УДК 519. 21

А. И. Ильинский

ОБ АРГУМЕНТЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

1°. Введение. Характеристической функцией (х. ф.) называется функция вида

$$\chi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad -\infty < t < \infty,$$

где $F(x)$ — вероятностный закон. Пусть $t = a$ — наименьший положительный нуль х. ф. $\chi(t)$ (если $\chi(t)$ не имеет нулей, то положим $a = \infty$). Тогда на открытом интервале $(-a, a)$ однозначно определяется непрерывная функция $\arg \chi(t)$ такая, что $\arg \chi(0) = 0$ и $\chi(t) = |\chi(t)| \exp(i \arg \chi(t))$. Эту функцию будем называть аргументом х. ф. $\chi(t)$. Очевидно, аргумент х. ф. есть функция нечетная.

Возникает вопрос об описании множества непрерывных нечетных функций, заданных на интервале $(-a, a)$ $(0 < a \leqslant \infty)$, являющихся аргументами х. ф.

В этом направлении нам известны следующие результаты. Если нечетная функция $\omega(t)$ $(-a < t < a, 0 < a \leqslant \infty)$ имеет абсолютно непрерывную производную и $\omega''(t) \in L^1(-a, a)$, то существует х. ф. $\chi(t)$ такая, что $\chi(t) \neq 0$ и $\arg\chi(t) = \omega(t)$, $t \in (-a, a)$; в качестве $\chi(t)$ можно взять безгранично делимую[1] х. ф. $\exp\{-\lambda|t| + i\omega(t)\}$, где $\lambda > \int\limits_{-a}^{a} |\omega''(t)| dt$. Этот результат, сообщенный нам М. Г. Крейном, получается из следующей теоремы его статьи [1] (в которой нужно положить $g(t) = -\lambda|t| + i\omega(t)$).

Если функция $g(t) = \overline{g(-t)}$ $(-b \leqslant t \leqslant b, b < \infty; g(0) = 0)$ *имеет на отрезке* $[0, b]$ *абсолютно непрерывную производную, то* $\exp g(t)$ *является сужением на отрезок* $[-b, b]$ *некоторой б. д. х. ф. тогда и только тогда, когда для любой функции* $\varphi(t) \in C[0, b]$ *выполняется*

$$\int\limits_0^b \int\limits_0^b g''(t-s)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds \leqslant -\operatorname{Re} g'(+0)\int\limits_0^b |\varphi(t)|^2 dt.$$

Д. Сас [4] показал, что существуют х. ф. $\chi(t)$, обладающие свойством: для некоторой последовательности чисел $0 \leqslant \alpha_1 < \beta_1 \leqslant \leqslant \alpha_2 < \beta_2 \leqslant \ldots < a$ выполняется $|\arg\chi(\beta_k) - \arg\chi(\alpha_k)| \geqslant 2\pi$ и, следовательно, $\arg\chi(t) \notin C[-a, a]$. И. В. Островский и П. М. Флексер [2] построили примеры х. ф. с несуммируемым аргументом на интервале $(-a, a)$ $(a < \infty)$. Р. Симидзу [5] доказал, что если $\omega(t)$ — нечетная непрерывная функция на $(-\infty, \infty)$ и производные $\omega^{(k)}(t)$ $(0 \leqslant k \leqslant 3)$ ограничены, то $\omega(t)$ является аргументом х. ф. (более того, при достаточно большом $\lambda > 0$ функция $\exp(-\lambda|t| + i\omega(t))$ является х. ф.).

В настоящей статье указаны некоторые другие условия на непрерывную нечетную функцию $\omega(t)$, $t \in (-a, a)$ $(0 < a \leqslant \leqslant \infty)$, при выполнении которых $\omega(t)$ является аргументом х. ф. Используемый нами метод является развитием метода заметки [2].

2°. Формулировка результатов.

Теорема 1. *Для всякой нечетной функции* $\omega(t) \in C^1(-a, a)$ $(0 < a < \infty)$ *существует х. ф.* $\chi(t)$ *такая, что при* $-a < t < a$ *выполняется* $\chi(t) \neq 0$ *и* $\arg\chi(t) = \omega(t)$.

Теорема 2. *Для всякой нечетной функции* $\omega(t)$, $-\infty < t < \infty$, *имеющей абсолютно непрерывную производную, существует х. ф.* $\chi(t)$ *такая, что при* $-\infty < t < \infty$ *выполняется* $\chi(t) \neq 0$ *и* $\arg\chi(t) = \omega(t)$.

Эти теоремы будут выведены из следующих утверждений.

Предложение 1. *Для всякой нечетной функции* $\omega(t) \in C^2(-a, a)$ $(0 < a \leqslant \infty)$, *равной нулю в некоторой окрестности точки* $t = 0$, *существует х. ф.* $\chi(t)$ *такая, что при* $-a < t < a$ *выполняется* $\chi(t) \neq 0$ *и* $\arg\chi(t) = \omega(t)$.

Предложение 2. *Функция* $\omega(t)$, $-\infty < t < \infty$, *представимая в виде*

$$\omega(t) = \int\limits_0^\infty \sin tx\, d\sigma(x), \tag{0}$$

[1] Напомним, что безгранично делимой (б. д.) х. ф. называется такая х. ф. $\chi(t)$, что при всяком натуральном n функция $[\chi(t)]^{1/n}$ есть х. ф.

где $\sigma(x)$ — *функция ограниченной вариации на полуоси* $(0, +\infty)$, *является аргументом некоторой б. д. х. ф.*

Отметим некоторые следствия предложения 2.

Следствие 1. *Если нечетная непрерывная периодическая функция* $\omega(t)$ *обладает абсолютно сходящимся рядом Фурье, то она является аргументом некоторой б. д. х. ф.*

Из следствия 1 и известных теорем об абсолютной сходимости ряда Фурье (см., например, [3, гл. 9]) можно получить ряд условий на $\omega(t)$, достаточных для того, чтобы $\omega(t)$ была аргументом х. ф. Мы ограничимся двумя из них.

Следствие 2. *Пусть нечетная функция* $\omega(t)$, *заданная на конечном интервале* $(-a, a)$, *удовлетворяет условию Липшица порядка* β[1], *где* $\beta > 1/2$. *Тогда она является аргументом б. д. х. ф.*

Следствие 3. *Пусть нечетная функция* $\omega(t)$, *заданная на конечном интервале* $(-a, a)$, *имеет ограниченное изменение и удовлетворяет условию Липшица порядка* $\beta > 0$. *Тогда она является аргументом б. д. х. ф.*

3°. Доказательство предложения 2. Как известно, возможно представление $\sigma(x) = \sigma_1(x) - \sigma_2(x)$, где $\sigma_i(x)$ — неубывающая функция на $(0, +\infty)$ $(i = 1, 2)$. Положим

$$V(x) = \begin{cases} \sigma_1(x), & x > 0, \\ -\sigma_2(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Тогда функция $\chi(t) = \exp\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{itx} - 1)\, dV(x)\right\}$ есть искомая б. д. х. ф.

4°. Доказательство следствия 1. Обозначим через $2c$ период функции $\omega(t)$. Как известно [3, с. 173], функция $\omega(t)$ допускает представление

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k t}{c},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$. Это представление является, очевидно, частным случаем представления вида (0), поэтому остается воспользоваться предложением 2.

Доказательство следствия 2. Очевидно, функция $\omega(t)$ может быть продолжена с интервала $(-a, a)$ на всю прямую так, что получится нечетная периодическая функция, всюду удовлетворяющая условию Липшица порядка β. Поэтому утверждение следствия 2 вытекает из следствия 1 и следующей теоремы С. Н. Бернштейна [3, с. 608]:

---

[1] Т. е. $|\omega(t+h) - \omega(t)| \leqslant C|h|^{\beta}$ при $t, t+h \in (-a, a)$, где $C > 0$ не зависит от t и h.

Если периодическая функция $g(t)$ удовлетворяет условию Липшица порядка β, где $\beta > 1/2$, то ее ряд Фурье сходится абсолютно.

Доказательство следствия 3 проводится аналогично, но со ссылкой на теорему А. Зигмунда [3, с. 614].

Если периодическая функция $g(t)$ на каждом отрезке имеет ограниченное изменение и удовлетворяет условию Липшица порядка β, где $\beta > 0$, то ее ряд Фурье сходится абсолютно.

5°. Доказательство предложения 1. Пусть $\omega(t) = 0$ при $-\alpha \leqslant t \leqslant \alpha$ $(\alpha > 0)$. Обозначим через $\varphi(t)$ четную функцию, которая для $t > 0$ определяется равенствами $\varphi(t) = (t-\alpha)^2$ при $0 \leqslant t \leqslant \alpha$ и $\varphi(t) = 0$ при $t \geqslant \alpha$.

Найдем преобразование Фурье $\Phi(x)$ функции $\varphi(t)$. Очевидно, $\Phi(x)$ — непрерывная четная функция, $\Phi(0) \neq 0$. При $x \neq 0$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,e^{-itx}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\alpha}(t-\alpha)^2\cos txdt = \frac{2\alpha}{\pi x^2}\left(1-\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\right). \quad (1)$$

Из (1) вытекает, что $\Phi(x) \in L^1(-\infty, \infty)$, $\Phi(x) > 0$ для всех x,

$$\Phi(x) > Kx^{-2} \quad (2)$$

при $|x| > X$ для некоторых $K > 0$, $X > 0$.

Заметим, что если функция $g(t)$ удовлетворяет условиям

$$g(t) \in C^2(-a, a),\ g^{(k)}(t) \in L^1(-a, a)\ (k = 0, 1, 2);$$
$$\lim_{t\to\pm a} g^{(k)}(t) = 0\ (k = 0, 1), \quad (3)$$

то

$$\int_{-a}^{a} g(t)\,e^{-itx}dt = 0\,(x^{-2})\ \ (|x| \to \infty).$$

Легко видеть, что можно выбрать четную неотрицательную функцию $\psi(t) \in C^2(-a, a)$, для которой выполняется $\psi(t) > 0$ при $\alpha \leqslant t < a$ и $\psi(t) = 0$ при $t \geqslant a$, если $a < \infty$, и которая так быстро стремится к нулю при $t \to \pm a$ вместе с первыми двумя своими производными, что функция $g(t) = \psi(t)\exp(i\omega(t))$ будет удовлетворять условиям (3). Таким образом, будем иметь

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\psi(t)\,e^{i\omega(t)}e^{-itx}dt = \mathrm{o}\,(x^{-2})\ \ (|x| \to \infty). \quad (4)$$

Заметим, что $\Psi(x)$ является непрерывной вещественной функцией, причем $\Psi(x) \in L^1(-\infty, \infty)$.

Рассмотрим вещественную функцию

$$p_\sigma(x) = \Phi(x) + \sigma\Psi(x)\ \ (\sigma > 0).$$

Очевидно, $p_\sigma(x) \in L^1(-\infty, \infty)$. В силу (2) и (4) $p_\sigma(x) \geqslant 0$ для $|x| > X$ при достаточно малом $\sigma > 0$. Так как $\Phi(x) > 0$ для всех x и функции $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ непрерывны, то, уменьшив при необходимости число σ, мы добъемся того, что будет $p_\sigma(x) \geqslant 0$ также для $|x| \leqslant X$.

Поскольку непрерывные функции $\varphi(t)+\sigma\psi(t)\exp(i\omega(t))$ и $p_\sigma(x)$ суммируемы, то в силу формулы обращения имеем

$$\varphi(t)+\sigma\psi(t)\exp(i\omega(t))=\int_{-\infty}^{\infty} p_\sigma(x)\,e^{itx}dx,$$

так что функция $\chi(t)=C[\varphi(t)+\sigma\psi(t)\exp(i\omega(t))]$, где $C=[\varphi(0)+\sigma\psi(0)]^{-1}$, является х. ф. Легко видеть, что $\chi(t)\neq 0$ и $\arg\chi(t)=\omega(t)$ при $-a<t<a$.

6°. Доказательство теоремы 1. Пусть сначала $\omega(t)\in C^2(-a, a)$. Возьмем произвольное число δ, $0<\delta<a$. Обозначим через $\varkappa(t)$ четную функцию, такую, что $\varkappa(t)\in C^2(-a, a)$, $\varkappa(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant\delta/2$ и $\varkappa(t)=1$ при $\delta\leqslant t\leqslant a$. Положим $\omega_1(t)=\omega(t)\varkappa(t)$, $\omega_2(t)=\omega(t)-\omega_1(t)$. В силу предложения 1 существует х. ф. $\chi_1(t)$ такая, что $\chi_1(t)\neq 0$ и $\arg\chi_1(t)=\omega_1(t)$ $(-a<t<a)$. В силу следствия 2 существует х. ф. $\chi_2(t)$ такая, что $\chi_2(t)\neq 0$ и $\arg\chi_2(t)=\omega_2(t)$ $(-a<t<a)$. Тогда х. ф. $\chi(t)=\chi_1(t)\chi_2(t)$ является искомой.

Пусть теперь $\omega(t)\in C^1(-a, a)$. Тогда $\omega'(t)\in C(-a, a)$ и $\omega'(t)$ — четная функция. Обозначим через $\varkappa(t)$ четную функцию, удовлетворяющую условиям $\varkappa(t)\in C^\infty(-a, a)$ и $|\omega'(t)-\varkappa(t)|\leqslant 1$ $(-a<t<a)$. Положим $\Omega(t)=\int_0^t\varkappa(\tau)\,d\tau$. $\Omega(t)$ — нечетная функция и $\Omega(t)\in C^\infty(-a, a)$. По только что доказанному, существует х. ф. $\chi_1(t)$ такая, что $\chi_1(t)\neq 0$, $\arg\chi_1(t)=\Omega(t)$ $(-a<t<a)$. Нечетная функция $\omega(t)-\Omega(t)$ принадлежит $C^1(-a, a)$, причем $|\{\omega(t)-\Omega(t)\}'|\leqslant 1$. Так что $\omega(t)-\Omega(t)\in \mathrm{Lip}\,1$ на интервале $(-a, a)$. Значит, в силу следствия 2 существует такая х. ф. $\chi_2(t)$, что $\chi_2(t)\neq 0$, $\arg\chi_2(t)=\omega(t)-\Omega(t)$ $(-a<t<a)$. Тогда х. ф. $\chi(t)=\chi_1(t)\chi_2(t)$ является искомой.

7°. Доказательство теоремы 2. Сначала покажем, что если нечетная функция $\omega_1(t)$ $(-\infty<t<\infty)$, имеющая абсолютно непрерывную производную, удовлетворяет условиям $\omega_1^{(k)}(t)\in L^1(-\infty, \infty)$ $(k=0, 1, 2)$, то она является аргументом б. д. х. ф. Легко убедиться в том, что синус-преобразование Фурье функции $\omega_1(t)$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \omega_1(t)\sin tx\,dt$$

принадлежит $L^1(-\infty, \infty)$. По формуле обращения

$$\omega_1(t)=\int_0^\infty f(x)\sin tx\,dx,$$

и выполнены условия предложения 2 $\left(\sigma(x)=\int_0^x f(\xi)\,d\xi\right)$.

Учитывая только что доказанное, а также предложение 1, видим, что для доказательства теоремы 2 достаточно воспользоваться существованием нечетной функции $\Omega(t) \in C^{\infty}(-\infty, \infty)$, равной нулю в некоторой окрестности точки $t=0$ и удовлетворяющей условиям $\{\omega(t)-\Omega(t)\}^{(k)} \in L^1(-\infty, \infty)$ $(k=0, 1, 2)$.

8°. Замечания. 1) Пусть нечетная функция $\omega(t)$ непрерывна на интервале $(-a, a)$ $(0<a\leqslant\infty)$, $\varepsilon(t)$ — положительная монотонно убывающая функция на интервале $(0, a)$. Тогда существует х. ф. $\chi(t)$ такая, что $\chi(t)\neq 0$ и $|\arg\chi(t)-\omega(t)|\leqslant\varepsilon(|t|)$ при $-a<t<a$.

Этот факт непосредственно вытекает из предложения 1 и из существования нечетной функции $\Omega(t)$, удовлетворяющей следующим условиям: $\Omega(t)\in C^{\infty}(-a, a)$, $|\omega(t)-\Omega(t)|\leqslant\varepsilon(|t|)$ при $-a<t<a$, $\Omega(t)=0$ в некоторой окрестности точки 0.

2) Из предложения 1 вытекает существование х ф. $\chi(t)\neq 0$ на интервале $(-a, a)$ $(0<a\leqslant\infty)$ с аргументом, сколь угодно быстро растущим при $t\to a$.

3) Существуют б д. х. ф. с аргументом, не дифференцируемым ни в одной точке. Пример доставляет функция

$$\chi(t)=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} b^n\left(e^{ia^n t}-1\right)\right\},$$

где $0<b<1$, $a=4p+1$ (p — натуральное число), причем $ab>$ $>(3/2)\pi+1$.

Приношу глубокую благодарность профессору И. В. Островскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе и профессору М. Г. Крейну за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. О логарифме безгранично разложимой эрмитовоположительной функции.— ДАН СССР, 1944, т. 45, № 3, с. 99—102.
2. Островский И. В., Флексер П. М. Замечание об аргументе характеристической функции.— «Труды ФТИНТ АН УССР, Мат. физика, функц. анализ», 1973, вып. 4, с. 131—135.
3. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961. 936 с.
4. Szasz D. O. H. On a rolling caracteristic function. — «Periodica Mathematica Hungarica», 1973, Vol. 3(1—2), p. 13—17.
5. Shimizu R. On the decomposition of stable caracteristic functions. — «Ann. Inst. Statist. Math.», 1972, Vol. 24, № 2, p. 347—353.