УДК 517.522.2

Б. Я. Левин и Нгуен Тхыонг Уен

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Вопросу об интерполировании в классе целых функций конечного порядка посвящено много исследований. Укажем прежде всего исследования А. О. Гельфонда, объединенные им в книге [1], затем исследования В. Л. Гончарова [2, 3]; М. А. Евграфова [4]; Б. Я. Левина [5, 6]; А. Ф. Леонтьева [7, 8, 9]; И. И. Ибрагимова, М. В. Келдыша [10] и других авторов [1]. В статье А. Ф. Леонтьева [7] решается следующий вопрос: каким условиям должна удовлетворять последовательность $\{\lambda_n\}$ точек комплексной плоскости для того, чтобы каждой последовательности $\{a_n\}$, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln|a_n|}{\ln|\lambda_n|} \leqslant \rho, \quad (\rho > 0)$$

отвечала целая функция $f(z)$ порядка $\leqslant \rho$, решающая интерполяционную задачу $f(\lambda_n) = a_n$. А. Ф. Леонтьев показал, что эти условия следующие:

а) при любом $\varepsilon > 0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{\rho+\varepsilon}} < \infty$,

б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{\ln|\lambda_n|} \ln\ln\frac{1}{|F'(\lambda_n)|} \leqslant \rho$,

где

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)\exp\sum_{j=1}^{p}\frac{z^j}{j\lambda_n^j}; \quad p = [\rho].$$

В настоящей заметке мы рассматриваем аналогичную интерполяционную задачу в классе функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и имеющих там порядок, не больший заданного порядка ρ, и даем ее решение при $\rho > 1$.

Заметим, что случай $\rho = 1$ был раньше рассмотрен Г. Д. Трошиным [12]. При этом, впрочем, Г. Д. Трошин предположил, что узлы интерполяции $\{\lambda_n\}$ расположены внутри угла $\left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$. Кроме того, полное решение интерполяционной задачи для функций, аналитических и ограниченных в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, дано Л. Карлесоном [13]. Изложение и библиография есть в книге [14].

Наше исследование основывается на двух теоремах Н. В. Говорова из развитой им теории функций, аналитических и конеч-

[1] См. обзор в [11, с. 49—71].

ного порядка в полуплоскости [15, 16, 17] (теоремы 1 и 2 этой заметки).

Определение (Титчмарш [18]). *Порядком функции* $f(z)$, *аналитической в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$, *называется точная нижняя граница всех чисел* $\nu > 0$, *при которых равномерно по* θ *имеет место*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\nu}} = 0, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Н. В. Говоров дал другое определение порядка функций, аналитических в полуплоскости, равносильное приведенному (см. [15, 16, 17]).

Введем определения: пусть $f(z)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости и $\lambda_n = r_n e^{i\theta_n}$ — ее корни. Определим следующие величины:

$$T_1(\alpha) = \sum_{r_n > 1} r_n^{-\alpha} \sin\theta_n,$$

$$T_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|d\varphi(t)|}{1+|t|^{\alpha+1}},$$

$$T_3(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(t)|\,dt}{1+|t|^{\alpha+1}},$$

где $\varphi(t)$ — сингулярная часть граничной функции для $f(z)$, т. е.

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \lim_{y\to 0} \int_{t_1}^{t_2} \ln|f(x+iy)|\,dx - \int_{t_1}^{t_2} \ln|f(x)|\,dx,$$

$u(t) = \ln|f(t)|$ почти всюду при $-\infty < t < \infty$. Кроме того, мы будем пользоваться следующим обозначением:

$$E_p(u, v) = \left(1 - \frac{u}{v}\right)\left(1 - \frac{u}{\bar{v}}\right)^{-1} \exp \sum_{j=1}^{p} \frac{u^j}{j}\left(\frac{1}{v^j} - \frac{1}{\bar{v}^j}\right).$$

Теорема 1. (Н. В. Говоров). *Всякая функция* $f(z)$, *аналитическая и порядка* $\rho \geqslant 0$ *в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$, *представима в виде*

$$f(z) = z^m e^{i \sum\limits_{j=1}^{p} a_j z^j} \prod_{r_n \leqslant 1} \frac{z-\lambda_n}{z-\bar{\lambda}_n} \prod_{r_n > 1} E_p(z, \lambda_n);$$

$$\exp \frac{1}{\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(tz+1)^{p+1}\, u(t)\, dt}{(t^2+1)^{p+1}(t-z)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(tz+1)^{p+1} d\varphi(t)}{(t^2+1)^{p+1}(t-z)} \right\}, \qquad (1)$$

где $p = [\rho]$; a_j — *вещественные числа.*

Кроме того, при любом $\varepsilon > 0$ *справедливы соотношения*

$$T_j(\mu + \varepsilon) < \infty, \quad j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где

$$\mu = \max\{\rho, 1\}. \tag{3}$$

Эта теорема играет для аналитических функций конечного порядка в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ ту же роль, что известная теорема Адамара для целых функций конечного порядка.

Следующая теорема Н. В. Говорова является обратной к теореме 1 и аналогична соответствующей теореме Э. Бореля из теории целых функций.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{\lambda_n\}$, *функции* $u(t)$ *и* $\varphi(t)$ *удовлетворяют условию* (2) *при* $\mu = \rho \geqslant 1$, *тогда функция*

$$G(z) = \prod_{r_n \leqslant 1} \frac{z - \lambda_n}{z - \bar{\lambda}_n} \prod_{r_n > 1} E_p(z, \lambda_n),$$

$$\exp \frac{1}{\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(tz+1)^{p+1}\, u(t)\, dt}{(t^2+1)^{p+1}(t-z)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(tz+1)^{p+1} d\varphi(t)}{(t^2+1)^{p+1}(t-z)} \right\}$$

представляет собой аналитическую функцию порядка не большего, чем ρ *в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$.

Следствие. *Если при любом* $\varepsilon > 0$ *сходится ряд*

$$\sum_{r_n > 1} \frac{\sin \theta_n}{r_n^{\rho+\varepsilon}} < \infty,$$

где $\rho \geqslant 1$, *то функция*

$$E(z) = \prod_{r_n \leqslant 1} \frac{z - \lambda_n}{z - \bar{\lambda}_n} \prod_{r_n > 1} E_p(z, \lambda_n) \tag{4}$$

имеет порядок, не больший чем ρ.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$E_n(z) = \frac{\lambda_n}{\bar{\lambda}_n} \frac{z - \bar{\lambda}_n}{z - \lambda_n} E(z). \tag{5}$$

Справедлива такая

Лемма 1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *функции* $E_n(z)$ *допускают при* $\operatorname{Im} z > 0$ *следующую оценку сверху:*

$$\ln |E_n(z)| \leqslant C_\varepsilon r^{\rho+\varepsilon} + \ln 3, \tag{6}$$

где $C_\varepsilon < \infty$, *не зависящая от* n, *постоянная величина.*

Доказательство. Сначала заметим, что при вещественных значениях $z = x$ имеет место равенство

$$|E_n(x)| = |E(x)| = 1.$$

Из неравенства

$$\left|\frac{z-\bar{\lambda}_n}{z-\lambda_n}\right| \leqslant 1+\frac{2\operatorname{Im}\lambda_n}{|z-\lambda_n|}$$

следует, что при $\operatorname{Im} z > 0$ и $|z-\lambda_n| \geqslant \operatorname{Im}\lambda_n$ справедливо

$$|E_n(z)| \leqslant 3|E(z)|. \tag{7}$$

В силу принципа максимума модуля аналитической функции имеем, что внутри круга $\{|z-\lambda_n| \leqslant \operatorname{Im}\lambda_n\}$ $E_n(z)$ допускает такую оценку сверху

$$|E_n(z)| \leqslant 3 \max_{|z-\lambda_n|=\operatorname{Im}\lambda_n} |E(z)|. \tag{8}$$

Из следствия теоремы 2 и оценок (7), (8) вытекает неравенство (6). Тем самым лемма доказана.

Основная цель этой заметки состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть M_ρ — класс аналитических функций порядка не большего, чем ρ, $1 < \rho < \infty$, в верхней полуплоскости. Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность точек в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, $r_n \to \infty$ $(n \to \infty)$[1]. Тогда для того, чтобы при любой системе чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющей соотношению*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln\ln|a_n|}{\ln r_n} \leqslant \rho, \tag{9}$$

существовала хотя бы одна функция $f(z) \in M_\rho$ со свойством $f(\lambda_n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, необходимо, чтобы $\{\lambda_n\}$ удовлетворяла условиям

$$\text{А)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\theta_n}{r_n^{\rho+\varepsilon}} < \infty \quad \forall\varepsilon > 0,$$

$$\text{Б)}\quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln r_n} \ln\ln \frac{1}{\operatorname{Im}\lambda_n |E'(\lambda_n)|} \leqslant \rho,$$

и достаточно, чтобы выполнялись соотношения А) и

$$\text{В)}\quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln r_n} \ln\ln \frac{1}{(\operatorname{Im}\lambda_n)^2 |E'(\lambda_n)|} \leqslant \rho,$$

где $\lambda_n = r_n e^{i\theta_n}$, $E(z)$ определяется равенством (4).

Для доказательства этой теоремы мы несколько усовершенствуем метод О. С. Фирсаковой, который основан на следующей лемме (см. [19]).

Лемма 2. (О. С. Фирсакова [19]). *Пусть последовательность $\{\gamma_n\}$ имеет единственную точку сгущения на бесконечности и удовлетворяет условию*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\gamma_n|^{\rho(|\gamma_n|)}} < \infty,$$

[1] Если $r_n < \infty$, то наша задача сводится к задаче, рассмотренной Л. Карлесоном (см. [13, 14]).

в котором $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок. Тогда можно построить целую функцию $\omega(z)$ уточненного порядка $\rho(r)$ с положительным индикатором $h_\omega(\theta)$ таким, что $h_\omega(\theta) \geqslant C > 0$, где C — произвольное заданное число, корни которой $\{\alpha_n\}$ образуют R-множество[1] *и исключительные кружки, заключающие ее корни, не покрывают точек последовательности $\{\gamma_n\}$. Для этой функции $\omega(z)$ имеет место следующая оценка снизу вне исключительных кружков*

$$\ln|\omega(z)| > \frac{h_\omega}{16} r^{\rho(r)},$$

где $h_\omega = \min\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} h_\omega(\theta)$ — положительная постоянная.

Заметим, кроме того, что в построении О. С. Фирсаковой корни функции $\omega(z)$ лежат на конечном числе лучей.

Доказательство теоремы 3. *Необходимость.* Допустим, что для любой последовательности $\{a_n\}$ со свойством (9) существует функция $g(z) \in M_\rho$ такая, что $g(\lambda_n) = a_n$, в частности найдется $f(z) \in M_\rho$, для которой имеют место равенства $f(\lambda_1) = 1$, $f(\lambda_n) = 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Пусть $\{\mu_n\}$ — корни функции $f(z)$, тогда по теореме 1 имеем при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\arg \mu_n)}{|\mu_n|^{\rho+\varepsilon}} < \infty,$$

откуда следует

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\theta_n}{r_n^{\rho+\varepsilon}} < \infty,$$

т. е. условие А).

Докажем условие Б) от противного. Если условие Б) не выполнено, то найдутся число ρ_1 $(\rho < \rho_1 \leqslant \infty)$ и последовательность $\{\nu_n\} \subset \{\lambda_n\}$ такие, что

$$|\nu_{n+1}| \geqslant 4|\nu_n|, \quad |\nu_n| > 1;$$

$$\rho_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|\nu_n|} \ln\ln \frac{1}{\operatorname{Im}\nu_n |E'(\nu_n)|}. \tag{10}$$

Пусть функция $f(z) \in M_\rho$ такая, что $f(\nu_n) = 1$, $f(\lambda_n) = 0$ для всех $\lambda_n \notin \{\nu_n\}$. По теореме 1 эта функция представляется в форме (1). Обозначим через $\{\mu_n\}$ корни функции $f(z)$ и $\{\mu_n'\} = \{\mu_n\} \diagdown \{\lambda_n\}$. Определим функцию $\Omega(z)$ равенством

$$\Omega(z) = \frac{f(z) H(z)}{E(z)},$$

[1] Определение R-множества дано в [6, с. 126].

где

$$H(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\nu_n}\right)\left(1-\frac{z}{\bar{\nu}_n}\right)^{-1}.$$

Очевидно, в силу представления (1) функции $f(z)$, что

$$\Omega(z)=e^{P_p(z)}\prod_{|\mu_n|\leqslant 1}\frac{z-\mu_n'}{z-\bar{\mu}_n'}\prod_{|\mu_n'|>1}E_p(z,\ \mu_n').$$

$$\exp\frac{1}{\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(tz+1)^{p+1}\ln|f(t)|}{(t^2+1)^{p+1}(t-z)}dt+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(tz+1)^{p+1}d\varphi(t)}{(t^2+1)^{p+1}(t-z)}\right\}.$$

Из теоремы 2 следует, что $\Omega(z)\in M_\rho$. Учитывая равенство $f(\nu_n)=$ $=1$, получаем

$$\frac{1}{E'(\nu_n)}=\frac{\Omega(\nu_n)}{H'(\nu_n)}. \qquad (11)$$

Мы имеем

$$H'(\nu_n)=\frac{\bar{\nu}_n}{\nu_n(\nu_n-\bar{\nu}_n)}\prod_{j\neq n}\left(1-\frac{\nu_n}{\nu_j}\right)\left(1-\frac{\nu_n}{\bar{\nu}_j}\right)^{-1}$$

и отсюда получаем оценку

$$|H'(\nu_n)|>\frac{1}{2\operatorname{Im}\nu_n}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{4^{n-j}-1}{4^{n-j}+1}\prod_{j=n+1}^{\infty}\frac{1-4^{n-j}}{1+4^{n-j}}\geqslant\frac{C}{\operatorname{Im}\nu_n}.$$

Последнее соотношение вместе с (11) показывает, что

$$\frac{1}{\operatorname{Im}\nu_n|E'(\nu_n)|}\leqslant C_1|\Omega(\nu_n)|.$$

Это неравенство противоречит соотношению (10). Тем самым доказана необходимость условия Б).

Достаточность. Из условия В) вытекает существование последовательности $\{\varepsilon_n\}$ такой, что $\varepsilon_n>0$ $\varepsilon_n\downarrow 0$ $(n\to\infty)$

$$\frac{1}{(\operatorname{Im}\lambda_n)^2}\left|\frac{a_n}{E'(\lambda_n)}\right|\leqslant\exp r_n^{\rho+\varepsilon_n}.$$

Построим уточненный порядок для заданного ρ таким образом, чтобы были справедливы неравенства

$$\rho(t)=\rho+\gamma(t);\quad \gamma(r_n)>\frac{\ln 2}{\ln r_n}+\varepsilon_n. \qquad (12)$$

При фиксированном, сколько угодно малом $\delta>0$ обозначим через Λ_δ подмножество последовательности $\{\lambda_n\}$ такое, что

$$\Lambda_\delta=\{\lambda_n\in\{\lambda_n\}:\theta_n\in[\delta,\ \pi-\delta]\}.$$

Очевидно, что в силу условия А) показатель сходимости последовательности Λ_δ не больше чем ρ, поэтому существует уточненный порядок $\rho_1(t)$ такой, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{n(t, \Lambda_\delta)}{t^{\rho_1(t)}} < \infty, \quad \left(\lim_{t\to\infty} \rho_1(t) \leqslant \rho\right).$$

Определим новый уточненный порядок $\rho^*(t)$ такой, что

$$\rho^*(t) = \max\{\rho(t), \rho_1(t)\}. \tag{13}$$

Применяя лемму 2 и выбрав $\{\gamma_n\} = \Lambda_\delta$, можно построить целую функцию вполне регулярного роста относительно уточненного порядка $\rho^*(t)$ с индикатором $h(\theta) > 16$, кроме того, эту функцию можно построить так, чтобы ее корни лежали вне углов $[-\delta, \delta]$ и $[\pi - \delta, \pi + \delta]$. Обозначим построенную функцию через $\omega(z)$[1].

Пусть вне исключительных кружков $\omega(z)$ допускает оценку снизу

$$|\omega(z)| > \exp r^{\rho^*(r)}.$$

С помощью этой функции $\omega(z)$ мы построим искомую функцию $f(z)$ в виде ряда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \omega(z) E(z)}{E'(\lambda_n)\, \omega(\lambda_n)(z - \lambda_n)}.$$

Очевидно, что формально функция $f(z)$ дает решение интерполяционной задачи, т. е. $f(\lambda_n) = a_n$. Убедимся в том, что это ряд равномерно сходится на каждом компакте в верхней полуплоскости и, кроме того, что определенная им аналитическая функция принадлежит M_ρ. В силу условия А) и следствия теоремы 2, $E(z)$ и $E_n(z)$ есть аналитические функции порядка не большего, чем ρ в верхней полуплоскости. Кроме того, по лемме 1 функции $E_n(z)$ допускают при $\operatorname{Im} z > 0$ оценку сверху

$$|E_n(z)| < C_\varepsilon \exp r^{\rho + \frac{\varepsilon}{2}} \quad (\varepsilon > 0),$$

где $C_\varepsilon < \infty$, не зависящая от n, постоянная величина. Перепишем $f(z)$ в виде

$$f(z) = \omega(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n} \frac{a_n E_n(z)}{E'(\lambda_n)\, \omega(\lambda_n)(z - \bar{\lambda}_n)}.$$

---

[1] Мы уже заметили, что в построении О. С. Фирсаковой корни функции $\omega(z)$ лежат на конечном числе лучей. Сделав преобразование поворота, мы можем расположить эти лучи вне углов $[-\delta, \delta]$ и $[\pi - \delta, \pi + \delta]$.

При произвольном $\varepsilon > 0$ существует $R_\varepsilon > 0$ такое, что из $r > R_\varepsilon$ следует

$$|f(z)| \leqslant \exp\left(r^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}} + Cr^{\rho^*(r)}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{E'(\lambda_n)\,\omega(\lambda_n)}\right| \frac{1}{|z-\bar{\lambda}_n|} \leqslant$$

$$\leqslant \exp r^{\rho+\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}\lambda_n \exp\left(r_n^{\rho+\varepsilon_n} - r_n^{\rho^*(r_n)}\right) =$$

$$= \exp r^{\rho+\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}\lambda_n \exp\left\{-r_n^{\rho+\varepsilon_n}\left(r^{\rho^*(r_n)-\rho-\varepsilon_n} - 1\right)\right\}.$$

В силу А), (12) и (13) получаем

$$|f(z)| \leqslant \exp r^{\rho+\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin\theta_n \exp(-r_n^{\rho}) <$$

$$< K \exp r^{\rho+\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\theta_n}{r_n^{\rho+\varepsilon_1}} < M \exp r^{\rho+\varepsilon}.$$

Тем самым мы показали, что $f(z)$ — аналитическая функция порядка ρ в верхней полуплоскости. Теорема доказана.

Замечания к теореме 3. Условие В) несколько более жесткое, чем условие Б). Однако если на быстроту убывания $\operatorname{Im}\lambda_n$ наложить некоторое ограничение, то условия Б) и В) будут эквивалентными. Например, при выполнении асимптотического неравенства

$$\operatorname{Im}\lambda_n > \exp(-r_n^{\rho+\varepsilon}), \quad (\varepsilon > 0)$$

А) и Б) одновременно являются необходимым и достаточным для решения интерполяционной задачи. Можно также предположить, что λ_n имеют конечный показатель сходимости или даже что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-r_n^{\rho+\varepsilon}) < \infty, \quad (\varepsilon > 0).$$

В частности, эта эквивалентность имеет место при условии $\operatorname{Im}\lambda_n \geqslant h > 0$. Неизвестно, не являются ли условия А) и Б) необходимыми и достаточными без предварительных условий на последовательность $\{\lambda_n\}$.

Мы выражаем благодарность И. В. Островскому за ряд замечаний, способствовавших улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей, изд. 3-е. М., «Наука», 1967. 375 с.
2. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М., Гостехиздат, 1954. 328 с.

3. Гончаров В. Л. Интерполяционные процессы и целые функции. М., УМНЗ, 1937, с. 113—143.
4. Евграфов М. А. Интерполяционная задача Абеля — Гончарова. М., Гостехиздат, 1954. 127 с.
5. Левин Б. Я. О некоторых приложениях интерполяционного ряда Лагранжа в теории целых функций.— «Мат. сб.», 1940, т. 8 (50), с. 5—12.
6. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Физматгиз, 1956. 632 с.
7. Леонтьев А. Ф. Об интерполяции в классе целых функций конечного порядка.— ДАН СССР, 1948, т. 61, с. 785—787.
8. Леонтьев А. Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа.— ДАН СССР, 1949, т. 66, с.331—334.
9. Леонтьев А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения.— «Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова», 1951, т. 39, с. 19—24.
10. Ибрагимов И. И., Келдыш М. В. Об интерполяции целых функций. «Мат. сб.», 1947, т. 20 (62), с. 283—292.
11. Левин Б. Я., Островский И. В. Специальные вопросы теории целых функций. История отечественной математики, т. 4, книга 1. Киев, «Наукова думка», 1970, с. 49—81.
12. Трошин Г. Д. Об интерполировании функций, аналитических в угле.— «Мат. сб.», 1970, т. 39 (81) : 2, с. 239—252.
13. Carleson L. On bounded analytic functions and closure problems. — «Ark. for Mat.», 1952, p. 3—7.
14. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М., ИЛ, 1963. 96 с.
15. Говоров Н. В. О функциях вполне регулярного роста в полуплоскости. Автореф. канд. дис., Ростов-на-Дону, 1966.
16. Говоров Н. В. Об индикаторе функций нецелого порядка и вполне регулярного роста в полуплоскости.— ДАН СССР, 1965, т. 162, № 3, с. 495—498.
17. Говоров Н. В. Об индикаторе функций целого порядка и вполне регулярного роста в полуплоскости.— ДАН СССР, 1967, т. 172, № 4, с. 763—766.
18. Титчмарш Е. Теория функций. М., Гостехиздат, 1951. 506 с.
19. Фирсакова О. С. Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций.— ДАН СССР, 1958, т. 120, с. 477—480.