УДК 517.93

В. А. Козел, Д. Ш. Лундина, В. А. Марченко

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЗИТИВНЫХ ОПЕРАТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Через M мы будем обозначать любое линейное множество непрерывных вещественных функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, обладающее тем свойством, что для любого целого положительного числа n в этом множестве найдется неотрицательная функция $r_n(x)$, удовлетворяющая при всех $x \leqslant n$ неравенству $r_n(x) \geqslant 1$. Заданный на таком множестве однородный и аддитивный функционал R называется позитивным, если $R[f] \geqslant 0$, какова бы ни была неотрицательная функция $f(x) \in M$. Функция $f(x) \in M$ называется мажорируемой, если существует такая неотрицательная функция (мажоранта) $g(x) \in M$, что

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0.$$

М. Риссу[1] принадлежит следующая общая теорема о виде позитивных функционалов:

каждому заданному на множестве M позитивному функционалу R соответствует по крайней мере одна неубывающая функция $\rho(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ такая, что $\rho(-\infty) = 0$, $\rho(x-0) = \rho(x)$ и на всех мажорируемых функциях

$$R[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\rho(x). \qquad (1)$$

При этом если функция $g(x)$ является мажорантой для $f(x)$, то

$$\left| R[f] - \int_A^B f(x)\, d\rho(x) \right| \leqslant \delta(A, B)\, R[g], \qquad (2)$$

где

$$\delta(A, B) = \max_{x \bar{\in} (A, B)} \frac{|f(x)|}{g(x)}.$$

Мы рассмотрим заданные на множестве M однородные и аддитивные функционалы R, значениями которых являются ограниченные самосопряженные операторы, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Операторнозначный функционал называется позитивным, если его значениями на неотрицательных функциях $f(x) \in M$ являются неотрицательные самосопряженные операторы $R[f]$.

Для позитивных операторнозначных функционалов теорема М. Рисса в общем случае неверна: интегральное представление

---

[1] Riesz M. Sur le probleme des moments. Zroisieme note. — «Ark for Mat., Astr. och. Fys., 17, № 16, 1923, p. 27—40.

вида (1) с неубывающей операторнозначной функцией $\rho(x)$ может не существовать. Соответствующий пример мы построим в конце статьи. В связи с этим интересно выяснить:

1. Для каких множеств M теорема М. Рисса справедлива и для операторнозначных позитивных функционалов.

2. Что можно сказать о виде операторнозначных позитивных функционалов, не накладывая на множество M никаких серьезных ограничений.

Ответ на первый вопрос по существу известен. Ради полноты мы приведем здесь соответствующую теорему.

Теорема 1. *Если неубывающие функции $\rho(x)$, соответствующие в силу теоремы М. Рисса скалярным позитивным функционалам R, заданным на множестве M, определяются этими функционалами однозначно, то любому позитивному операторнозначному функционалу $\boldsymbol{R}$, заданному на множестве M, отвечает неубывающая сильно непрерывная слева операторнозначная функция $\boldsymbol{R}[x]$ $(\boldsymbol{R}(-\infty)=0)$ такая, что*

$$\boldsymbol{R}[f]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\boldsymbol{R}(x)$$

на всех мажорируемых функциях $f(x)\in M$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{R}$ — положительный операторнозначный функционал, заданный на множестве M. Тогда при каждом $h\in H$ квадратичная форма $(\boldsymbol{R}[f]\,h,\ h)$ является позитивным скалярным функционалом, заданным на множестве M. Согласно теореме М. Рисса, существует неубывающая функция $\rho(x,\ h)$ такая, что

$$(\boldsymbol{R}\,[f]\,h,\ h)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\rho(x,\ h) \tag{3}$$

на всех мажорируемых функциях $f(x)\in M$. Будем считать для простоты гильбертово пространство H вещественным. Полагая

$$R(x;\ h,\ g)=\frac{1}{4}\{\rho(x;\ h+g)-\rho(x;\ h-g)\},$$

найдем, что на всех мажорируемых функциях $f(x)\in M$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\{R(x;\ h_1,\ g)+R(x;\ h_2,\ g)\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dR(x;\ h_1+h_2,\ g)$$

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\{\rho(x;\ h_1+h_2+g)+\rho(x;\ h_1-g)+\rho(x;\ h_2-g)\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\{\rho(x;\ h_1+h_2-g)+\rho(x;\ h_1+g)+\rho(x;\ h_2+g)\}.$$

По условию теоремы множество M обладает тем свойством, что заданные на нем позитивные скалярные функционалы определяют соответствующие им неубывающие функции $\rho(x)$ однозначно. Поэтому

$$\rho(x;\ h_1+h_2+g)+\rho(x;\ h_1-g)+\rho(x;\ h_2-g)=$$
$$=\rho(x;\ h_1+h_2-g)+\rho(x;\ h_1+g)+\rho(x;\ h_2+g)$$

или

$$R(x;\ h_1+h_2,\ g)=R(x;\ h_1,\ g)+R(x;\ h_2,\ g).$$

Аналогично проверяется, что

$$R(x;\ \alpha h,\ g)=\alpha R(x;\ h,\ g),\quad R(x;\ h,\ g)=R(x;\ g,\ h).$$

Таким образом, $R(x;\ h,\ g)$ при каждом фиксированном x есть ограниченный билинейный функционал от h, g и, следовательно, существует семейство самосопряженных операторов $\boldsymbol{R}(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ такое, что

$$R(x;\ h,\ g)=(\boldsymbol{R}(x)h,\ g). \tag{4}$$

Поскольку $R(x;\ h,\ h)=\rho(x;\ h)$, то $\boldsymbol{R}(-\infty)=0$, операторы $\boldsymbol{R}(x)$ сильно непрерывны слева, неотрицательны и $\boldsymbol{R}(x')\leqslant\boldsymbol{R}(x)$, если $x'\leqslant x$. Используя эти свойства семейства операторов $\boldsymbol{R}(x)$ и формулы (3), (4), находим, что на всех мажорируемых функциях $f(x)\in M$

$$\boldsymbol{R}[f]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\boldsymbol{R}(x),$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\boldsymbol{R}(x)=\lim_{\substack{B\to+\infty\\ A\to-\infty}}\int_A^B f(x)\,d\boldsymbol{R}(x),$$

$$\int_A^B f(x)\,d\boldsymbol{R}(x)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{N+1} f(\hat{x}_k)\{\boldsymbol{R}(x_{k+1})-\boldsymbol{R}(x_k)\},$$

$$A=x_1<x_2<\ldots<x_{N+1}=B,\quad x_k\leqslant\hat{x}_k\leqslant x_{k+1},$$
$$\Delta=\max(x_{k+1}-x_k)$$

и пределы понимаются в смысле равномерной сходимости операторов.

Назовем множество неотрицательных функций $G\in M$ полной системой мажорант, если любая мажорируемая функция $f(x)\in M$ имеет мажоранту, принадлежащую множеству G.

Теорема 2. *Если линейное множество M имеет счетную полную систему мажорант, то каждому операторнозначному позитивному функционалу $\boldsymbol{R}$, заданному на M, значениями которого являются ядерные операторы, соответствует по крайней мере одно семейство самосопряженных ядерных операторов $\boldsymbol{R}(x)$*

$(-\infty < x < \infty)$) *такое, что* $\boldsymbol{R}(-\infty)=0$, $\boldsymbol{R}(x-0)=\boldsymbol{R}(x)$ *и на всех мажорируемых функция* $f(x)\in M$

$$\boldsymbol{R}[f]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\boldsymbol{R}(x).$$

При этом операторы $\boldsymbol{R}(x')-\boldsymbol{R}(x)$ $(x'>x)$ *не обязательно неотрицательны.*

Доказательство. По условию в множестве M существуют неотрицательные функции $r_n(x)$ такие, что $r_n(x)\geqslant 1$ при $x\leqslant n$, и, кроме того, существует счетное множество неотрицательных функций $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., образующее полную систему мажорант. Так как неотрицательные операторы $\boldsymbol{R}[r_n+g_n]$ являются ядерными, то существует такая последовательность положительных чисел ε_n, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{R}(r_n+g_n]\cdot\varepsilon_n$ сходится по норме и его сумма есть неотрицательный ядерный оператор. Положим

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{R}[r_n+g_n]\cdot\varepsilon_n,$$

где $\boldsymbol{T}_0$ — произвольный ядерный строго положительный оператор. Ясно, что $\boldsymbol{T}$ тоже ядерный и строго положительный оператор.

Выберем в пространстве H произвольный ортонормированный базис e_1, e_2, ... и представим матричные элементы операторов $\boldsymbol{R}[f]$ в таком виде:

$$R_{ik}[f]=(\boldsymbol{R}[f]e_i,\ e_k)=R_{ik}^{+}[f]-R_{ik}^{-}[f],$$

где

$$R_{ik}^{\pm}[f]=\frac{1}{4}\left(\boldsymbol{R}[f]\left(\frac{t_k}{t_i}e_i\pm\frac{t_i}{t_k}e_k\right),\ \left(\frac{t_k}{t_i}e_i\pm\frac{t_i}{t_k}e_k\right)\right)$$

и

$$t_i=(\boldsymbol{T}e_i,\ e_i)^{\frac{1}{4}}>0. \qquad (5)$$

(Пространство H мы снова считаем для простоты вещественным) Квадратичные формы $R_{ik}^{+}[f]$, $R_{ik}^{-}[f]$ являются, очевидно, позитивными скалярными функционалами, заданными на множестве M. В силу теоремы М. Рисса им соответствуют неубывающие функции $\rho_{ik}^{+}(x)$, $\rho_{ik}^{-}(x)$ такие, что на всех мажорируемых функциях $f(x)\in M$

$$R_{ik}^{\pm}[f]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\rho_{ik}^{\pm}(x).$$

Покажем теперь, что существуют такие семейства самосопряженных ядерных операторов $\boldsymbol{R}^{+}(x)$, $\boldsymbol{R}^{-}(x)$ $(-\infty<x<\infty)$, что

$$\rho_{ik}^{\pm}(x)=(\boldsymbol{R}^{\pm}(x)e_i,\ e_k).$$

Поскольку $\rho_{ik}^{\pm}(x) = \rho_{ki}^{\pm}(x) \geqslant 0$, то для этого достаточно проверить справедливость таких неравенств:

$$\sum_{i,\ k=1}^{\infty} \left[\rho_{ik}^{\pm}(x)\right]^2 < \infty; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{ii}^{\pm}(x) < \infty.$$

Пусть $[x] + 1 = n$. Используя монотонность функций, позитивность функционалов $R_{ik}^{\pm}[f]$ и определение оператора T, получаем

$$\rho_{ik}^{\pm}(x) \leqslant \rho_{ik}^{\pm}(n) \leqslant R_{ik}^{\pm}[r_n] = \frac{1}{4}\left(R[r_n]\left(\frac{t_k}{t_i}e_i \pm \frac{t_i}{t_k}e_k\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{t_k}{t_i}e_i \pm \frac{t_i}{t_k}e_k\right)\right) \leqslant \frac{1}{4\varepsilon_n}\left(T\left(\frac{t_k}{t_i}e_i \pm \frac{t_i}{t_k}e_k\right), \left(\frac{t_k}{t_i}e_i \pm \frac{t_i}{t_k}e_k\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4\varepsilon_n}\left\{\left(\frac{t_k}{t_i}\right)^2 (Te_i,\ e_i) + \left(\frac{t_i}{t_k}\right)^2 (Te_k,\ e_k) \pm 2\,(Te_i,\ e_k)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon_n}\left\{\left(\frac{t_k}{t_i}\right)^2 (Te_i,\ e_i) + \left(\frac{t_i}{t_k}\right)^2 (Te_k, e_k) + 2\sqrt{(Te_i,\ e_i)\,(Te_k,\ e_k)}\right\}.$$

Отсюда, согласно (5), следует

$$\rho_{ik}^{\pm}(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_n}\sqrt{(Te_i,\ e_i)\,(Te_k,\ e_k)}, \tag{6}$$

поэтому

$$\sum_{i,\ k=1}^{\infty} \left[\rho_{ik}^{\pm}(x)\right]^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon_n^2}\sum_{i=1}^{\infty} (Te_i,\ e_i) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (Te_k,\ e_k) = \frac{(SpT)^2}{\varepsilon_n^2} < \infty, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_{ii}^{\pm}(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_n}\sum_{i=1}^{\infty} (Te_i,\ e_i) = \frac{SpT}{\varepsilon_n} < \infty \tag{8}$$

в силу ядерности оператора T. Непрерывность слева операторнозначных функций $R^{\pm}(x)$ и равенство $R^{\pm}(-\infty) = 0$ являются очевидными следствиями этих неравенств и соответствующих свойств матричных элементов $\rho_{ik}^{\pm}(x)$.

Пусть $f(x)$ — произвольная вещественная непрерывная функция, заданная на сегменте $[A,\ B]$. Из монотонности функций $\rho_{ik}^{\pm}(x)$ и неравенств (7), (8) следует, что числа

$$a_{ik} = \int_A^B f(x)\, d\rho_{ik}^{\pm}(x)$$

являются матричными элементами в рассматриваемом базисе некоторого самосопряженного ядерного оператора, который мы обозначим через

$$\int_A^B f(x)\, dR^{\pm}(x).$$

Покажем, что норма разности между этим оператором и интегральными суммами

$$\sum_{l=1}^{N} f(\hat{x}_l)\{R^{\pm}(x_{l+1}) - R^{\pm}(x_l)\},\ A = x_1 < x_2 < \ldots < x_{N+1} =$$

$$= B,\ \hat{x}_l \in [x_l,\ x_{l+1}]$$

стремится к нулю, когда $\max(x_{l+1} - x_l) \to 0$.

Действительно, каково бы ни было целое число p,

$$\left\| \int_A^B f(x)\, dR^{\pm}(x) - \sum_{l=1}^{N} f(\hat{x}_l)\{R^{\pm}(x_{l+1}) - R^{\pm}(x_l)\} \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,\ k=1}^{\infty} \left| \int_A^B f(x)\, d\rho_{ik}^{\pm}(x) - \sum_{l=1}^{N} f(\hat{x}_l)\{\rho_{ik}^{\pm}(x_{l+1}) - \rho_{ik}^{\pm}(x_l)\} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,\ k=1}^{p} \left| \int_A^B f(x)\, d\rho_{ik}^{\pm}(x) - \sum_{l=1}^{N} f(\hat{x}_l)\{\rho_{ik}^{\pm}(x_{l+1}) - \rho_{ik}^{\pm}(x_l)\} \right|^2 +$$

$$+ 2 \sum_{i=p+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2C\rho_{ik}^{\pm}(B)\right]^2,$$

где через C обозначен максимум модуля функции $f(x)$.

При любом фиксированном p первое слагаемое правой части этого неравенства стремится к нулю, когда $\Delta = \max(x_{l+1} - x_l) \to 0$, а второе, используя неравенство (6), можно оценить так:

$$2 \sum_{i=p+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2C\rho_{ik}^{\pm}(B)\right]^2 \leqslant \frac{8C^2}{\varepsilon_n^2} \sum_{i=p+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (Te_i,\ e_i)(Te_k,\ e_k) =$$

$$= \frac{8C^2 SpT}{\varepsilon_n^2} \sum_{i=p+1}^{\infty} (Te_i,\ e_i),$$

где $n = [B] + 1$. Поэтому

$$\overline{\lim_{\Delta \to 0}} \left\| \int_A^B f(x)\, dR^{\pm}(x) - \sum_{l=1}^{N} f(\hat{x}_l)\{R^{\pm}(x_{l+1}) - \right.$$

$$\left. - R(x_l)\} \right\|^2 \leqslant \frac{8C^2 SpT}{\varepsilon_n^2} \sum_{i=p+1}^{\infty} (Te_i,\ e_i),$$

откуда в силу произвольности p следует, что

$$\overline{\lim_{\Delta \to 0}} \left\| \int_A^B f(x)\, dR^{\pm}(x) - \sum_{l=1}^{N} f(\hat{x}_l)\{R^{\pm}(x_{l+1}) - R^{\pm}(x_l)\} \right\| = 0.$$

Пусть теперь $f(x) \in M$ — произвольная мажорируемая функция. Положим $R(x) = R^{+}(x) - R^{-}(x)$ и покажем, что

$$\lim_{\substack{B \to +\infty \\ A \to -\infty}} \left\| R[f] - \int_A^B f(x)\, dR(x) \right\| = 0.$$

По условию функция $f(x)$ имеет мажоранту среди функций $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots$. Пусть это будет $g_s(x)$.

Тогда, согласно неравенству (2),

$$\left| R_{ik}[f] - \int_A^B f(x)\, d\{\rho_{ik}^+(x) - \rho_{ik}^-(x)\} \right| \leqslant \left| R_{ik}^+[f] - \int_A^B f(x)\, d\rho_{ik}^+(x) \right| +$$

$$+ \left| R_{ik}^-[f] - \int_A^B f(x)\, d\rho_{ik}^-(x) \right| \leqslant \delta(A, B)\{R_{ik}^+[g_s] + R_{ik}^-[g_s]\},$$

где

$$\delta(A, B) = \sup_{x \bar{\in} (A, B)} \frac{|f(x)|}{g_s(x)}.$$

Согласно определению функционалов $R_{ik}^{\pm}[f]$, оператора T и чисел t_i имеем

$$R_{ik}^{\pm}[g_s] = \frac{1}{4}\left(R[g_s]\left(\frac{t_k}{t_i} e_i \pm \frac{t_i}{t_k} e_k\right), \left(\frac{t_k}{t_i} e_i \pm \frac{t_i}{t_k} e_k\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon_s}\left(T\left(\frac{t_k}{t_i} e_i \pm \frac{t_i}{t_k} e_k\right), \left(\frac{t_k}{t_i} e_i \pm \frac{t_i}{t_k} e_k\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4\varepsilon_s}\left\{\left(\frac{t_k}{t_i}\right)^2 (Te_i, e_i) + \left(\frac{t_i}{t_k}\right)^2 (Te_k, e_k) \pm 2(Te_i, e_k)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_s} \sqrt{(Te_i, e_i) \cdot (Te_k, e_k)}.$$

Поэтому

$$\left\| R[f] - \int_A^B f(x)\, dR(x) \right\|^2 \leqslant \sum_{i, k=1}^{\infty} \left| R_{ik}[f] - \right.$$

$$\left. - \int_A^B f(x)\, d\{\rho_{ik}^+(x) - \rho_{ik}^-(x)\} \right|^2 \leqslant 4\,\frac{\delta^2(A, B)}{\varepsilon_s^2} (Sp\, T)^2$$

и так как $\delta(A, B) \to 0$ при $A \to -\infty$, $B \to +\infty$, то

$$\lim_{\substack{B \to +\infty \\ A \to -\infty}} \left\| R[f] - \int_A^B f(x)\, dR(x) \right\| = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если положительный квадратный корень из оператора T тоже ядерный, то, беря в качестве базиса собственные векторы этого оператора, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{(Te_i, e_i)} = Sp \sqrt{T} < \infty,$$

откуда, согласно неравенству (6), следует

$$\lambda_i^{\pm}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{ik}^{\pm}(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_n} \sqrt{(Te_i, e_i)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{(Te_k, e_k)} =$$

$$= \frac{\sqrt{(Te_i, e_i)}}{\varepsilon_n} Sp \sqrt{T}$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{\pm}(x) \leqslant \frac{Sp\sqrt{T}}{\varepsilon_n} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{Te_i, e_i} = \frac{(Sp\sqrt{T})^2}{\varepsilon_n} < \infty.$$

Поэтому операторы $\Lambda(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ с матричными элементами

$$\Lambda_{ik} = \begin{cases} \lambda_i^+(x) + \lambda_i^-(x) & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

образуют семейство неубывающих ядерных операторов.

Полагая $R_1^+(x) = \Lambda(x) - R^-(x)$, $R_1^-(x) = \Lambda(x) - R^+(x)$, будем иметь

$$R(x) = R_1^+(x) - R_1^-(x).$$

Операторы $R_1^{\pm}(x)$ тоже образуют семейства неубывающих ядерных операторов. Действительно, если $x \geqslant x'$ и $h = \sum_{i=1}^{\infty} h_i e_i$, то

$$\left(\left(R_1^{\pm}(x) - R_1^{\pm}(x')\right)h,\ h\right) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left[\lambda_i^{\mp}(x) - \lambda_i^{\mp}(x')\right] h_i^2 -$$

$$- \sum_{i,\ k=1}^{\infty} \left[\rho_{ik}^{\mp}(x) - \rho_{ik}^{\mp}(x')\right] h_i h_k \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left[\lambda_i^{\mp}(x) - \lambda_i^{\mp}(x')\right] h_i^2 -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i,\ k=1}^{\infty} \left[\rho_{ik}^{\mp}(x) - \rho_{ik}^{\mp}(x')\right] \left(h_i^2 + h_k^2\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{\lambda_i^{\mp}(x) - \lambda_i^{\mp}(x') -\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\rho_{ik}^{\mp}(x) - \rho_{ik}^{\mp}(x')\right]\right\} h_i^2 = 0.$$

Таким образом, если оператор $\sqrt{T}$ ядерный, то на всех мажорируемых функциях $f(x) \in M$

$$R[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dR(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\left[R_1^+(x) - R_1^-(x)\right],$$

где операторнозначные функции $R_1^{\pm}(x)$ образуют семейства неубывающих ядерных операторов и

$$R_1^{\pm}(-\infty) = 0; \quad R_1^{\pm}(x - 0) = R_1^{\pm}(x).$$

Построим в заключение пример операторнозначного позитивного функционала R, который нельзя представить на мажорируемых функциях множества M формулой

$$R[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dR(x) \tag{9}$$

с неубывающей операторнозначной функцией $R(x)$.

Заметим прежде всего, что если функционал задается формулой (9), то при любых $a < b$

$$\sup_{f\in M^-(a,\, b)} \boldsymbol{R}[f] \leqslant \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a) \leqslant \inf_{f\in M^+(a,\, b)} \boldsymbol{R}[f], \tag{10}$$

где через $M^+(a, b)$ $(M^-(a, b))$ обозначено множество всех мажорируемых функций $f(x) \in M$, удовлетворяющих неравенствам

$$f(x) \geqslant 1 \ (x \in [a, b]); \ f(x) \geqslant 0 \ \text{при} \ x \overline{\in} [a, b],$$

$$(f(x) \leqslant 1 \ (x \in [a, b]); \ f(x) \leqslant 0 \ \text{при} \ x \overline{\in} [a, b]).$$

В качестве гильбертова пространства H мы возьмем двумерное вещественное евклидово пространство E_2, а в качестве множества M — всевозможные линейные комбинации следующих пяти непрерывных функций:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < 5 \\ |x| - 5, & \text{если } |x| \geqslant 5 \end{cases}; f_1(x) = \begin{cases} |x+1|, & \text{если } -2 < x \leqslant -1, \\ 1, & \text{если } -3 < x \leqslant -2, \\ |x+4|, & \text{если } -4 \leqslant x \leqslant -3, \\ 0, & \text{если } x < -4 \text{ или } x > -1, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x-2| \geqslant 1, \\ |x-2|, & \text{если } |x-2| < 1 \end{cases}; \ f_3(x) = f_1(x-1); \ f_4(x) = f_2(x-1).$$

Поскольку $f_2(x) + f_4(x) \geqslant 1$ при всех x, то множество обладает всеми нужными свойствами, причем мажорируемыми функциями в этом множестве являются всевозможные линейные комбинации последних четырех функций. (Функция $f_0(x)$ является мажорантой для всех функций вида $\sum_{i=1}^{4} c_i f_i(x)$). Зададим на множестве M операторнозначный функционал $\boldsymbol{R}$ формулой

$$\boldsymbol{R}\left[\sum_{i=0}^{4} c_i f_i\right] = \sum_{i=0}^{4} c_i \boldsymbol{A}_i,$$

где $\boldsymbol{A}_0$ — произвольный неотрицательный оператор, а остальные операторы имеют в некотором ортонормированном базисе пространства E_2 такие матрицы

$$\boldsymbol{A}_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}_2 \sim \begin{pmatrix} 1+p^2 & q \\ q & 1+p^2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_4 \sim \begin{pmatrix} 1+p^2 & -q \\ -q & 1+p^2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$p^2 < q < p\sqrt{1+p^2}. \tag{12}$$

Ясно, что при таком выборе q выполняются неравенства

$$0 \leqslant \boldsymbol{A}_i \leqslant \boldsymbol{A}_2, \ 0 \leqslant \boldsymbol{A}_i \leqslant \boldsymbol{A}_4 \ (i = 1, 3). \tag{13}$$

Проверим, что построенный функционал позитивен. Пусть $f(x)=\sum_{i=0}^{4} c_i f_i(x)$. Тогда

$$f(-3)=c_1+c_2+c_4;\ f(-2)=c_1+c_2+c_3+c_4;\ f(-1)=c_1+c_3+c_4;$$
$$f(2)=c_4;\ f(3)=c_2;\ \lim_{x\to\infty}|x|^{-1}f(x)=c_0. \tag{14}$$

Поэтому, если $f(x)\geqslant 0$ при всех x и одно из чисел c_1, c_3 (например, c_1) неотрицательно, то в силу формул (14) и неравенств (13)

$$\boldsymbol{R}[f]=\sum_{i=0}^{4} c_i\boldsymbol{A}_i\geqslant c_3\boldsymbol{A}_3+c_2\boldsymbol{A}_2+c_4\boldsymbol{A}_4\geqslant(c_3+c_2+c_4)\boldsymbol{A}_3=$$
$$=f(-1)\boldsymbol{A}_3\geqslant 0.$$

Из неравенств (13) следует также, что для любого вектора $h\in E_2$

$$0\leqslant b(h)=\max_{i=1,\,3}(\boldsymbol{A}_i h,\ h)\leqslant\min_{j=2,\,4}(\boldsymbol{A}_j h,\ h).$$

Поэтому, если $f(x)\geqslant 0$ при всех x и оба числа c_1, c_3 отрицательны, то

$$(R[f]h,\ h)=\sum_{i=0}^{4} c_i(\boldsymbol{A}_i h,\ h)\geqslant\sum_{i=1}^{4} c_i b(h)=f(-2)\,b(h)\geqslant 0.$$

Таким образом, построенный нами операторнозначный функционал $\boldsymbol{R}$ позитивен. Если бы этот функционал допускал интегральное представление (9), то должны бы были выполняться неравенства (10). Так как $f_i(x)\in M^-(-5,1)$ при $i=1,\ 3$, $f_j(x)\in M^+(-5,1)$ при $j=2,4$ и $\boldsymbol{R}[f_i]=\boldsymbol{A}_i$, то должны бы были, в частности, выполняться такие неравенства:

$$\boldsymbol{A}_i\leqslant\boldsymbol{R}(1)-\boldsymbol{R}(-5)\leqslant\boldsymbol{A}_j,\ i=1,\ 3;\ j=2,4. \tag{15}$$

Но оператора $\boldsymbol{R}(1)-\boldsymbol{R}(-5)$, удовлетворяющего этим неравенствам, не существует. Действительно, если c_{ij} — матричные элементы оператора $\boldsymbol{R}(1)-\boldsymbol{R}(-5)$ и $h=\sum_{i=1}^{2} h_i l_i$, то, переходя в (15) к соответствующим квадратичным формам, получим, согласно (11)

$$h_i^2\leqslant c_{11}h_1^2+c_{22}h_2^2+2c_{12}h_1h_2\leqslant(1+p^2)\left(h_1^2+h_2^2\right)\pm 2qh_1h_2.$$

Полагая здесь последовательно $h_1=1,\ h_2=0,\ h_1=0,\ h_2=1;$ $h_1=h_2=1;$ $h_1=-h_2=1$, найдем, что $1\leqslant c_{11};$ $1\leqslant c_{22};$ $c_{11}+c_{22}+2c_{12}\leqslant 2(1+p^2)-2q;$ $c_{11}+c_{22}-2c_{12}\leqslant 2(1+p^2)-2q$. Следовательно, $2\leqslant c_{11}+c_{22}\leqslant 2+2p^2-2q$ и $p^2\geqslant q$, что несовместимо с (12).