\sup\limits_{x \in E} |f(x)| \leqslant 1$. Кроме того, пусть сначала $\sigma = 1$.

Пусть $\sum_{|k|_1=0}^{\infty} c_k z^k$ — разложение целой функции $f(z)$, удовлетворяющей условиям теоремы 4 с $\sigma = 1$, в кратный ряд Тейлора. Сопоставим функции $f(z)$ последовательность целых функций $\{\varphi_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$:

$$\varphi_m(z) = \boldsymbol{P}_{pm}(z) \cdot \prod_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\sin(\omega m^{-1/\rho} z_j)}{\omega m^{-1/\rho} z_j} \right\}^{pm}.$$

Здесь p — число, определенное в лемме 2, т. е. $p \leqslant [e\rho n] + 1$,

$$\boldsymbol{P}_{pm}(z) = \sum_{|k|_1=0}^{pm} c_k z^k, \quad \omega = n e^{1/(p\rho)} + 1.$$

Ясно, что каждая из функций $\varphi_m(z)$ есть целая функция экспоненциального типа $\omega m^{1-1/\rho} p$. Кроме того, $\sup_{x \in R^n} |\varphi_m(x)| < \infty$. И, наконец, поскольку при $w \in R^1$, $|w| \leqslant 1$ справедливо неравенство $\left| \left(\frac{\sin w}{w} \right)^{pm} - 1 \right| \leqslant pm |w|^2$, постольку последовательность $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на каждом компакте в R^n. Таким образом, если мы покажем, что

$$\sup_m \left\{ \sup_{x \in R^n} |\varphi_m(x)| \right\} < \infty, \tag{7}$$

то и $\sup_{x \in R^n} |f(x)| < \infty$, и, так как порядок функции $f(z)$ меньше 1, то отсюда уже следует утверждение теоремы 4.

Пусть $E_m = \{x \in E : |x|_\infty \leqslant m^{1/\rho}\}$. Из леммы 2 следует, что

$$\sup_{x \in E_m} |\varphi_m(x)| \leqslant 1 + 0(1), \quad m \to \infty.$$

Оценим теперь функцию $\varphi_m(x)$ вне гиперкуба $\{x \in R^n : |x|_1 \leqslant \leqslant m^{1/\rho}\}$. Вначале нам понадобится оценить величину $|\boldsymbol{P}_{pm}(x)|$. Пусть число B удовлетворяет неравенству $1 < B$. Тогда величина $C = \sup_{z \in C^n} \{|f(z)| \exp(-B |z|_1^\rho)\}$ конечна. По неравенству Коши имеем

$$|c_k| \leqslant C r^{-k} \exp(B |r|_1^\rho),$$

где $r = (r_1, \ldots, r_n)$ — произвольная точка R_+^n. Производя несложный подсчет, убеждаемся в том, что при всех k

$$|c_k| \leqslant A \frac{(|k|_1!)^{1-1/\rho}}{k!},$$

где через A обозначена конечная величина, не зависящая от k. Полагая $r=(|z_1|, \ldots, |z_n|)$, имеем

$$|\boldsymbol{P}_{pm}(z)| < A \sum_{|k|_1=0}^{pm} \frac{(|k|_1!)^{1-1/\rho} r^k}{k!} = A \sum_{\nu=0}^{pm} \frac{1}{(\nu!)^{1/\rho}} \sum_{|k|_1=\nu} \frac{|k|_1!}{k!} r^k =$$

$$= A \sum_{\nu=0}^{pm} \frac{|r|_1^\nu}{(\nu!)^{1/\rho}}. \qquad (8)$$

Если $|r|_1 \geqslant m^{1/\rho}$, то, используя известную оценку (см., например, [6, с. 168]), из (8) получаем

$$|\boldsymbol{P}_{pm}(z)| \leqslant A \frac{|r|_1^{pm}}{m^{pm/\rho}} \sum_{\nu=0}^{pm} \frac{m^{\frac{\nu-pm}{\rho}} m^{(pm)/\rho}}{(\nu!)^{1/\rho}} <$$

$$< A \frac{|r|_1^{pm}}{m^{pm/\rho}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(m^{1/\rho})^\nu}{(\nu!)^{1/\rho}} \leqslant A \frac{|r|_1^{pm}}{m^{pm/\rho}} e^{m/\rho}. \qquad (9)$$

Так как при $|x|_\infty \geqslant m^{1/\rho}$ заведомо выполнено (9), то, учитывая, что $\omega = n^{1/(\rho q)}+1$, приходим к неравенству

$$|\varphi_m(x)| \leqslant A \frac{|x|_1^{pm} e^{m/\rho}}{m^{pm/\rho}} \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{\sin(\omega m^{-1/\rho} x_j)}{\omega m^{-1/\rho} x_j} \right|^{pm} \leqslant$$

$$\leqslant A n^{pm} \frac{|x|_\infty^{pm} e^{m/\rho}}{m^{pm/\rho}} (\omega m^{-1/\rho} |x|_\infty)^{-pm} \leqslant A \left(\frac{n e^{1/p\rho}}{\omega}\right)^{pm} = A \left(\frac{n e^{1/p\rho}}{n e^{1/p\rho}+1}\right)^{pm}.$$

Значит, для всех достаточно больших m выполняется неравенство

$$\sup_{|x|_\infty \geqslant m^{1/\rho}} |\varphi_m(x)| \leqslant 1.$$

Чтобы доказать (7), осталось лишь оценить $|\varphi_m(x)|$ **на множестве** $Q_m = \{x \in R^n : |x|_\infty \leqslant m^{1/\rho}\}$. Пусть $\tilde{x}$ — образ $x \in Q_n$ при отображении R^n в себя: $(x, \ldots, x_n) \to (|x_1|)^\rho \operatorname{sign} x_1, \ldots, |x_n|^\rho \times \times \operatorname{sign} x_n)$. Пусть E_m' — образ множества E_m при этом отображении, а $\tilde{y}$ — та точка E_m', расстояние которой от $\tilde{x}$ не превосходит 2δ. Через y обозначим прообраз $\tilde{y}$ при указанном отображении. Имеем

$$\operatorname{dist}(x, E_m) \leqslant \operatorname{dist}(x, y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| = \sum_{j=1}^{n} |(|x_j|^\rho)^{1/\rho} \operatorname{sign} x_i -$$

$$-(|y_j|^\rho)^{1/\rho} \operatorname{sign} y_j| = \sum_{\operatorname{sign} x_j \cdot \operatorname{sign} y_j \geqslant 0} ||\tilde{x}_j|^{1/\rho} - |\tilde{y}_j|^{1/\rho}| +$$

$$+ \sum_{\operatorname{sign} x_j \cdot \operatorname{sign} y_j = -1} (|\tilde{x}_j|^{1/\rho} + |\tilde{y}_j|^{1/\rho}).$$

Так как $|\tilde{x}|_\infty \leqslant m$ и $|\tilde{y}|_\infty \leqslant m$, то

$$\sum_{\operatorname{sign} x_j \cdot \operatorname{sign} y_j \geqslant 0} \left| |\tilde{x}_j|^{1/\rho} - |\tilde{y}_j|^{1/\rho} \right| \leqslant \frac{1}{\rho} m^{1/\rho - 1} \sum_{\operatorname{sign} x_j \cdot \operatorname{sign} y_j \geqslant 0} |\tilde{x}_j - \tilde{y}_j|.$$

Учитывая, что для индексов j, входящих во вторую сумму, выполняются неравенства: $|\tilde{x}_j| \leqslant 2\delta$ и $|\tilde{y}_j| \leqslant 2\delta$, получаем

$$\sum_{\operatorname{sign} x_j \cdot \operatorname{sign} y_j = -1} \left(|\tilde{x}_j|^{1/\rho} + |\tilde{y}_j|^{1/\rho} \right| = (2\delta)^{1/\rho} \sum_{\operatorname{sign} x_j \cdot \operatorname{sign} y_j = -1} \left\{ \left(\frac{|\tilde{x}_j|}{2\delta} \right)^{1/\rho} + \left(\frac{|\tilde{y}_j|^{1/\rho}}{2\delta} \right) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant (2\delta)^{1/\rho} \sum_{\operatorname{sign} x_j \cdot \operatorname{sign} y_j = -1} \left\{ \frac{|x_j|}{2\delta}^{-1/\rho} + \frac{|y_j|}{2\delta}^{-1/\rho} \right\} = (2\delta)^{1/\rho - 1} \sum_{\operatorname{sign} x_j \cdot \operatorname{sign} y_j = -1} |\tilde{x}_j - \tilde{y}_j|.$$

Значит, при достаточно больших m для $x \in Q_m$

$$\operatorname{dist}(x, E_m) \leqslant \frac{1}{\rho} m^{1/\rho - 1} |\tilde{x} - \tilde{y}|_1 \leqslant \frac{2\delta}{\rho} m^{1/\rho^{-1}}.$$

Обозначив через σ_m экспоненциальный тип функции $\varphi_m(z)$ и учитывая, что $p \leqslant [e\rho n] + 1$, имеем неравенство

$$\frac{2\delta}{\rho} m^{1/\rho - 1} \sigma_m = \frac{2\delta}{\rho} \omega p < \frac{2\delta}{\rho} (n e^{1/e\rho^2 n} + 1)(e\rho n + 1) < 1,$$

что в силу леммы 1 (в качестве E берется множество $E'_m \cup$ $\cup \{R^n \diagdown Q_m\}$) влечет (7). Для случая $\sigma = 1$ теорема доказана.

Случай произвольного $\sigma \in (0, \infty)$ сводится к случаю $\sigma = 1$ подобным преобразованием.

Доказательство теоремы 3. Если $\rho < 1$, то утверждение теоремы 3 содержится в утверждении теоремы 4; если $\rho = 1$, то теорема 3 — следствие теоремы 2. Разберем случай $\rho > 1$. Определим число $q = 2\left[\frac{\rho}{2} + 1\right] + 1$. Ясно, что нечетное число $q > \rho + 1$. Пусть $\omega = e^{2\pi i/q}$, а $\Omega = (\omega, \ldots, \omega) \in C^n$. Для любого мультииндекса $k = (k_1, \ldots, k_n)$ и рассматриваемой целой функции $f(z)$ через $f(z, \Omega^k)$ обозначим целую функцию $f(z_1\omega^{k_1}, \ldots, z_n\omega^{k_n})$. Рассмотрим произведение

$$\Pi f(z, \Omega^k),$$

распространенное на все мультииндексы k, удовлетворяющие условию $|k|_\infty \leqslant n - 1$. Это произведение, как легко видеть, представляет собой целую функцию $\varphi(z_1^q, \ldots, z_n^q)$. Функция $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ такая целая, ее порядок не превосходит ρ/q, а тип σ_φ (при порядке ρ/q) не превосходит величины $q^n n^{\rho(q-1)/q}$, что легко получается применением неравенства Гельдера.

Обозначим через Q мультииндекс $(q, \ldots, q) \in R^n$. Имеем очевидную импликацию:

$$x \in E, \rightarrow \varphi(x^Q) = 0.$$

Пусть E^Q — образ E при отображении R^n в себя: $x \to x^Q$. Ясно, что множество E^Q является δ-сетью в R^n порядка ρ/q. Из выполнения условия (4) следует выполнение условия

$$2r\delta\sigma_{\varphi}^{p/q} < 1,$$

где натуральное число r определено в условии теоремы 4. Применение этой теоремы и завершает доказательство теоремы 3.

§ 2

В этом параграфе, как уже говорилось ранее, мы несколько ослабим сформулированные в теореме 1 условия того, что множество $E \subset R^n$ является нормирующим при данном $\sigma \in (0, \infty)$.

Определение 5. *Пусть множество* $E \subset R^n$ *является нормирующим при данном* $\sigma \in (0, \infty)$, *т. е. для любой целой функции* $f(z)$, $z \in C^n$ *экспоненциального типа не выше* σ, *удовлетворяющей неравенству* $\sup\limits_{x \in E} |f(x)| \leqslant 1$, *выполняется неравенство*

$$\sup_{x \in R^n} |f(x)| \leqslant C, \qquad (10)$$

где величина $C < \infty$ *от функции* f *не зависит. Наименьшую из величин* C, *для которых неравенство* (10) *выполняется при всех функциях* f *из рассматриваемого класса, мы назовем нормирующей постоянной множества* E *при данном* σ *и будем обозначать через* $T(E; \sigma)$.

Сформулируем два элементарных свойства нормирующих множеств и их нормирующих постоянных.

А. *Пусть* $E \subset R^n$, *а* h — *произвольный вектор из* R^n. *Через* E_h *обозначим множество* $\{x \in R^n : x - h \in E\}$. *Если* E — *нормирующее множество при данном* σ, *то и* E_h — *нормирующее множество при этом* σ. *Более того,*

$$\Gamma(E_h; \sigma) = \Gamma(E; \sigma).$$

В. *Пусть* $\lambda \neq 0$ — *произвольное вещественное число, а* $E \subset R^n$. *Через* λE *обозначим множество* $\{x \in R^n : \lambda^{-1} x \in E\}$. *Если* E — *нормирующее множество при данном* σ, *то множество* λE *также является нормирующим при* $\sigma/|\lambda|$, *причем*

$$\Gamma\left(\lambda E; \ \frac{\sigma}{|\lambda|}\right) = \Gamma(E; \sigma).$$

Доказательства этих свойств просты и мы их опускаем. Свойство нормирующих множеств, выраженное следующей теоремой, не столь тривиально.

Теорема 5. *Если множество* $E \subset R^n$ *нормирующее при данном* σ, *то при любом векторе* $y \in R^n$ *и любом конечном числе* $m > 0$ *множество* $E(y, m) = \{x \in E : |x - y|_{\infty} \geqslant m\}$ *является нормирующим при этом* σ.

Доказательство. Рассмотрим множество $E' = \frac{1}{m}(E - y)$. Согласно **А** и **В**, множество E' — нормирующее при σm, а $\Gamma(E;\ \sigma) = \Gamma\left(\frac{1}{m}(E - y);\ \sigma m\right)$. Ясно также, что $E'(0;\ 1) = \frac{1}{m}(E \times \times (y;\ m)_{-y})$ и $\Gamma(E'(0,\ 1);\ \sigma m) = \Gamma(E(y,\ m);\ \sigma)$. Таким образом, надлежит показать, что множество $E'(0;\ 1)$ — нормирующее при данном σ, если таковым было множество E'. Доказательство этого утверждения мы проведем в два этапа.

1. Вначале мы покажем, что множество $E'(0,\ 1)$ является множеством единственности для того σ, при котором E' было нормирующим. Предположим противное. Тогда существует целая функция $f(z)$, $z \in C^n$, экспоненциального типа не выше σ, обращающаяся в нуль на $E'(0,\ 1)$ и не равная нулю тождественно. Пусть $x^{(0)} \in R^n$ — точка, для которой $|x^{(0)}|_\infty \geqslant 3$, а $|f(x^{(0)})| \neq 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $|x_1^{(0)}| \geqslant 3$ и $f(x^{(0)}) = 1$. Рассмотрим последовательность целых функций

$$\varphi_k(z) = f(z)\frac{P_k(z)}{P_k(x^{(0)})},\quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

где $P_k(z) = \sum_{j=-k}^{k}\left(z_1 - \frac{j}{k}\right)$. *Ясно, что каждая из функций* $\varphi_k(z)$ имеет тот же экспоненциальный тип, что и $f(z)$, обращается в нуль на $E'(0,\ 1)$ и $\varphi_k(x^{(0)}) = 1$. Кроме того,

$$\gamma_k = \max_{|x|_\infty \leqslant 1}|\varphi_k(x)| \leqslant \max_{|x|_\infty \leqslant 1}|f(x)|\frac{1}{2k} \to 0,\ k \to \infty.$$

Так как $\max\limits_{x \in E}|\varphi_k(x)| \leqslant \gamma_k$, а множество E' — нормирующее при данном σ, то

$$\sup_{x \in R^n}|\varphi_k(x)| \leqslant \Gamma(E',\ \sigma)\cdot\gamma_k \to 0,\ k \to \infty,$$

что противоречит условию $\varphi_k(x^{(0)}) = 1$. Значит, $E'(0,\ 1)$ — множество единственности для $\rho = 1$ и данного σ.

2. Докажем, что $E'(0,\ 1)$ — нормирующее множество при данном σ. Допустим противное. Тогда существует последовательность $\{\varphi_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ целых функций экспоненциального типа не выше σ, модуль которых ограничен 1 на $E'(0,\ 1)$, но

$$\sup_{x \in R^n}|\varphi_k(x)| \uparrow \infty,\ k \to \infty.$$

Поскольку E нормирующее, то это означает, что

$$\max_{|x|_\infty \leqslant 1}|\varphi_k(x)| = A_k \to \infty,\ k \to \infty.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\inf\limits_k A_k \geqslant 1$, а точки $x^{(k)} \in \{x \in R^n : |x|_\infty \leqslant 1\}$, где A_k достигается, сходятся к точке $x^{(0)}$. Рассмотрим последовательность $\Psi_k(z) = \frac{\varphi_k(z)}{A_k}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ Эта последовательность образует нормальное семейство, так как экспоненциальные типы функций $\Psi_k(z)$ не превосходят σ и

$$\sup_k \{\sup_{x \in R^n} |\Psi_k(x)|\} \leqslant \Gamma(E', \sigma).$$

Выберем подпоследовательность $\{\Psi_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся в равномерно-компактной топологии C^n к некоторой функции $\Psi_0(z)$. Эта предельная функция есть целая функция экспоненциального типа не выше σ, обращающаяся в нуль на $E'(0, 1)$. По доказанному в п. 1 $\Psi_0(z) \equiv 0$, что противоречит условию $\Psi_0(x^{(0)}) = 1$. Теорема доказана.

Таким образом, утверждения теорем 2, 3 и 4 остаются верными, если множество E, фигурирующее в формулировках этих теорем, является δ-сетью (порядка ρ) не во всем пространстве R^n, а лишь в его части: $\{x \in R^n : |x - y|_\infty \geqslant m\}$, где y — произвольный вектор из R^n, а m — любое конечное положительное число.

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть положительные числа* σ и δ *связаны соотношением* $2\rho\sigma\delta < 1$ *и пусть* E — *произвольная* δ-*сеть в* R^n. *Тогда для любого вектора* $y \in R^n$ *и любого конечного положительного числа* m *выполняется неравенство*

$$\Gamma(E(y, m); \sigma) \leqslant \exp\left\{\frac{\sigma n}{1 - \left\{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\varepsilon} + m + \delta\right)\right\}^n}\right\}^{\nu}, \tag{11}$$

где

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2\rho\delta} - \sigma}{2\left(2\left[\frac{m+\delta}{\delta}n\right] + 1\right)^n n}, \quad a\nu = \frac{1}{1 - \frac{\sigma\delta + 1/(2\rho)}{2}} \cdot 4^{\left(2\left[\frac{m+\delta}{\delta}n\right]+1\right)^n}.$$

Доказательство. По свойству **A** можно считать, что $y = 0$. По теореме 5 величина $\Gamma = \Gamma(E(0, m); \sigma) < \infty$. В силу нормальности семейства целых функций экспоненциального типа не выше σ, модуль которых ограничен 1 на $E(0, m)$, в нем найдется функция $f(z)$, для которой

$$\sup_{x \in R^n} |f(x)| = \Gamma.$$

Каждому мультииндексу $k = (k_1, \ldots, k_n)$, такому, что $|k|_\infty \leqslant \leqslant \frac{m+\delta}{\delta} n$, сопоставим точку ${}_k x = \left(k_1 \frac{\delta}{n}, \ldots, k_n \frac{\delta}{n}\right)$. Множество

$$F = E(0, m) \cup \bigcup_{|k|_\infty \leqslant \frac{m+\delta}{\delta} n} {}_k x$$

является δ-сетью в R^n. Действительно, если точка $x \in R^n$ такова, что $|x|_\infty \geqslant m + \delta$, то найдется такой вектор $y \in E(0, m)$, что

$|x-y|_1<\delta$. Если же $|x|_\infty<m+\delta$, то при $k=\left(\left[\left|\frac{x_1 n}{\delta}\right|\right]\operatorname{sign}x_1,\ldots,\left[\left|\frac{x_n n}{\delta}\right|\right]\operatorname{sign}x_n\right)$, во-первых,

$$|k|_\infty<\frac{m+\delta}{\delta}n,$$

во-вторых,

$$|x-{}_kx|_1=\sum_{x=1}^{n}|x_j|-\left[\left|\frac{x_j n}{\delta}\right|\right]\frac{\delta}{n}\Big)=\frac{\delta}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left|\frac{x_j n}{\delta}\right|-\left[\left|\frac{x_j n}{\delta}\right|\right]\right)<\delta.$$

Пусть
$$\sigma_1=(\sigma+1/2p\delta)/2,$$

где p — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенствам (3). Ясно, что $\sigma_1>\sigma$ и $2p\sigma_1\delta<1$. Поэтому множество F нормирующее при данном σ_1 с константой нормирования

$$\frac{1}{1-\sigma_1\delta}=\frac{1}{1-\frac{\sigma\delta+1/2p}{2}}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(z)=f(z)\prod_{|k|_\infty\leqslant\frac{m+\delta}{\delta}n}\frac{1}{2}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin\varepsilon(z_j-{}_kx_j)}{\varepsilon(z_j-{}_kx_j)}\right),$$

где

$$\varepsilon=\frac{\sigma_1-\sigma}{\left(2\left[\frac{m+\delta}{\delta}n\right]+1\right)^n\cdot n}. \tag{12}$$

Ясно, что экспоненциальный тип функции $\varphi(z)$ не превосходит σ_1, а $\sup\limits_{x\in F}|\varphi(x)|\leqslant 1$. Значит,

$$\sup_{x\in R^n}|\varphi(x)|\leqslant\frac{1}{1-\sigma_1\delta}.$$

Поскольку при всех вещественных t таких, что $|t|\geqslant\pi$, выполняется неравенство

$$2|\sin t|\leqslant|t|,$$

постольку при $|x|_\infty\geqslant\frac{\pi}{\varepsilon}+m+\delta$ имеет место неравенство

$$\prod_{|k|_\infty\leqslant\frac{m+\delta}{\delta}n}\frac{1}{2}\left|1-\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin\varepsilon(x_j-{}_kx_j)}{\varepsilon(x_j-{}_kx_j)}\right|\geqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(2\left[\frac{m+\delta}{\delta}n\right]+1\right)^n}.$$

Поэтому при $|x| \geqslant \frac{\pi}{\varepsilon} + m + \delta$

$$|f(x)| \leqslant |\varphi(x)| \cdot 4^{\left(2\left[\frac{m+\delta}{\delta} n\right]+1\right)^n} \leqslant \frac{1}{1-\sigma_1\delta} 4^{\left(2\left[\frac{m+\delta}{\delta} n\right]+1\right)^n}. \tag{13}$$

Обозначим величину $\frac{1}{1-\sigma_1\delta} \cdot 4^{\left(2\left[\frac{m+\delta}{\delta}\right]+1\right)^n}$ через ν. Если $\Gamma \leqslant \nu$, то неравенство (11) заведомо выполнено. Рассмотрим случай, когда $\Gamma > \nu$. На основании стандартных теорем теории субгармонических функций имеем

$$\ln|f(x \pm i\mathbf{1})| \leqslant \sigma n + \int_{R^n} \ln|f(t)| \boldsymbol{P}(t;\ x \pm i\mathbf{1})\, dt, \tag{14}$$

где $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in R^n$, а ядро

$$\boldsymbol{P}(t;\ z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{|\operatorname{Im} z_j|}{\pi} \cdot \frac{1}{(t_j - \operatorname{Re} z_j)^2 + (\operatorname{Im} z_j)^2}$$

есть произведение n одномерных ядер Пуассона. Из (13) и (14) выводим оценку

$$\ln|f(x \pm i\mathbf{1})| \leqslant \sigma n + \ln\Gamma \cdot \prod_{j=1}^{n} \left\{\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\varepsilon}-m-\delta}^{\frac{\pi}{\varepsilon}+m+\delta} \frac{d\tau}{(\tau - x_j)^2 + 1}\right\} +$$

$$+ \ln\nu \cdot \left(1 - \prod_{j=1}^{n} \left\{\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\varepsilon}-m-\delta}^{\frac{\pi}{\varepsilon}+m+\delta} \frac{d\tau}{(\tau - x_j)^2 + 1}\right\}\right). \tag{15}$$

Поскольку $\Gamma > \nu$, то максимум в правой части (15) достигается при $x_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Итак,

$$\ln|f(x \pm i\mathbf{1})| \leqslant \ln\Gamma \cdot \left\{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\varepsilon} + m + \delta\right)\right\}^n +$$
$$+ \ln\nu \cdot \left(1 - \left\{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\varepsilon} + m + \delta\right)\right\}^n\right).$$

Но тогда по теореме о максимуме имеем

$$\ln\Gamma \leqslant \sigma n + \ln\Gamma \left\{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\varepsilon} + m + \delta\right)\right\}^n + \ln\nu \cdot \left(1 -\right.$$
$$\left. - \left\{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\varepsilon} + m + \delta\right)\right\}^n\right),$$

или

$$\Gamma \leqslant \exp\left\{\frac{\sigma n}{1 - \left\{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\varepsilon} + m + \delta\right)\right\}^n}\right\} \nu,$$

что с учетом (12) и завершает доказательство теоремы.

Следующая теорема показывает, что при некоторых дополнительных условиях типа условия относительной плотности множество единственности для $\rho = 1$ и данного $\sigma \in (0, \infty)$ является нормирующим множеством при некотором σ', меньшем σ.

Теорема 7. *Пусть множество $E \subset R^n$ обладает следующим свойством: какова бы ни была последовательность векторов $\{y^{(m)}_{m=1}\}^\infty \subset \subset R^n$, из последовательности множеств $E_m = \{x \in R^n;\ x - y^{(m)} \in E\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому множеству E' (в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N_\varepsilon < \infty$, что все множества подпоследовательности с номерами, большими N_ε, лежат в ε-окрестности множества E', являющегося множеством единственности для $\rho = 1$ и данного $\sigma \in \in (0, \infty)$). Тогда E — нормирующее множество при $\sigma/(2p)$, где p — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенствам (3).*

Доказательство. Покажем вначале, что существует такая постоянная $A < \infty$, что для любой ограниченной на R^n целой функции $f(z)$, $z \in C^n$, экспоненциального типа не выше σ, удовлетворяющей условию $\sup\limits_{x \in E} |f(x)| \leqslant 1$, выполняется

$$\sup_{x \in R^n} |f(x)| \leqslant A.$$

Допустим противное. Тогда существует последовательность целых функций $\{\varphi_m(z)\}_{m=1}^\infty$, удовлетворяющих условиям, сформулированным в начале доказательства, и таких, что

$$\sup_{x \in R^n} |\varphi(x)| = A_m \uparrow \infty, m \to \infty, A_1 \geqslant 1.$$

Пусть $y^{(m)}$ — такая точка в R^n, что $|\varphi_m(y^{(m)})| \geqslant A_m | 2$.

Рассмотрим последовательность целых функций $\Psi_m(z) = \varphi_m(z + + y^{(m)})/A$, $m = 1, 2, \ldots$ Все они имеют экспоненциальный тип не выше σ, ограничены 1 на R^n и числом $1/A_m$ на $E_m = \{x \in R^n, x + y^{(m)} \in E\}$. Эта последовательность является нормальным семейством. Не ограничивая общности, можно считать, что функции $\Psi_m(z)$ сходятся равномерно на каждом компакте в C^n к некоторой целой функции $\Psi_0(z)$, а множества E_m сходятся к некоторому множеству E' и $y^m \to 0$. Поскольку функция $\Psi_0(z)$ имеет экспоненциальный тип, не превосходящий σ, а на множестве E' обращается в нуль, то она тождественный нуль, что противоречит условию

$$|\Psi_0(0)| \geqslant 1/2.$$

Пусть теперь целая функция $f(z)$ удовлетворяет условиям: ее экспоненциальный тип не превосходит $\sigma/2p$ (см. (3)), а на множестве E ее модуль ограничен сверху 1 Как показано в [4], существует последовательность ограниченных на R^n целых функций $\{\varphi_m(z)\}_{m=1}^\infty$ экспоненциального типа, не превосходящего σ, которая сходится к $f(z)$ в равномерно-компактной топологии R^n. Кроме того, $\sup\limits_{x\in E} |\varphi_m(x)| \leqslant 1 + o(1),\ m \to \infty$. По доказанному выше

$$\sup_{x\in R^n} |\varphi_m(x)| \leqslant A(1 + o(1)),\ m \to \infty,$$

а значит,

$$\sup_{x\in R^n} |f(x)| \leqslant A.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956. 632 с.
2. Korevaar I. Diskrete sets of uniqueness for bounded holomorphic functions $f(z, w)$. — «Lecture Notes, Univ. of California», 1966, p. 3—8.
3. Ронкин Л. И. О вещественных множествах единственности для целых функций многих переменных и о полноте системы функций.— «Сиб. мат. журн.», 1972, т. 13, № 3, с. 638—644.
4. Логвиненко В. Н. Миомерные аналоги теоремы М. Картрайт.— ДАН СССР, 1974, т. 12, вып. 4, с. 17—24.
5 Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих комплексных переменных. М., «Наука», 1971. 432 с.
6. Евграфов А. Н. Асимптотические оценки и целые функции. М., ГИТТЛ, 1962. 200 с.