УДК 518:517.944+513.88

*В. Э. Кацнельсон, В. В. Меньшиков*

# ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДИВЕРГЕНТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть в конечной области $G$ пространства $R^n$ с кусочно-глад[illegible] кой границей $\partial G$ ищется решение $u(x)$ уравнения

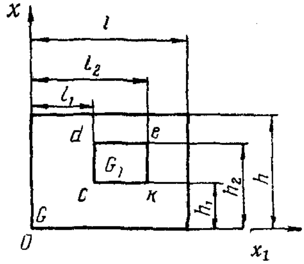
$$\operatorname{div}(\lambda(x)\operatorname{grad}u(x)) = -P(x) \quad (x \in G) \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\beta \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \chi \quad (x \in \partial G), \tag{2}$$

где $\chi = \chi(x)$, $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$, $P = P(x)$ — заданные вещественнозначные функции (достаточно гладкие, например, кусочно-непрерывные и кусочно-дифференцируемые), удовлетворяющие следующим условиям: $\lambda(x) \geqslant \varepsilon > 0$ $(x \in \bar{G})$, $\alpha(x) + \beta(x) \geqslant \varepsilon > 0$ $(x \in \partial G)$, $\alpha(x) \geqslant 0$, $\beta(x) = \lambda(x)$ в тех точках границы $\partial G$, где $\beta(x) \neq 0$. Здесь $\varepsilon$ — положительная константа, $\bar{G}$ — замыкание области $G$, $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней относительно $G$ нормали.

В случае, когда граничные условия достаточно просты, область $G$ несложной формы (например, прямоугольный параллелепипед, цилиндр или шар) и $\lambda(x) = \mathrm{const}$, решение краевой задачи (1), (2) находится методом Фурье [1]. Метод Фурье может быть успешно применен для решения данной задачи и в случае, когда $\lambda(x)$ — кусочно-постоянная функция, зависящая только от одной координаты [2]. Если область $G$ состоит из нескольких состыкованных областей, в каждой из которых мы умеем эффективно решать краевые задачи, целесообразно использовать альтернирующий итерационный метод [3].




Рассмотрим другой итерационный метод, несколько напоминающий метод работы [3], но имеющий другую область применения. Поясним суть метода на следующем простом примере. Пусть области $G$ и $G_1$ — открытые прямоугольники (рисунок):

$$G \supset \bar{G}_1,\ G \setminus \bar{G}_1 = G_2,\ \bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \gamma^*,$$
$$\beta(x) \equiv 0,\ \alpha(x) \equiv 1,\ \chi(x) \equiv 0,$$
$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_1, & x \in G_1,^{**} \\ \lambda_2, & x \in G_2. \end{cases}$$

Хотя альтернирующий метод [3] в данном случае в принципе применим, однако его практическая реализация нецелесообразна, так как область $G_2$ представляет собой «прямоугольное кольцо», в котором мы не умеем эффективно решать краевые задачи. Переходим к изложению формальной схемы метода.

---

* $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$ — замыкания областей $G_1$ и $G_2$ соответственно.

** $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — константы.

Задавшись на $\gamma$ достаточно гладкой функцией $\varphi(x)$, решим краевую задачу

$$\Delta u_i^{(1)} = -\frac{P}{\lambda_i} (x \in G_i;\ i = 1,\ 2),$$

$$u_2^{(1)}|_{\partial G} = 0, \tag{3}$$

$$u_1^{(1)}|_\gamma = u_2^{(1)}|_\gamma,$$

$$\left.\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial n_1}\right|_\gamma + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right)\varphi = \left.\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial n_1}\right|_\gamma^{*}.$$

Функции $u_1^{(1)}(x)$ $(x \in G_1)$ и $u_2^{(1)}(x)$ $(x \in G_2)$ будем рассматривать как первое приближение к решению исходной краевой задачи.

Дальнейшие приближения $u_i^{(m)}$ $(i = 1,\ 2;\ m > 1)$ строятся рекуррентно. В их построении используется вещественный параметр $t$, обеспечивающий сходимость итерационного процесса. Пусть приближение $u_i^{(n)}$ $(i = 1, 2;\ n \geqslant 1)$ уже построено. Функции $u_i^{(n+1)}$ $(i = 1,\ 2)$ строятся как решение краевой задачи

$$\Delta u_i^{(n+1)} = -\frac{P}{\lambda_i} (x \in G_i,\ i = 1,\ 2),$$

$$u_2^{(n+1)}|_{\partial G} = 0,$$

$$u_1^{(n+1)}|_\gamma = u_2^{(n+1)}|_\gamma, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u_2^{(n+1)}}{\partial n_1}\right|_\gamma = \left.\frac{\partial u_1^{(n+1)}}{\partial n_1}\right|_\gamma + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right) \times \left.\left[(1 - t)\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial n_1} + t\frac{\partial u_1^{(n-1)}}{\partial n_1}\right]\right|_\gamma,$$

где $\left.\dfrac{\partial u_1^{(0)}}{\partial n_1}\right|_\gamma = \varphi.$

Доказательство сходимости функций $u_1^{(n)}(x)$ $(x \in G_1)$ и $u_2^{(n)}(x)$ $(x \in G_2)$ к решению исходной краевой задачи приведем ниже при рассмотрении общего случая, а сейчас покажем, как практически находятся решения краевых задач (3) и (4).

Ищется решение краевой задачи

$$\Delta u_i = -\frac{P}{\lambda_i} (x \in G_i,\ i = 1,\ 2),$$

$$u_2/_{\partial G} = 0,$$

$$u_1|_\gamma = u_2|_\gamma,$$

$$\left.\left(\frac{\partial u_1}{\partial n_1} + f\right)\right|_\gamma = \left.\frac{\partial u_2}{\partial n_1}\right|_\gamma, \tag{5}$$

---

* Здесь и далее верхний индекс, взятый в скобки, обозначает номер приближенного решения; $\dfrac{\partial}{\partial n_1}$ — производная по нормали, внешней по отношению к $G_1$ в точках линии $\gamma$.

где $f(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция, заданная на $\gamma$. Обозначим отрезки $kc$, $cd$, $de$, $ek$ через $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, $\gamma_4$ соответственно. Легко видеть, что решение краевой задачи (5) можно представить в виде

$$u_i = \omega^0 + \omega^- + \omega^+ \quad (x \in G_i,\ i = 1,\ 2),$$

где $\omega^0(x)$, $\omega^+(x)$, $\omega^-(x)$ — решения краевых задач (6), (7), (8) соответственно,

$$\Delta\omega^0 = -\frac{P}{\lambda}\,(x \in G), \quad \omega^0|_{\partial G} = 0; \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \Delta\omega^- = 0 \quad (x \in G \diagdown (\gamma_1 \cup \gamma_3)), \\ \omega^-|_{\partial G} = 0, \\ \omega^-(x_1, h_j + 0) = \omega^-(x_1, h_j - 0), \\ \frac{\partial\omega^-}{\partial x_2}(x_1, h_j + 0) - f(x_1, h_j) = \frac{\partial\omega^-}{\partial x_2}(x_1, h_j - 0),\ (l_1 \leqslant x_1 \leqslant l_2),\ j = 1,\ 2, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \Delta\omega^+ = 0 \quad (x \in G \diagdown (\gamma_2 \cup \gamma_4)), \\ \omega^+|_{\partial G} = 0, \\ \omega^+(l_j + 0,\ x_2) = \omega^+(l_j - 0,\ x_2), \\ \frac{\partial\omega^+}{\partial x_1}(l_j + 0, x_2) - f(l_j, x_2) = \frac{\partial\omega^+}{\partial x_1}(l_j - 0, x_2),\ (h_1 \leqslant x_2 \leqslant h_2),\ j = 1, 2. \end{gathered} \tag{8}$$

Решение краевой задачи (6) легко находится методом Фурье. Краевые задачи (7) и (8) также решаются методом Фурье. Для определенности рассмотрим задачу (7). Ее решение представляется в виде ряда

$$\omega^-(x_1,\ x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x_2) \cdot \sin\frac{m\pi}{l}x_1,$$

где $w_m(x_2)$ — решение многоточечной краевой задачи (9):

$$\begin{gathered} \frac{d^2 w_m}{dx_2^2}(x_2) - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 w_m(x_2) = 0 \quad (0 < x_2 < h,\ x_2 \neq h_1,\ h_2), \\ w_m(0) = w_m(h) = 0, \\ w_m(h_j + 0) = w_m(h_j - 0), \\ \frac{\partial w_m}{\partial x_2}(h_j + 0) - \frac{\partial w_m}{\partial x_2}(h_j - 0) = f_m(h_j),\ (j = 1,\ 2), \end{gathered} \tag{9}$$

$$\text{где}\quad f_m(h_j) = \frac{2}{l}\int_{l_1}^{l_2} f(x_1,\ h_j)\sin\frac{m\pi}{l}x_1\,dx_1.$$

Краевая задача (9) носит несколько непривычный вид, однако выражение для ее решения просто представляется через элементарные функции и удобно при практических вычислениях.

Перейдем к рассмотрению общей ситуации. Пусть область $\bar{G}$ состоит из $N$ подобластей $\bar{G}_i$*, $\bar{G}=\bigcup\limits_{i=1}^{N}\bar{G}_i$, $G_i \cap G_j=\varnothing \quad (i\neq j)$, и в каждой из областей $G_i \lambda(x)$ принимает положительные постоянные значения $\lambda_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$. Обозначим границу области $G_i$ через $\partial G_i$, и пусть

$$\gamma_{i,j}=\partial G_i \cap \partial G_j,\ (i\neq j);\ \Gamma_i=\partial G\cap \partial G_i$$

$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$. В дальнейшем будут рассматриваться лишь непустые множества $\gamma_{i,j}$, $\Gamma_i$.

Нахождение решения краевой задачи (1) — (2) сводится к нахождению решений $u_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ уравнений

$$\Delta u_i=-\frac{P}{\lambda_i}\ (x\in G_i), \tag{10}$$

удовлетворяющих на $\Gamma_i$ граничным условиям

$$\left.\left(\lambda_i\frac{\partial u}{\partial n_i}+\alpha u_i\right)\right|_{\Gamma_i}=\chi, \tag{11}$$

а на $\gamma_{i,j}$ — условиям сопряжения

$$u_i\big|_{\gamma_{i,j}}=u_j\big|_{\gamma_{i,j}}, \tag{12}$$

$$\lambda_i\left.\frac{\partial u_i}{\partial n_i}\right|_{\gamma_{i,j}}=-\lambda_j\left.\frac{\partial u_j}{\partial n_j}\right|_{\gamma_{i,j}};$$

здесь и ниже $\left.\dfrac{\partial}{\partial n_i}\right|_{\gamma_{i,j}}$ — производная по нормали, внешней по отношению к $G_i$ в точках поверхности $\gamma_{i,j}$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_i}(x)=\lim_{x'\to x}\frac{\partial u_i(x')}{\partial n_i}^{**}.$$

Граничные условия (11) и условия сопряжения (12) преобразуем так:

$$\left.\left(\frac{\partial u_i}{\partial n_i}+\frac{\alpha}{k}u_i\right)\right|_{\Gamma_i}=\frac{\chi}{k}-\left(\frac{\lambda_i}{k}-1\right)\left.\frac{\partial u_i}{\partial n_i}\right|_{\Gamma_i}, \tag{13}$$

$$\left.\left[\frac{\partial u_i}{\partial n_i}+\left(\frac{\lambda_i}{k}-1\right)\frac{\partial u_i}{\partial n_i}\right]\right|_{\gamma_{i,j}}=-\left.\left[\frac{\partial u_j}{\partial n_j}+\left(\frac{\lambda_j}{k}-1\right)\frac{\partial u_j}{\partial n_j}\right]\right|_{\gamma_{i,j}},$$

$$u_i\big|_{\gamma_{i,j}}=u_j\big|_{\gamma_{i,j}}. \tag{14}$$

где $k\in(0,\infty)\diagdown(\min\limits_i\lambda_i,\ \max\limits_i\lambda_i)$ — параметр, находящийся в нашем распоряжении.

Для решения краевой задачи (10), (13), (14) предлагается итерационный процесс, посредством которого определяются последова-

---

* $\bar{G}$, $\bar{G}_i$ — замыкания открытых областей $G$, $G_i$,

** $x'$ стремится к $x$ по нормали к поверхности $\gamma_{i,j}$, оставаясь внутри $G_i$.

тельности функций $u_i^{(m)}(x)$, сходящиеся в $G_i$ соответственно к $u_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, N)$.

Задавшись на $\partial G_i$ достаточно гладкими функциями $\varphi_i(x)$ $(x \in \partial G_i,\ i=1, 2, \ldots, N)$, решим краевую задачу

$$\Delta u_i^{(1)} = -\frac{P}{\lambda_i}\ (x \in G_i).$$

$$u_i^{(1)}\big|_{\gamma_{i,j}} = u_j^{(1)}\big|_{\gamma_{i,j}},$$

$$\left[\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial n_i} + \left(\frac{\lambda_i}{k} - 1\right)\varphi_i\right]\Bigg|_{\gamma_{i,j}} = -\left[\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial n_j} + \left(\frac{\lambda_j}{k} - 1\right)\varphi_j\right|_{\gamma_{i,j}},$$

$$\left[\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial n_i} + \frac{\alpha}{k}u_i^{(1)}\right]\Bigg|_{\Gamma_i} = \frac{\chi}{k} - \left(\frac{\lambda_j}{k} - 1\right)\varphi_j\Big|_{\Gamma_i} (i=1, 2, \ldots, N). \quad (15)$$

Функции $u_i^{(1)}$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ будем рассматривать как первое приближение к решению краевой задачи (10), (13), (14).

Дальнейшие приближения $u_i^{(m)}$ $(i=1, 2, \ldots, N;\ m>1)$ строятся рекуррентно. В их построении фигурирует некоторый вещественный параметр $t$. Ниже распорядимся значением $t$ для обеспечения сходимости итерационного процесса. Пусть приближения $u_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots, N;\ n \geqslant 1)$ уже построены. Функции $u_i^{(n+1)}$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ строятся как решения краевой задачи

$$\Delta u_i^{(n+1)} = -\frac{P}{\lambda_i}\ (x \in G_i),$$

$$u_i^{(n+1)}|\gamma_{i,j} = u_j^{(n+1)}|\gamma_{i,j},$$

$$\left\{\frac{\partial u_i^{(n+1)}}{\partial n_i} + \left(\frac{\lambda_i}{k} - 1\right)\left[(1-t)\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial n_i} + t\frac{\partial u_i^{(n-1)}}{\partial n_i}\right]\right\}\Big|_{\gamma_{i,j}} = -\left\{\frac{\partial u_j^{(n+1)}}{\partial n_j} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\lambda_j}{k} - 1\right)\left[(1-t)\frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial n_j} + t\frac{\partial u_j^{(n-1)}}{\partial n_j}\right]\right\}\Big|_{\gamma_{i,j}},$$

$$\left\{\frac{\partial u_i^{(n+1)}}{\partial n_i} + \frac{\alpha}{k}u_i^{(n+1)}\right\}\Big|_{\Gamma_i}\left\{= \frac{\chi}{k} - \left(\frac{\lambda_i}{k} - 1\right)\left[(1-t)\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial n_i} + t\frac{\partial n_i^{(n-1)}}{\partial n_i}\right]\right\}\Big|_{\Gamma_i},$$

$$i = 1, 2, \ldots, N, \quad (16)$$

где

$$\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial n_i}\Bigg|_{\gamma_{i,j}} = \varphi_i\Bigg|_{\gamma_{i,j}}, \quad \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial n_i}\Bigg|_{\Gamma_i} = \varphi_i\Bigg|_{\Gamma_i}.$$

Легко видеть, что краевые задачи (15) и (16) разрешимы.

Исследуем сходимость описанного итерационного процесса. Пусть $v_i^{(n)} = u_i - u_i^{(n)}$ $(x \in G_i;\ i=1, 2, \ldots, N)$. Сходимость последовательностей $u_i^{(n)}$ к $u_i$ эквивалентна сходимости последовательностей $v_i^{(n)}$ к нулю $(i=1, \ldots, N)$. Заметим, что если в качестве функций $\varphi_i$, определяющих первое приближение, взять $\varphi_i = \frac{\partial u_i}{\partial n_i}\Big|_{\partial G_i}$, то при всех $n$ будет выполняться $u_i^{(n)} = u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

Поэтому последовательности $v_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ могут быть получены следующим образом. Задавшись на $\partial G_i$ функциями $\psi_i$ (функции $\psi_i$ произвольны в той же степени, что и функции $\varphi_i$, они связаны с функциями $\varphi_i$ соотношением $\psi_i = \frac{\partial u_i}{\partial n_i}\Big|_{\partial G_i} - \varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$), решим краевую задачу

$$\Delta v_i^{(1)} = 0 \quad (x \in G_i),$$

$$v_i^{(1)}\big|_{\gamma_{i,j}} = v_j^{(1)}\big|_{\gamma_{i,j}},$$

$$\left[\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial n_i} + \left(\frac{\lambda_i}{k} - 1\right)\psi_i\right]\Big|_{\gamma_{i,j}} = -\left[\frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial n_j} + \left(\frac{\lambda_j}{k} - 1\right)\psi_j\right]\Big|_{\gamma_{i,j}},$$

$$\left[\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial n_i} + \frac{\alpha}{k} v_i^{(1)}\right]\Big|_{\Gamma_i} = -\left(\frac{\lambda_i}{k} - 1\right)\psi|_{\Gamma_i}, \ (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{17}$$

Функции $v_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N;\ m \geqslant 1)$ строятся рекуррентно. Если функции $v_i^{(n)}$ $(n \geqslant 1)$ уже построены, то функции $v_i^{(n+1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ строим как решение краевой задачи

$$\Delta v_i^{(n+1)} = 0 \quad (x \in G_i),$$

$$v_i^{(n+1)}\big|_{\gamma_{i,j}} = v_j^{(n+1)}\big|_{\gamma_{i,j}},$$

$$\left[\frac{\partial v_i^{(n+1)}}{\partial n_i} + \left(\frac{\lambda_i}{k} - 1\right)f_i^{(n)}\right]\Big|_{\gamma_{i,j}} = -\left[\frac{\partial v_j^{(n+1)}}{\partial n_j} + \left(\frac{\lambda_j}{k} - 1\right)f_j^{(n)}\right]\Big|_{\gamma_{i,j}},$$

$$\left[\frac{\partial v_i^{(n+1)}}{\partial n_i} + \frac{\alpha}{k} v_i^{(n+1)}\right]\Big|_{\Gamma_i} = -\left(\frac{\lambda_i}{k} - 1\right)f_i^{(n)}\Big|_{\Gamma_i} \quad (i = 1, 2, \ldots N), \tag{18}$$

где

$$f_i^{(n)} = (1 - t)\frac{\partial v_i^{(n)}}{\partial n_i} + t f_i^{(n-1)}, \quad f_i^{(0)} = \psi_i.$$

Введем в рассмотрение оператор $A$, действующий в линейном пространстве достаточно гладких комплекснозначных вектор-функций, причем произвольный элемент пространства имеет вид $f = (f_1(x), \ldots, f_N(x))$. Здесь $f_i(x)$ определена на $\partial G_i$. Решим краевую задачу

$$\Delta \tilde{v}_i = 0 \quad (x \in G_i), \tag{19}$$

$$\tilde{v}_i|_{\gamma_{i,j}} = \tilde{v}_j|_{\gamma_{i,j}}, \tag{20}$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial n_i}+\left(\frac{\lambda_i}{k}-1\right)f_i\right]_{|\gamma_{i,j}}=-\left[\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial n_j}+\left(\frac{\lambda_j}{k}-1\right)f_j\right]_{|\gamma_{i,j}}, \tag{21}$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial n_i}+\frac{\alpha}{k}\tilde{v}_i\right]_{|\Gamma_i}=-\left(\frac{\lambda_i}{k}-1\right)f_i\Big|_{\Gamma_i}\quad (i=1, 2, \ldots, N). \tag{22}$$

Обозначим

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial n_i}\Big|_{\partial G_i}=g_i,\ g=(g_1(x), \ldots, g_N). \tag{23}$$

Положим по определению

$$Af=g. \tag{24}$$

Из формул (17), (18) видно, что* $f^{(n+1)}=[(1-t)A+tI)]f^{(n)}$, где $f^{(n)}=f_1^{(n)}, \ldots, f_N^{(n)}$, причем $f^{(0)}=(\psi_1, \ldots, \psi_N)$.

Для доказательства сходимости последовательности $v_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ к нулю нам понадобится сходимость к нулю последовательности $f^{(n)}$. Введем в линейном пространстве вектор-функций норму и докажем, что при надлежащем выборе $t$ оператор $\{(1-t)A+tI\}$ будет сжатием. Удобная для этих целей норма порождается описываемым ниже скалярным произведением.

Пусть $f$ и $g$ — произвольные вектор-функции из указанного выше линейного пространства. Обозначим через $v_{f_i}$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ решения краевых задач

$$\Delta v_{f_i}=0 \quad (x\in G_i),$$

$$\frac{\partial v_{f_i}}{\partial n_i}\Big|_{\partial G_i}=f_i \quad (i=1, \ldots, N), \tag{25}$$

определяемые с точностью до постоянного слагаемого. Аналогично вводим $v_{g_i}$ $(i=1, 2, \ldots, N)$. Положим теперь по определению**

$$(g, f)=\operatorname{sign}(\lambda-k)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\lambda_i}{k}-1\right)\int_{\partial G_i} v_{g_i}\bar{f}_i dS. \tag{26}$$

Используя первую формулу Грина и учитывая, что $f_i=\frac{\partial v_{f_i}}{\partial n_i}$, легко получим***

$$(g, f)=\operatorname{sign}(\lambda-k)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\lambda_i}{k}-1\right)\int_{G_i}\operatorname{grad} v_{g_i}\operatorname{grad}\bar{v}_{f_i}dx \tag{27}$$

---

* Здесь и далее $I$ — единичный оператор.

** Ранее $k$ было выбрано так, что те из чисел $\lambda_i-k$ $(i=1, 2, \ldots, N)$, которые не равны нулю, имеют один и тот же знак; обозначим его через $\operatorname{sign}(\lambda-k)$.

*** Здесь и далее $dx$ — элемент объема области, а $dS$ — элемент площади ее границы.

и

$$\|f\|^2=(f,\ f)=\operatorname{sign}(\lambda-k)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\lambda_i}{k}-1\right)\int_{G_i}|\operatorname{grad}v_{f_i}|^2\,dx. \tag{28}$$

Из (26) непосредственно следует линейность, из (27) — эрмитова симметрия, а из (28) — положительность введенного скалярного произведения. Пополнив линейное пространство вектор-функций по норме (28), получим гильбертово пространство, которое обозначим через $H$.

***Лемма.*** *Оператар $A$, действующий в гильбертовом пространстве $H$, является самосопряженным, при этом справедливы неравенства:*

а) *при* $\lambda_i-k\geqslant 0$ $(i=1,\ 2,\dots,\ N)$

$$(Af,\ f)\leqslant 0,\ \|A\|<\infty; \tag{29}$$

б) *при* $\lambda_i-k\leqslant 0$ $(i=1,\ 2,\dots,\ N)$

$$(Af,\ f)\geqslant 0,\quad \|A\|<1. \tag{30}$$

Доказательство. Ранее по заданной вектор-функции $f$, решая краевые задачи (19) — (22) и используя (23), (24), мы определили вектор-функцию $g$ и оператор $A$. Согласно (26) имеем

$$(Af,\ f)=\operatorname{sign}(\lambda-k)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{k}-1\right)\int_{\partial G_i}\tilde{v}_i\bar{f}_i\,dS. \tag{31}$$

Умножая функции, комплексно сопряженные левым и правым частям равенств (21) и (22), на $\tilde{v}_i$ и учитывая (20), имеем

$$\left[\left(\frac{\lambda_i}{k}-1\right)\tilde{v}_i\bar{f}_i+\left(\frac{\lambda_j}{k}-1\right)\tilde{v}_j\bar{f}_j\right]\Big|_{\gamma_{i,j}}=$$

$$=-\left[\tilde{v}_i\frac{\partial\bar{\tilde{v}}_i}{\partial n_i}+\tilde{v}_j\frac{\partial\bar{\tilde{v}}_j}{\partial n_j}\right]\Big|_{\gamma_{i,j}},$$

$$\left(\frac{\lambda_i}{k}-1\right)\tilde{v}_i\bar{f}_i\Big|_{\Gamma_i}=-\left[\tilde{v}_i\frac{\partial\bar{\tilde{v}}_i}{\partial n_i}+\frac{\alpha}{k}|v_i|^2\right]_{\Gamma_i}. \tag{32}$$

Из (31) и (32) после несложных преобразований получим

$$(Af,\ f)=-\operatorname{sign}(\lambda-k)\sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\partial G_i}\tilde{v}_i\frac{\partial\bar{\tilde{v}}_i}{\partial n_i}dS+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k}\int_{\Gamma_i}\alpha\,|\tilde{v}_i|^2\,dS\right]. \tag{33}$$

---

* Через $\|f\|$ обозначена норма вектор-функции $f$.

Используя первую формулу Грина, преобразуем (33) к виду

$$(Af,\ f) = -\operatorname{sign}(\lambda - k) \sum_{i=1}^{N} \left[ \int_{G_i} |\operatorname{grad} \tilde{v}_i|^2 dx + \frac{1}{k} \int_{\Gamma_i} \alpha |\tilde{v}_i|^2 dS \right]. \quad (34)$$

Согласно (28) имеем

$$(Af,\ Af) = \operatorname{sign}(\lambda - k) \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\lambda_i}{k} - 1 \right) \int_{G_i} |\operatorname{grad} \tilde{v}_i|^2 dx.$$

Используя (34), после несложных преобразований получим

$$\|Af\|^2 \leqslant \max_i \left| \frac{\lambda_i}{k} - 1 \right| \cdot |(Af,\ f)|, \quad (35)$$

и, наконец, учитывая, что $|(Af,\ f)| \leqslant \|Af\| \cdot \|f\|$, имеем

$$\|Af\| \leqslant \max_i \left| \frac{\lambda_i}{k} - 1 \right| \cdot \|f\|,$$

$$\|A\| \leqslant \max_i \left| \frac{\lambda_i}{k} - 1 \right|. \quad (36)$$

Из (36) непосредственно следует выполнение неравенства (30), а из (34) и (36) — выполнение неравенств (29).

Оператор $A$ является самосопряженным, так как он ограничен, а его квадратичная форма $(Af, f)$ вещественна.

Лемма доказана.

В случае $\operatorname{sign}(\lambda - k) = -1$ оператор $A$ является сжатием, в случае $\operatorname{sign}(\lambda - k) = 1$ оператор $A$ отрицателен и ограничен, и при надлежащем выборе $t$ оператор $\{(1-t)A + tI\}$ является сжатием.

Будем считать, что параметры $t$ и $k$ выбраны надлежащим образом. Тогда последовательность $f^{(n)}$ будет сходиться к нулю в норме пространства $H$.

Покажем, что при этом последовательности $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \ldots, v_i^{(n)}, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ сходятся к нулю. Учитывая, что

$$\|f^{(n)}\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

$$|(Af^{(n)},\ f^{(n)})| \leqslant \|A\| \cdot \|f^{(n)}\|^2,$$

имеем

$$(Af^{(n)},\ f^{(n)}) \to 0 \quad (n \to \infty). \quad (37)$$

Так как

$$(Af^{(n)},\ f^{(n)}) = -\operatorname{sign}(\lambda - k) \sum_{i=1}^{N} \left[ \int_{G_i} |\operatorname{grad} v_i^{(n+1)}|^2 dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k} \int_{\Gamma_i} \alpha |v_i^{(n+1)}|^2 dS \right], \quad (38)$$

то для областей $G_i$, для которых $\Gamma_i$ не пусто и $\alpha(x)$ отлична от нуля на непустом подмножестве $\Gamma_i$, последовательности $v_i^{(n)}$ сходятся к нулю в метрике $L^2(G_i)$. Используя формулу Ньютона-Лейбница и учитывая (37), (38), нетрудно получить для этих областей

$$\int_{\partial G_i} |v_i^{(n)}|^2 dS \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{39}$$

Последовательно используя формулу Ньютона-Лейбница и учитывая (37), (38), (39), имеем

$$\int_{G_i} |v_i^{(n)}|^2 dx \to 0 \quad (n \to \infty), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{40}$$

Из (40), согласно теореме о среднем для гармонических функций, следует $v_i^{(n)}(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ равномерно по $x$ на каждом компакте из $G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

Таким образом, приближенное решение исходной краевой задачи, определяемое посредством итерационного процесса (15), (16), сходится к ее точному решению в любой фиксированной точке $x \in G_i$ $(i = 1, 2, ..., N)$.

Заметим, что, согласно (29) и (36), при $k = \lambda_{\min}$ будет выполняться неравенство

$$\left(1 - \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right) < A < 0,$$

и при $t = \dfrac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$ будем иметь

$$\| (1 - t) A + tI \| \leqslant \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}.$$

Таким образом, предлагаемый процесс сходится тем быстрее, чем ближе к единице отношение $\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$.

Изложенный метод является эффективным в случае, если области $G_i (i = 1, 2, ..., N)$ образованы кусочно-координатными поверхностями, а область $G$ такова, что решение уравнения Пуассона в ней при заданных граничных условиях определяется методом Фурье.

«Гибрид» данного метода с альтернирующим методом [3] позволит эффективно находить решение краевой задачи (1) — (2) в случае, если и область $G$, и области $G_i$ $(i = 1, 2, ..., N)$ образованы кусочно-координатными поверхностями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., изд. АН СССР, 1948. 175 с.
2. Меньшиков В. В., Элькин Б. С. О приближенном методе решения одной краевой задачи для стационарного уравнения теплопроводности.— «Вестник Харьк. ун-та. Математика и механика», 1973, т. 38, с. 18—22.
3. Кацнельсон В. Э., Меньшиков В. В. Об одном аналоге альтернирующего метода Шварца.— В сб.: «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 17. Харьков, 1973, с. 46—58.