УДК 519.4+517+513.4

Д. Л. Гурарий

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ СПЕКТРА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СВЯЗНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ ЛИ

Вопрос об отделимости спектра для операторов и для представления абелевых групп был поставлен и исследован в работах [1—5], причем в работе [3] было введено понятие спектра представления и получена теорема о непустоте спектра для абелевых групп. В работе [6] эта теорема была распространена на нильпотентные и разрешимые группы. Во всех упомянутых работах рассматривались топологические сепарабельные группы, причем по мере необходимости налагались дополнительные условия (связность, локальная компактность). Представления предполагались сильно непрерывными (в некоторых вопросах — равномерно непрерывными). Основным условием отделимости спектра оказалось условие *неквазианалитичности* представления

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \| T_g^n \|}{1+n^2} < \infty \quad (g \in G), \tag{1}$$

(G — рассматриваемая группа, T_g — представления). Оно появилось в работе [7], посвященной исследованию регулярности алгебр и функций на группе.

В настоящей статье получена теорема об отделимости спектра сильно непрерывного неквазианалитического представления связной нильпотентной группы Ли, удовлетворяющего следующему дополнительному условию:

I) *спектры операторов* T_h *для элементов* $h \in G'$ ($G' = [G, G]$ — *производная подгруппа) состоят из одной точки* $\lambda = 1$.

Это условие всегда выполняется для конечномерных представлений (в силу теоремы Ли о существовании веса), а также, как мы покажем в конце статьи, для равномерно непрерывных бесконечномерных представлений.

Напомним необходимые для дальнейшего определения и результаты.

Согласно [3], *спектром* $\sigma(T)$ представления T называется множество характеров[1] χ (вообще говоря неунитарных), для каждого из которых существует последовательность векторов $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ из пространства представления B такая, что при $j \to \infty$, $\xi_j \not\to 0$, а

$$\lim (T_g \xi_j - \chi(g) \xi_j) = 0, \quad (g \in G). \tag{2}$$

Отметим, что если представление неквазианалитично, то в силу (1) оно имеет нулевой экспоненциальный тип:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln \| T_g^n \|}{n} = 0, \quad (g \in G). \tag{3}$$

Следовательно, спектр представления унитарен.

Как было установлено в работах [3] (для абелевой группы) и [6] (для связной нильпотентной и связной локально-компактной разрешимой группы), спектр не пуст и замкнут в поточечной топологии на группе характеров при условии, что представление равномерно непрерывно.

Спектральное подпространство и отделимость спектра представления определим подобно тому, как это было сделано в работах [1, 2] для группы R и [4, 5] для произвольной локально-компактной абелевой группы.

---

[1] Т. е. непрерывных гомоморфизмов из G в мультипликативную группу комплексных чисел.

Обозначим через Γ группу характеров (вообще говоря, неунитарных) группы G, наделенную компактно открытой топологией. Очевидно, Γ двойственна абелевой фактор-группе G/G'.

Пусть Δ замкнутое подмножество в Γ.

Определение 1. *Подпространство* $E(\Delta) \subset B$ *назовем спектральным для представления* T, *если:*

1) $E(\Delta)$ *инвариантно относительно* T;

2) *ограничение* $T(\Delta) = T \mid E(\Delta)$ *равномерно непрерывно, если* Δ — *компакт*;

3) *спектр ограничения* $T(\Delta)$ *лежит в пересечении* $\sigma(T) \cap \Delta$;

4) $\operatorname{Int}(\sigma(T) \cap \Delta) \subset \sigma(T(\Delta))$, *где* Int *понимается в топологии относительно*[1] $\sigma(T)$ (*в частности* $E(\Delta) \neq 0$ *как только* $\operatorname{Int}(\sigma \times (T) \cap \Delta) \neq \varnothing$);

5) *если подпространство* E *инвариантно относительно представления и* $\sigma(T \mid E) \subset \Delta$, *то* $E \subset E(\Delta)$.

Определение 2. *Спектр представления называется отделимым, если каждому замкнутому множеству* $\Delta \subset \Gamma$ *соответствует спектральное подпространство* $E(\Delta)$.

Теорема 1. *Спектр сильного, непрерывного, неквазианалитического, удовлетворяющего условию* I) *представления связной нильпотентной группы Ли, не пуст*[2] *и отделим.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, заметим, что группу G без ограничения общности можно считать односвязной, так как от G мы можем перейти к ее универсальной накрывающей $\widetilde{G}$. Представление T и его спектр естественным образом переносятся на $\widetilde{G}$. Очевидно, что при этом свойство I, а также сильная непрерывность и неквазианалитичность сохраняются.

Фактор-группа G/G' в этом случае будет абелевой односвязной группой Ли и, как хорошо известно [8, гл. VI, § 39], изоморфна R^n. Группа ее унитарных характеров также изоморфна R^n. Это обстоятельство позволяет провести доказательство теоремы в два этапа. Вначале индукцией по размерности группы мы установим отделимость спектра для «кирпичей», т. е. множеств вида $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \ldots \times \Delta_n$, где Δ_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ — замкнутые подмножества прямой R. Затем построим спектральное подпространство, отвечающее произвольному компакту $Q \subset R^n$ с помощью аппроксимации множествами, состоящими из объединения конечного числа «кирпичей».

Предварительно докажем одну лемму.

Пусть H — нормальный делитель группы G, χ — характер на H. Группа G действует внутренними автоморфизмами на H, и это действие переносится на группу характеров Γ нормального

[1] А не всей Γ.

[2] Условие I) здесь существенно, как показывает построенный в [6] пример сильно непрерывного унитарного представления нильпотентной группы с пустым спектром.

делителя H, именно: $\chi^g(h)=\chi(g^{-1}hg)$. Образ множества $\Delta\subset\Gamma$ при этом действии обозначим через Δ^g. Для представления T группы G будем обозначать через T^H его ограничение на H.

Лемма 1. *Если $E(\Delta)$ — спектральное подпространство представления T^H, то $T_gE(\Delta)=E(\Delta^g)$, $(g\in G)$.*

Доказательство. Рассмотрим подпространство $E_g=T_gE(\Delta)$. Оно инвариантно относительно T^H. Действительно,

$$T_hE_g=T_gT_{g^{-1}hg}E(\Delta)\subset T_gE(\Delta)=E_g.$$

Пусть характер $\chi\in\sigma(T^H\,|\,E_g)$. Тогда существует последовательность векторов $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}\subset E_g$, такая, что при $j\to\infty$

$$T_h\xi_j-\chi(h)\,\xi_j\to 0,\quad \xi_j\not\to 0. \tag{4}$$

По определению подпространства E_g, $\xi_j=T_g\eta_j$, где $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}\subset E(\Delta)$, и $\eta_j\not\to 0$. Подставляя η_j в (4) и произведя замену $h\to ghg^{-1}$, получим

$$(T_h-\chi^{g^{-1}}(h))\,\eta_j\to 0. \tag{5}$$

Последнее означает, что $\sigma(T^H\,|\,E_g)\subset\Delta^g$. Тогда по свойству 5) для спектральных подпространств $E_g\subset E(\Delta^g)$.

Рассмотрев оператор $T_{g^{-1}}:E(\Delta^g)\to E(\Delta)$, получим обратное включение. Лемма доказана.

Следствие. *Если нормальный делитель H содержит производную подгруппу G', а Δ состоит из характеров, аннулирующих G' (т. е. $\chi\,|\,G'=1$), то $T_gE(\Delta)=E(\Delta)$.*

Легко видеть, что такие характеры неподвижны относительно внутренних автоморфизмов.

Построим спектральные подпространства представления T группы G. Обозначим через π естественный гомоморфизм из G на фактор-группу $G/G'\cong R^n$. Легко проверить, что $n\geqslant 2$ для неабелевой нильпотентной группы Ли. Разложим R^n в прямую сумму двух координатных подпространств R^k и R^{n-k} $(k\neq 0)$ и их π-прообразы в G обозначим через X и Y. Очевидно, X и Y—нормальные делители группы G, такие, что

$$X\cap Y=G';\ G/G'=(X/G')\times(Y/G'). \tag{6}$$

Разбиение G/G' в прямое произведение двух подгрупп порождает соответствующее разбиение ее группы характеров $\Gamma=\Gamma_1\times\times\Gamma_2$, где $\Gamma_1=\{\chi\in\Gamma:\chi\,|\,Y=1\}$ — двойственна X/G', а $\Gamma_2=\{\chi\in\Gamma:\chi\,|\,X=1\}$ — двойственна Y/G'.

Ограничение представления T группы G на подгруппы X и Y обозначим соответственно через T^X и T^Y. Очевидно, T^X и T^Y удовлетворяют условиям теоремы, и, по предположению индукции, их спектры отделимы. Как следует из условия 1) для представления T, множества $\sigma(T^X)$ и $\sigma(T^Y)$ состоят из характеров, аннулирующих G', т. е. лежат в Γ_1 и Γ_2 соответственно.

Пусть $\Delta_1 \subset \Gamma_1$, $\Delta_2 \subset \Gamma_2$, а $E(\Delta_1)$ и $E(\Delta_2)$ — соответствующие спектральные подпространства представлений T^X и T^Y. Тогда для $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ положим

$$E(\Delta) \overset{\text{def}}{=} E(\Delta_1) \cap E(\Delta_2). \tag{7}$$

Проверим свойства 1)—5).

1) Вытекает из следствия леммы 1, так как $T_g E(\Delta_1) \subset E(\Delta_1)$ и $T_g E(\Delta_2) \subset E(\Delta_2)$.

2). Очевидно, если Δ — компакт, то Δ_1 и Δ_2 также компактны. Равномерная непрерывность представления $T(\Delta)$ в этом случае вытекает из равномерной непрерывности представлений $T^X(\Delta_1)$ и $T^Y(\Delta_2)$ и следующего общего критерия: представление группы Ли равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда инфинитезимальные операторы, представляющие ее алгебру Ли, ограничены.

Лемма 2. Спектр представления T группы G не пуст.

Доказательство. По предположению индукции спектр представления T^X не пуст. Возьмем компакт $\Delta_1 \subset \Gamma_1$, так чтобы $\operatorname{Int}(\sigma(T^X) \cap \Delta_1) \neq \varnothing$. Тогда по свойству 4), примененному к T^X, спектральное подпространство $E(\Delta_1) \neq 0$.

Оно инвариантно относительно T^Y и, по предположению индукции для Y, ограничение $T^Y(\Delta_1) = T^Y \mid E(\Delta_1)$ имеет непустой спектр. Значит, существует компакт $\Delta_2 \subset \Gamma_2$, такой, что $\operatorname{Int}(\sigma(T^Y(\Delta_1)) \cap \Delta_2) \neq \varnothing$ Ненулевое спектральное подпространство $E'(\Delta_2)$ представления $T^Y(\Delta_1)$ по свойству 5) содержится в $E(\Delta_2)$. *Таким образом*, $E(\Delta) = E(\Delta_1) \cap E(\Delta_2) \supset E'(\Delta_2) \neq 0$ и, как показано выше, ограничение $T \mid E(\Delta)$ равномерно непрерывно. Нужный результат следует из непустоты спектра для равномерно непрерывного представления связной нильпотентной группы [6].

Продолжим доказательство теоремы.

3) Пусть характер χ принадлежит спектру представления, и $\chi = \chi_1 \times \chi_2$, где $\chi_1 \in \Gamma_1$ и $\chi_2 \in \Gamma_2$ — его проекции. Тогда $\chi_1 \in \sigma \times (T^X(\Delta)) \subset \sigma(T^X(\Delta_1)) \subset \Delta_1$. Аналогично $\chi_2 \in \Delta_2$. Это и означает, что $\chi \in \Delta_1 \times \Delta_2 = \Delta$.

4) Для его доказательства нам понадобится одно вспомогательное свойство, *которое доказывается по индукции совместно с* 4):

6) Если $\chi \in \operatorname{Int}(\sigma(T) \cap \Delta)$, и $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset B$ — квазисобственная последовательность, отвечающая характеру χ в смысле (2), то расстояния от ξ_j до спектрального подпространства $E(\Delta)$ стремятся к нулю при $j \to \infty$

Чтобы проверить 6) в абелевом случае, возьмем функцию f, принадлежащую алгебре $L^1_\rho(G)$ $(\rho(g) = \| T_g \|$ — неквазианалитический вес), такую, что ее преобразование Фурье равно

$$\hat{f}(\lambda) = \begin{cases} 1 \ (\lambda = \chi) \\ 0 \ (\lambda \in U). \end{cases} \tag{8}$$

Здесь U окрестность в Γ множества $\sigma(T)\setminus\Delta$. Такая функция существует в силу регулярности алгебры преобразований Фурье функций из $L^1_\rho(G)$ (см. [7]) и, как показано в [5], оператор $T_f = \int\limits_G f(g)\, T_g dg$ переводит B в подпространство $E(\Delta)$. Легко видеть, что

$$T_f\xi_j - \hat{f}(\chi)\,\xi_j = T_f\xi_j - \xi_j \to 0,\ j \to \infty \tag{9}$$

(т. е. выполняется 6).

Обозначим через p_1 и p_2 проекции из Γ на компоненты Γ_1 и Γ_2. Очевидно, что $\sigma(T^X) \supset p_1(\sigma(T))$ аналогично $\sigma(T^Y) \supset p_2(\sigma(T))$. Поэтому, если характер $\chi \in \operatorname{Int}(\sigma(T) \cap \Delta)$, то его проекция χ_1 также является внутренней точкой:

$$\chi_1 = p_1(\chi) \in \operatorname{Int}(\sigma(T^X) \cap \Delta_1). \tag{10}$$

По определению спектра существует последовательность $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset B$, такая, что при $j \to \infty$

$$T_g\xi_j - \chi(g)\,\xi_j \to 0,\ \xi_j \to 0. \tag{11}$$

Тогда, ограничивая в (11) T на подгруппу X и используя свойство 6) для представления T^X, мы можем найти последовательность $\{\xi'_j\}_{j=1}^{\infty} \subset E(\Delta_1)$, такую, что $\|\xi'_j - \xi_j\| \to 0$. Очевидно, $\xi'_j \not\to 0$ и также удовлетворяет (11).

Итак, при ограничении представления T на подпространство $E(\Delta_1)$ его спектр по-прежнему содержит $\operatorname{Int}(\sigma(T) \cap \Delta)$.

Рассматривая ограничения $T(\Delta_1) = T\,|\,E(\Delta_1)$ и $T^Y(\Delta_1) = T^Y\,|\,E(\Delta_1)$, аналогично (10) получаем включение

$$\chi_2 = p_2(\chi) \in \operatorname{Int}(\sigma(T^Y\Delta_1)) \cap \Delta_2. \tag{12}$$

Пусть $E'(\Delta_2)$ — спектральное подпространство представления $T^Y(\Delta_1)$, отвечающее Δ_2. Тогда, как уже отмечалось, $E'(\Delta_2) \subset E(\Delta)$, и по свойству 6) для представления $T^Y(\Delta_1)$ найдется последовательность $\{\xi''_j\}_{j=1}^{\infty} \subset E'(\Delta_2) \subset E(\Delta)$ такая, что $\|\xi'_j - \xi''_j\| \to 0$. Очевидно, $\{\xi''_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяется (11).

Тем самым мы одновременно доказали свойства 4) и 6).

5). Доказательству этого свойства предпошлем еще одну лемму.

Пусть H — связная подгруппа в G содержащая коммутант G', Γ_0 — двойственна абелевой фактор-группе H/G' и p_0 — естественная проекция из Γ в Γ_0.

Лемма 3. *Выполняется равенство* $\sigma(T^H) = \overline{p_0(\sigma(T))}$, *где черта означает замыкание в* Γ_0.

Доказательство. Включение проекции $p_0(\sigma(T))$, а следовательно, и ее замыкание в $\sigma(T^H)$, очевидно и уже отмечалось для подгрупп X и Y (пункт 4). Если $\sigma(T^H)$ и $\overline{p_0(\sigma(T))}$ не совпадают, то найдется замкнутое множество $\Delta_0 \subset \Gamma_0$, лежащее в дополнении к $p_0(\sigma(T))$ такое, что $\operatorname{Int}(\sigma(T^H) \cap \Delta_0) \neq \varnothing$. Ненулевое спектральное подпространство $E(\Delta_0)$ представления T^H инвариантно относительно T, и спектр ограничения $T(\Delta_0)$ пуст, что противоречит непустоте спектра для представлений группы G (лемма 2). Следовательно, $\sigma(T^H) = \overline{p_0(\sigma(T))}$.

Итак, пусть подпространство E инвариантно относительно T, и $\sigma(T \mid E) \subset \Delta$. Применяя лемму 3 к подгруппам X и Y, получим $\sigma(T^X \mid E) = \overline{p_1(\sigma(T \mid E))} \subset \Delta_1$, аналогично $\sigma(T^Y) \subset \Delta_2$. По свойству 5) для представлений T^X и T^Y отсюда следует, что $E \subset E(\Delta_1)$ и $E \subset E(\Delta_2)$, следовательно, $E \subset E(\Delta)$.

Этим завершается доказательство отделимости спектра представления «кирпичами». Рассмотрим произвольный компакт $Q \subset \Gamma$ и аппроксимируем его убывающей последовательностью множеств $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty} \left(Q = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} Q_j\right)$, каждое из которых является объединением конечного числа «кирпичей», $Q_j = \bigcup\limits_{k=1}^{m_j} \Delta_{jk}$. Определим спектральные подпространства

$$E(Q_j) \overset{\text{def}}{=} \overline{\left\{\sum_{k=1}^{m_j} E(\Delta_{jk})\right\}}; \quad E(Q) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{j=1}^{\infty} E(Q_j). \tag{13}$$

Свойства 1, 2, 4 и 5 отделимости спектра проверяются для подпространств $\{E(Q_j)\}_{j=1}^{\infty}$ и $E(Q)$ непосредственно. Чтобы установить свойство 3, воспользуемся следующей леммой об отображении спектра.

Лемма 4. *Пусть T — равномерно непрерывное, неквазианалитическое представление связной нильпотентной группы Ли G, $\rho(g) = \|T_g\|$ $(g \in G)$ — вес представления T, функция $f \in L^1_\rho(G)$, $\hat{f}(\chi)$ $(\chi \in \Gamma)$ — ее преобразование Фурье, $\hat{f}(\chi) = \int_G f(g)\chi(g)\,dg$. Тогда спектр оператора $T_f = \int_G f(g) T_g dg$ равен $\hat{f}(\sigma(T))$, где $\sigma(T)$ — спектр представления T.*

Доказательство леммы 4 мы приведем позднее, а сейчас воспользуемся ею для проверки свойства 3). Предположим, что для некоторого Q_j спектр ограничения $T \mid E(Q_j)$ содержит точку $\chi_0 \in Q_j$. В силу регулярности преобразований Фурье функций из $L^1_\rho(G)$, мы можем выбрать функцию f так, чтобы

$$\hat{f}(\chi) = \begin{cases} 0; & \chi \in Q_l \\ 1; & \chi = \chi_0. \end{cases}$$

Тогда, применив лемму 4 к оператору T_f, получаем $\sigma(T_f \mid E(Q_j)) \ni \{1\}$. С другой стороны, для каждого из множеств Δ_{jk}, $k = 1, 2, \ldots$; $\sigma(T_f \mid E(\Delta_{jk})) = \{0\}$. Чтобы прийти к противоречию, осталось воспользоваться полнотой в пространстве $E(Q_j)$ системы подпространств $\{E(\Delta_{jk})\}_{k=1}^{m_j}$ и следующим

Предложением. Пусть S — ограниченный оператор в банаховом пространстве B, $E \subset B$ — инвариантное относительно S под-

пространство. Если спектр ограничения S/E и фактор-оператора S/E состоит из одной точки $\lambda = 0$, то спектр оператора S также равен $\{0\}$.

Следующая теорема о полноте системы спектральных подпространств, аналогично абелеву случаю (см., например, [4]) является для представлений рассматриваемого класса грубым аналогом разложения в прямую сумму корневых подпространств.

Теорема 2. *Для любого покрытия спектра представления T открытыми «кирпичами» $\{\operatorname{Int}\Delta^\nu\}_\nu$ система спектральных подпространств $\{E(\Delta^\nu)\}_\nu$ полна в B.*

Доказательство теоремы 2, как и предыдущей, проводится индукцией по размерности группы. Предварительно заметим, что спектр представления без ограничения общности можно считать компактным. Действительно, пусть $\{\Delta_1^j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\Delta_2^k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающие цепочки компактов в Γ_1 и Γ_2 соответственно, такие что

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{Int}(\Delta_1^j) = \Gamma_1; \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{Int}(\Delta_2^k) = \Gamma_2.$$

Тогда по предположению индукции для представлений T^X и T^Y каждое из семейств подпространств $\{E(\Delta_1^j)\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{E(\Delta_2^k)\}_{k=1}^{\infty}$ полно в B. Легко видеть, что семейство $\{E(\Delta^{jk})\}_{j,k}$, где $\Delta^{jk} = \Delta_1^j \times \Delta_2^k$, также полно в B. Для любого (jk) ограничение $T(\Delta^{jk})$ равномерно непрерывно, и, в силу свойства 3) отделимости спектра, $\sigma(T(\Delta^{jk}))$ — компакт, лежащий в Δ^{jk}. Если множества $\{\operatorname{Int}(\Delta^\nu)\}_\nu$ покрывают спектр представления T:

$$\sigma(T) \subset \bigcup_\nu \operatorname{Int}(\Delta^\nu \cap \sigma(T)), \tag{14}$$

то, тем более, это справедливо для ограничения $T(\Delta^{jk})$,

$$\sigma(T(\Delta^{jk})) \subset \bigcup_\nu \operatorname{Int}(\Delta^\nu \cap \sigma(T(\Delta^{jk}))). \tag{15}$$

Тогда из полноты системы $\{E(\Delta^\nu)\}_\nu$ в каждом подпространстве $E(\Delta^{jk})$ следует ее полнота в B.

Итак, пусть спектр представления — компакт. Из системы открытых множеств $\{\operatorname{Int}\Delta^\nu\}_\nu$, покрывающей спектр, выделим конечную подсистему $\{\Delta^1, \Delta^2, \ldots \Delta^m\}$. Проектируя спектр на Γ_1 и пользуясь его компактностью, на основании леммы 3 получим

$$\sigma(T^X) = p_1(\sigma(T)) \subset \bigcup_{\nu=1}^{m} \operatorname{Int}(\Delta_1^\nu \cap \sigma(T^X)), \tag{16}$$

где Δ_1^ν — проекция на Γ_1 множеств Δ^ν (напомним, что $\Delta^\nu = \Delta_1^\nu \times \Delta_2^\nu$).

Для точки $\chi_1 \in \sigma(T^X)$ ее прообраз $p_1^{-1}(\chi_1)$ принадлежит объединению некоторого числа из множеств $\operatorname{Int}(\Delta^\nu)$. Обозначим их через $\Delta^{\nu_1}, \Delta^{\nu_2}, \ldots \Delta^{\nu_k}$. Пересечение их p_1 — образов содержит χ_1.

Тогда компактная окрестность Δ_1 точки χ_1, лежащая в пересечении p_1 — образов $(\Delta_1 \subset \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{Int}(\Delta_1^{\nu j}))$, обладает тем свойством, что

$$p_1^{-1}(\Delta_1) \cap \sigma(T) \subset \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{Int}(\Delta^{\nu j} \cap \sigma(T)). \tag{17}$$

Проектируя это включение на Γ_2, получаем

$$\sigma(T^Y(\Delta_1)) \subset \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{Int}(\Delta_2^{\nu j} \cap \sigma(T^Y(\Delta_1))), \tag{18}$$

где $\Delta_2^{\nu} = p_2(\Delta^{\nu})$. Последнее означает, в силу индукционного предположения, полноту в $E(\Delta_1)$ системы спектральных подпространств $\{E'(\Delta_2^{\nu j})\}_{j=1}^{k}$ представления $T^Y(\Delta_1)$.

Так как каждое подпространство $E'(\Delta_2^{\nu j})$ лежит в $E(\Delta^{\nu}{}_j)$, то система подпространств $\{E(\Delta^{\nu}) \cap E(\Delta_1)\}_{\nu=1}^{m}$ тем более полна в $E(\Delta_1)$. В свою очередь система подпространств $\{E(\Delta_1) : \Delta_1 = \Delta_1(\chi_1)\}$, где χ_1 пробегает компакт $\sigma(T^X)$, полна в B, и в каждом из них полна исходная система $\{E(\Delta^{\nu})\}_{\nu=1}^{m}$.

Этим завершается доказательство теоремы 2.

Полученные результаты можно применить для характеризации представлений, допускающих аппроксимацию равномерно непрерывными представлениями на полной системе инвариантных подпространств.

Определение 3. *Назовем представление T аппроксимативно равномерно непрерывным, если существует полная в B система подпространств $\{E_{\nu}\}_{\nu}$, инвариантных относительно T, таких, что ограничения $\{T \mid E_{\nu}\}_{\nu}$ равномерно непрерывны.*

Теорема 3. *Для того, чтобы неквазианалитическое сильно непрерывное представление связной нильпотентной группы Ли было аппроксимативно равномерно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие I, т. е. спектры операторов T_{γ} для элементов $\gamma \in G'$ состояли из одной точки $\lambda = 1$.*

Достаточность условия I следует из отделимости спектра представления и полноты системы спектральных подпространств (теоремы 1 и 2).

Доказательство необходимости основано на следующей лемме.

Лемма 5. *Каждое равномерно непрерывное представление связной нильпотентной группы удовлетворяет условию I.*

Действительно, если представление T аппроксимативно равномерно непрерывно, то для любого элемента $\gamma \in G'$ спектральное подпространство $E(\{1\})$ оператора T_{γ} содержит, в силу леммы 5, любое из подпространств E_{ν} и, следовательно, совпадает с B. Это и означает, что $\sigma(T_{\gamma}) = \{1\}$. Теорема доказана.

Доказательство леммы 5 проводится индукцией по высоте группы

$$G \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m \supset \{e\}, \quad (G_1 = [G, G]; G_k = [G, G_{k-1}]),$$

и использует определения и результаты работ [3] и [6]. Перечислим их вкратце. Пусть $\widehat{B}$ — обозначает фактор-пространство $m(B)/c_0(B)$, пространства ограниченных последовательностей с членами из B по подпространству последовательностей, стремящихся к нулю. Векторы из $\widehat{B}$ будем обозначать через $\widehat{\xi}, \widehat{\eta}, \ldots$ Операторы (соответственно представления) переносятся из B в $\widehat{B}$ и обозначаются той же буквой. Непустота спектра оператора (представления) в B эквивалентна существованию у него собственного вектора в $\widehat{B}$.

Как было установлено при доказательстве непустоты спектра для равномерно непрерывного представления связной нильпотентной группы [6], спектр ограничения T на подгруппу G_m состоит из одной точки $\chi = 1$. Обозначим через E соответствующее собственное подпространство в $\widehat{B}$:

$$E = \{\widehat{\xi} \in \widehat{B} \mid T_h \widehat{\xi} = \widehat{\xi} \, (h \in G_m)\}.$$

Подпространство E инвариантно относительно T_g $(g \in G)$, так как G_m лежит в центре группы G, и на нем действует фактор-группа G/G_m высоты $-m$ 1.

Пусть λ — точка существенного спектра оператора T_g, и E_λ — соответствующее собственное подпространство. Подпространство E_λ инвариантно относительно T_h $(h \in G_m)$, и диагональным процессом (см. [3]) можно показать, что $E \cap E_\lambda \neq 0$. Последнее означает, что существенный спектр оператора T_g в B совпадает с дискретным спектром T_g в E. Тогда по предположению индукции для фактор-группы G/G_m, действующей в E,

$$\sigma(T_\gamma) = \sigma(T_\gamma \mid E) = \{1\}$$

для любого $\gamma \in G'$. *Лемма доказана.*

Доказательство леммы 4. Рассмотрим собственное подпространство $E = \{\widehat{\xi} \in \widehat{B} \mid T_\gamma \widehat{\xi} = \widehat{\xi} \, (\gamma \in G')\} \neq 0$.

Очевидно, E инвариантно относительно представления T, в частности, $T_f E \subset E$. Как и в лемме 5, можно показать, что спектр оператора T_f в B совпадает со спектром ограничения $T_f \mid E$. То же справедливо и для представления T. Но в подпространстве E действует равномерно непрерывное неквазианалитическое представление абелевой группы $\widetilde{G} = G/G'$, а оператор $T_f \mid E$ совпадает с оператором $T_{\tilde{f}} \mid E$, где $\tilde{f}$ — усреднение функции f по подгруппе G', $\widetilde{f}(\widetilde{g}) = \int_{G'} f(gh)\, dh$, $(\widetilde{g} = gG')$. Легко видеть, что функция $\widetilde{f}$ принадлежит алгебре $L^1_{\tilde{\rho}}(\widetilde{G})$, где $\tilde{\rho}$ — вес представления $\widetilde{g} \to T_{\tilde{g}} \mid E$ $(\widetilde{g} \in \widetilde{G})$, и преобразование Фурье функций f и $\widetilde{f}$ совпадают. Применяя теорему об отображении спектра для абелевой локально компактной группы [5], получаем нужный результат.

В заключение приношу благодарность Ю. И. Любичу за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любич Ю. И., Мацаев В. И. К спектральной теории линейных операторов в банаховом пространстве.— «Докл. АН СССР», 1960, т. 131, № 1, с. 21—23.
2. Любич Ю. И., Мацаев В. И. Об операторах с отделимым спектром.— «Мат. сб.», 1962, т. 56, № 4, с. 12—21.
3. Любич Ю. И. О спектре представления топологической абелевой группы.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 200, № 4, с. 777—780.
4. Любич Ю. И., Мацаев В. И., Фельдман Г. М. Об отделимости спектра представления локально компактной абелевой группы.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 201, № 6, с. 1282—1284.
5. Любич Ю. И., Мацаев В. И., Фельдман Г. М. О представлениях с отделимым спектром.— «Функц. анализ и его приложения», 1973, т. 7, № 2, с. 52—61.
6. Гурарий Д. Л., Любич Ю. И. Бесконечномерный аналог теоремы Ли о весе.— «Функц. анализ и его приложения», 1973, т. 7. № 1, с. 41—44.
7. Domar G. Harmonic analysis on certain commutative Banach algebras.— «Acta Math.», 1956, vol. 96, p. 1—66.
8. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М., ГИТТЛ, 1954. 515 с.