УДК 517.564.3

Ю. В. Гандель, канд. физ.-мат. наук

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРИИ ПАРНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ—БЕССЕЛЯ

Настоящая заметка примыкает к работе [1]. Рассматриваются парные уравнения, возникающие при решении аксиально симметричной смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

Развитая в [1] техника используется для сведения к одному интегральному уравнению Фредгольма второго рода таких парных уравнений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\lambda_n r) = f(r), \ 0 < r < a, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} J_0(\lambda_n r) = 0, \ a < r < R, \tag{2}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя с нулевым индексом, λ_n $(n = 1, 2 \ldots)$ — положительные нули функции $J_0(\lambda R)$, а $f(r)$ $(0 \leqslant r \leqslant a)$ — заданная непрерывная функция, $k \geqslant 0$; $\sqrt{\lambda^2 - k^2} > 0$ при $\lambda \geqslant k$ и $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda^2 - k^2} < 0$ при $0 < \lambda < k$.

Пусть последовательность $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ удовлетворяет уравнениям (1)—(2) и условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|B_n|^2}{\lambda_n} < \infty. \tag{3}$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} \sqrt{r} J_0(\lambda_n r)$, $0 \leqslant r \leqslant R$, равномерно сходится. *Обозначим* его сумму $\sqrt{r} C(r)$, при этом

$$C(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} J_0(\lambda_n r), \tag{4}$$

а в силу уравнения (2) $C(r) = 0$ при $a < r < R$. Поэтому коэффициенты Фурье — Бесселя функции $C(r)$ выражаются по формуле

$$\frac{B_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} = \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n R)} \int_0^a r C(r) J_0(\lambda_n r)\, dr, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Лемма. *Имеет место представление*

$$B_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n R)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \sin\left(s\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}\right) ds, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

причем функция $h(s)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\int_0^a \Psi(t, s)\, h(s)\, ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t r f(r) \frac{\operatorname{sh}\left(k\sqrt{t^2 - r^2}\right)}{k}\, dr \tag{7}$$

с ядром

$$\Psi(t, s) = \int_0^t \Phi(s, \tau)\, d\tau - t\Phi(s, t), \tag{8}$$

где

$$\Phi(s, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n R)} \frac{\sin\left(s\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}\right) \cos\left(t\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}\right)}{\lambda_n^2 - k^2},$$

$$0 < t < a, \; 0 < s < a.$$

Доказательство. Сначала, так же, как и в п. 2° работы [1], из (5) получаем представление

$$\frac{B_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} = -\frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n R)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a g(s) \cos\left(s\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}\right) ds, \tag{9}$$

где

$$g(s) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_s^a r C(r) \frac{\cos\left(k\sqrt{r^2 - s^2}\right)}{\sqrt{r^2 - s^2}}\, dr. \tag{10}$$

В силу (3) коэффициенты Фурье — Бесселя функции $C(r)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left| \frac{B_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} \right|^2 < \infty,$$

поэтому функция $C(r)$ абсолютно непрерывна, $\sqrt{r}\, C'(r) \in L^2(0, R)$ и в формуле (10) можно проинтегрировать по частям. Имеем

$$g(s) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, C(a) \frac{\sin(k\sqrt{a^2 - s^2})}{k} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_s^a C'(r) \frac{\sin(k\sqrt{r^2 - s^2})}{k} dr,$$

следовательно, функцию $g(s)$ также можно дифференцировать, причем

$$g'(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, C(a) \cos(k\sqrt{a^2 - s^2}) \frac{s}{\sqrt{a^2 - s^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_s^a rC'(r) \times$$

$$\times \frac{\cos(k\sqrt{r^2 - s^2})}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr.$$

Интегрируя теперь в (9) по частям и учитывая, что в силу (10) $g(a) = 0$, находим окончательно представление (6) для коэффициентов B_n, где положено

$$h(s) \equiv g'(s) = -\frac{d}{ds} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_s^a rC(r) \frac{\cos(k\sqrt{r^2 - s^2})}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr. \text{*}$$

Далее получим для $h(s)$ уравнение Фредгольма первого рода. Для этого преобразуем уравнение (1), умножив его на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, r \times$ $\times \frac{\operatorname{sh}(k\sqrt{t^2 - r^2})}{k}$ и проинтегрировав по r от 0 до t; будем иметь

$$\int_0^R B(r) D(r)\, r dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{\operatorname{sh}(k\sqrt{t^2 - r^2})}{k} f(r)\, r dr,$$

где введены обозначения

$$B(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\lambda_n r),$$

$$D(r) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} k\sqrt{t^2 - r^2}}{k}, & 0 < r < t, \\ 0 & , t < r < R, \end{cases}$$

причем очевидно, что $\sqrt{r}\, D(r) \in L^2(0, R)$, а $\sqrt{r}\, B(r) \in L^2(0, R)$ в силу (3).

---

* Функция $C(r)$ $(0 < r < a)$ может быть определена непосредственно по функции $h(s)$ с помощью формулы обращения Н. Я. Сонина [2].

Используя обобщенное равенство Парсеваля, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^R D(r) J_0(\lambda_n r)\, r dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{\operatorname{sh}(k\sqrt{t^2-r^2})}{k} f(r)\, r dr$$

и, учитывая, что [3]

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{\operatorname{sh}(k\sqrt{t^2-r^2})}{k} r J_0(\lambda_n r)\, dr = \frac{t^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}\left(t\sqrt{\lambda_n^2-k^2}\right)}{\left(\sqrt{\lambda_n^2-k^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

после элементарных преобразований приходим к равенству

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin\left(t\sqrt{\lambda_n^2-k^2}\right)}{\sqrt{\lambda_n^2-k^2}} - t\cos\left(t\sqrt{\lambda_n^2-k^2}\right) \right\} \frac{B_n}{\lambda_n^2-k^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{\operatorname{sh}(k\sqrt{t^2-r^2})}{k} f(r)\, r dr. \tag{11}$$

Подставляя в (11) выражение (6) для B_n и изменяя порядок суммирования и интегрирования, находим, что функция $h(s)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\int_0^a \Psi(t, s) h(s)\, ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t r f(r) \frac{\operatorname{sh}(k\sqrt{t^2-r^2})}{k} dr \tag{12}$$

с ядром

$$\Psi(t, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n R)} \frac{\sin\left(s\sqrt{\lambda_n^2-k^2}\right)\sin\left(t\sqrt{\lambda_n^2-k^2}\right)}{\left(\lambda_n^2-k^2\right)\sqrt{\lambda_n^2-k^2}} -$$

$$- \frac{2t}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n R)} \frac{\sin\left(s\sqrt{\lambda_n^2-k^2}\right)\cos\left(t\sqrt{\lambda_n^2-k^2}\right)}{\lambda_n^2-k^2}, \tag{13}$$

которое может быть записано в виде (8).

Теорема. *Если система* (1)—(2) *имеет решение* $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots,$ *удовлетворяющее условию* (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|B_n|^2}{\lambda_n} < \infty,$$

то это решение представляется в виде (6):

$$B_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n R)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \sin\left(s\sqrt{\lambda_n^2-k^2}\right) ds,$$

а функция $h(s)$ *удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода*

$$h(t) - \int_0^a K(t, s) h(s)\, ds = \psi(t) \tag{14}$$

с ядром

$$K(t,\ s) = K_1(t,\ s;\ k) + K_2(t,\ s; k; R), \tag{15}$$

где

$$K_1 = \frac{i}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sh} k(t+s)}{t+s} - \frac{\operatorname{sh} k(t-s)}{t-s}\right\}$$

и от R не зависит, а

$$K_2 = -\frac{4}{\pi^2}\int\limits_C \frac{K_0(Rz)}{I_0(Rz)}\frac{z}{\sqrt{z^2+k^2}}\operatorname{sh}\left(t\sqrt{z^2+k^2}\right)\operatorname{sh}\left(s\sqrt{z^2+k^2}\right)dz$$

(здесь $K_0(\chi)$ — функция Макдональда, а $I_0(\chi)$ — модифицированная функция Бесселя с нулевым индексом). Контур интегрирования C состоит из дуги $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$ $z=ke^{i\varphi}$, луча $z=\chi$, $\chi\geqslant k$ и правой части

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t rf(r)\frac{\operatorname{ch}\left(k\sqrt{t^2-r^2}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}dr. \tag{16}$$

Доказательство. Используем результат леммы и преобразуем ядро (8) интегрального уравнения первого рода (7) с помощью представления для функции $\Phi(t,\ s)$, полученного в п. 3° работы [1] (см. там формулу (22)). Будем иметь

$$\Psi(t,\ s) = \int\limits_0^t \frac{1+\operatorname{sign}(s-\tau)}{2}d\tau + \int\limits_0^t L(s,\tau)\,d\tau -$$

$$-\frac{t}{2}\{1+\operatorname{sign}(s-t)\} - tL(s,t), \tag{17}$$

где

$$L(s,t) = \frac{2i}{\pi}\int\limits_0^k \frac{\operatorname{sh}\left(s\sqrt{k^2-y^2}\right)}{\sqrt{k^2-y^2}}\operatorname{ch}\left(t\sqrt{k^2-y^2}\right)\frac{y\,dy}{\sqrt{k^2-y^2}} -$$

$$-\frac{4}{\pi^2}\int\limits_C \frac{K_0(Rz)}{I_0(Rz)}\frac{z\operatorname{sh}\left(s\sqrt{k^2+z^2}\right)\operatorname{ch}\left(t\sqrt{k^2+z^2}\right)}{k^2+z^2}dz.$$

Подставим (17) в уравнение (7) и продифференцируем его по t; после элементарных преобразований находим, что

$$h(t) - \int\limits_0^a \frac{\partial L}{\partial t}(s,\ t)\,h(s)\,ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t rf(r)\frac{\operatorname{ch}\left(k\sqrt{t^2-r^2}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}dr,$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial t}(s,\ t) = \frac{2i}{\pi}\int\limits_0^k \operatorname{sh}\left(s\sqrt{k^2-y^2}\right)\operatorname{sh}\left(t\sqrt{k^2-y^2}\right)\frac{y\,dy}{\sqrt{k^2-y^2}} -$$

$$-\frac{4}{\pi^2}\int\limits_C \frac{K_0(Rz)}{I_0(Rz)}\frac{z}{\sqrt{z^2+k^2}}\operatorname{sh}\left(s\sqrt{z^2+k^2}\right)\operatorname{sh}\left(t\sqrt{z^2+k^2}\right)dz.$$

Учитывая, что

$$2\int_0^k \operatorname{sh}\left(s\sqrt{k^2-y^2}\right)\operatorname{sh}\left(t\sqrt{k^2-y^2}\right)\frac{ydy}{\sqrt{k^2-y^2}}=\frac{\operatorname{sh}k(t+s)}{t+s}-\frac{\operatorname{sh}k(t-s)}{t-s},$$

и получаем уравнение (14) с ядром (15) для функции $h(s)$, через которую по формуле (6) выражаются искомые коэффициенты B_n. Теорема доказана.

В частном случае, когда $k=0$, результат был известен ранее [4]. Из нашей теоремы он легко вытекает и состоит в следующем. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ — решение парных уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0(\lambda_n r)=f(r),\ 0<r<a,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\lambda_n}J_0(\lambda_n r)=0,\ a<r<R$$

здесь λ_n — все положительные нули функции $J_0(\lambda R)$, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|^2}{\lambda_n}<\infty.$$

Тогда

$$b_n=\frac{2}{R^2J_1^2(\lambda_n R)}\int_0^a g(s)\sin\lambda_n s ds,$$

а функция $g(s)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(t)+\int_0^a K(t,s)g(s)ds=\frac{2}{\pi}\int_0^t\frac{rf(r)}{\sqrt{t^2-r^2}}dr$$

с ядром

$$K(t,s)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{K_0(R\chi)}{I_0(R\chi)}\operatorname{sh}(t\chi)\operatorname{sh}(s\chi)d\chi.$$

Отметим, что это ядро позитивно и последнее интегральное уравнение разрешимо при любых значениях параметров a и R $(0<a<R)$. Откуда следует, что при достаточно малых k разрешимо и уравнение (14).

Уравнения (1)—(2) являются дискретным аналогом парных интегральных уравнений

$$\int_0^{\infty}\lambda C(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda=f(r),\ 0<r<a, \tag{18}$$

$$\int_0^{\infty}\lambda C(\lambda)J_0(\lambda r)\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}=0,\ a<r<\infty. \tag{19}$$

Последние получаются при формальном предельном переходе ($R \to \infty$) в уравнениях (1)—(2), как это показано в аналогичной ситуации в [1, с. 67].

Предельный переход при $R \to \infty$ в формулах (6), (14), (15) приводит к следующему формальному решению парных интегральных уравнений (18)—(19):

$$C(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \sin\left(s\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right) ds, \tag{20}$$

где функция $h(s)$ должна удовлетворять интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$h(t) - \frac{i}{\pi} \int_0^a \left\{ \frac{\operatorname{sh} k(t+s)}{t+s} - \frac{\operatorname{sh} k(t-s)}{t-s} \right\} h(s)\, ds =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t r f(r) \frac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr. \tag{21}$$

Этот результат был впервые получен совершенно другими методами в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю. В. К теории парных рядов Фурье — Бесселя.— В сб.: «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 12. Харьков, 1970, с. 59—69.
2. Ахиезер Н. И. К теории спаренных интегральных уравнений.— «Зап. физ.-мат. фак. Харьк. гос. ун-та и Харьк. мат. о-ва», 1957, т. 25, сер. 4, с. 5—31.
3. Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М., ГТТИ, 1954. 243 с.
4. Sneddon J. K. Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1966. 310 p.