УДК 513.88+517.948.35+517.948.5

В. М. Бродский, канд. физ.-мат. наук,
Я. С. Шварцман, канд. физ.-мат. наук

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА СЖАТИЯ И ФАКТОРИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Пусть заданы сепарабельные гильбертовы пространства $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{F}$ и операторы $T \in [\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}]$[1], $F \in [\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}]$, $G \in [\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}]$, $T_0 \in [\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}]$. Если $I - TT^* = FF^*$, $I - T^*T = GG^*$, $TG = FT_0$, $I - T_0T_0^* = F^*F$, $I - T_0^*T_0 = G^*G$, то совокупность

$$\alpha = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H} & T & \boldsymbol{H} \\ F & & G \\ \boldsymbol{F} & T_0 & \boldsymbol{G} \end{pmatrix} \tag{1}$$

называется *сжимающим* узлом[2]. Пространство $\boldsymbol{H}$ называется *основным пространством*, а оператор $\boldsymbol{T}$ — *основным оператором* узла α и представляет собой *сжатие*, т. е. удовлетворяет условию $\|Th\| \leqslant \|h\|$ $(h \in \boldsymbol{H})$. Обратно, каждое сжатие является основным оператором для бесконечного множества сжимающих узлов. Функция комплексного переменного $\Theta_\alpha(\zeta) = T_0 - \zeta F^*(I - \zeta T^*)^{-1}G$ называется *характеристической оператор-функцией* узла α. Она, очевидно, голоморфна в круге $|\zeta| < 1$. Кроме того, $\Theta_\alpha(\zeta)$ — сжимающая функция; последнее означает, что при любом ζ $(|\zeta| < 1)$ выполняется неравенство $\|\Theta_\alpha(\zeta)g\| \leqslant \|g\|$ $(g \in \boldsymbol{G})$. В первом параграфе настоящей статьи показано, что любая голоморфная сжимающая функция является характеристической для некоторого сжимающего узла[3].

Каждое инвариантное подпространство оператора T порождает факторизацию функции $\Theta_\alpha(\zeta)$ вида $\Theta_\alpha(\zeta) = \Theta_{\alpha_2}(\zeta)\Theta_{\alpha_1}(\zeta)$ [1]. Во втором параграфе формулируются необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют те факторизации функции $\Theta_\alpha(\zeta)$, которые соответствуют инвариантным подпространствам основного оператора узла α.

Настоящая статья не могла быть написана без знакомства с результатами Б. С. Надя и Ч. Фояша [2, 4] и их предшественников [5—10]. Авторам помогали также аналогии с теорией узлов несколько иного вида, изложенной в монографии М. С. Бродского [11].

---

[1] Символом $[H_1, H_2]$, где H_1, H_2 — гильбертовы пространства, обозначает множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из H_1 в H_2.

[2] Понятие сжимающего узла является частным случаем более общего определения, введенного в [1].

[3] При дополнительном условии «чистоты» функции $\Theta_\alpha(\zeta)$ это утверждение было доказано Б. С. Надем и Ч. Фояшем [2]. В общем виде оно следует также из результатов В. М. Бродского [1] и Ю. П. Гинзбурга [3].

В своих исследованиях Б. С. Надь и Ч. Фояш не пользуются понятием узла, однако анализ их построений показывает, что они по существу включают данное сжатие T в сжимающий узел, полагая $F = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}, G = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}, T_0 = -T^*$, и соответствующим образом определяют характеристическую функцию. Такое однозначное фиксирование компонент узла приводит к усложнениям при построении теории. Хотя в монографии [2] и устанавливается необходимое и достаточное условие, при котором делителю соответствует некоторое инвариантное подпространство, однако это соответствие формулируется на языке функциональной модели оператора, что затрудняет практическое применение этой теоремы. Кроме того, приведенное в [2] построение факторизации характеристической функции, соответствующее данному инвариантному подпространству, является труднообозримым.

Другими методами построение факторизации по данному инвариантному подпространству проведено в [4], где для компонент факторизации указываются определенные формулы. Вместе с тем следует отметить, что в работах Б. С. Надя и Ч. Фояша не отражено совпадение этих факторизаций. Справедливость этого утверждения следует из результатов настоящей статьи.

Связь между инвариантными подпространствами и факторизациями характеристической функции изучалась Л. де Бранжем в работе [12], однако полученные им результаты не содержат правил выделения таких подпространств по аналитическим свойствам характеристических функций. Инвариантные подпространства ограниченных диссипативных операторов для отдельных частных случаев изучались в работах [10, 11, 13], а в общем виде — в работах [14, 15]. Основные результаты настоящей статьи опубликованы без доказательств в работе [16].

§ 1. Функциональная модель сжимающего узла

Узел (1) называется *простым*, если замыкание $\boldsymbol{H}_0$ линейной оболочки всех векторов вида $T^n\boldsymbol{F}f$ ($f \in \boldsymbol{F}$, $n = 0, 1, \ldots$) и $(T^*)^n Gg \times$ $\times$ ($g \in \boldsymbol{G}$, $n = 0, 1, \ldots$) совпадает с $\boldsymbol{H}$. Отметим, что множество всех векторов вида $(I - \zeta T)^{-1}Ff$ ($f \in \boldsymbol{F}$, $|\zeta| < 1$) и $(I - \zeta T^*)^{-1}Gg \times$ $\times$ ($g \in \boldsymbol{G}$, $|\zeta| < 1$) полно в $\boldsymbol{H}_0$. Легко видеть, что сжимающий узел прост тогда и только тогда, когда его основной оператор вполне неунитарен[1].

[1] Оператор T называется вполне неунитарным, если не существует инвариантного относительно T и T^* ненулевого подпространства, в котором индуцируется унитарный оператор.

Пусть U — сепарабельное гильбертово пространство. Как известно[1], через $L_2(U)$ обозначается гильбертово пространство, состоящее из всех слабо измеримых вектор-функций $\varphi(e^{it})$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ со значениями в U, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^{2\pi} \|\varphi(e^{it})\|^2\, dt < \infty$. Скалярное произведение в $L_2(U)$ определяется равенством

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L_2(U)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\varphi_1(e^{it}), \varphi_2(e^{it}))\, \mathrm{dt},$$

$$(\varphi_1(e^{it}), \varphi_2(e^{it}) \in L_2(U)).$$

Каждая функция $\varphi(e^{it}) \in L_2(U)$ представима в виде

$$\varphi(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} u_k \quad (u_k \in U, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|u_k\|^2 < \infty). \tag{2}$$

Через $H_2(U)$ обозначается подпространство $L_2(U)$, состоящее из функций (2), для которых $u_k = 0$ при $k = -1, -2, \ldots$ Если функция $\varphi(e^{it})$ принадлежит $H_2(U)$, то почти всюду ее значения являются сильными угловыми пределами голоморфной функции $\varphi(\zeta)$ $(|\zeta| < 1)$, удовлетворяющей условию

$$\sup_{r<1} \int\limits_0^{2\pi} \|\varphi(re^{it})\|^2\, \mathrm{dt} < \infty \quad (\zeta = re^{it}).$$

Пусть G и F — сепарабельные гильбертовы пространства. Обозначим через $A(G, F)$ совокупность всех голоморфных внутри единичного круга оператор-функций, значения которых являются сжатиями из $[G, F]$. Как известно [2], любая функция $\Theta(\zeta) \in A(G, F)$ обладает почти всюду на единичной окружности угловыми предельными значениями $\Theta(e^{it})$ в смысле сильной сходимости.

Положим $\Delta(e^{it}) = (I - \Theta^*(e^{it})\,\Theta(e^{it}))^{\frac{1}{2}}$ и введем гильбертово пространство $\overline{\Delta L_2(G)}$, являющееся замыканием в $L_2(G)$ множества всех функций вида $\Delta(e^{it})\,\psi(e^{it})$ $(\psi(e^{it}) \in L_2(G))$. Рассмотрим пространство

$$\tilde{H} = H_2(F) \oplus \overline{\Delta L_2(G)},$$

состоящее из множества всех пар функций вида $\{\varphi(e^{it}), \psi(e^{it})\}$ $(\varphi(e^{it}) \in H_2(F), \psi(e^{it}) \in \overline{\Delta L_2(G)})$. Векторы $\{\Theta(e^{it})\,\chi(e^{it}), \Delta(e^{it})\,\chi(e^{it})\}$ $(\chi(e^{it}) \in H_2(G))$ принадлежат $\tilde{H}$ и, как нетрудно убедиться, составляют подпространство пространства $\tilde{H}$. Условимся это под-

[1] Пространство $L_2(U)$ и рассматриваемое ниже подпространство $H_2(U)$ подробно описаны в [2, с. 205—208].

пространство обозначать через $\tilde{H}'$, а его ортогональное дополнение в $\tilde{H}$ — через $\hat{H}$. Положим $H_2^{\perp}(G)=L_2(G)\ominus H_2(G)$ и $\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})=$ $=\Theta^*(e^{it})\varphi(e^{it})+\Delta(e^{it})\psi(e^{it})$ $(\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\in\tilde{H})$.

Лемма 1. *Вектор* $\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}\in\tilde{H}$ *тогда и только тогда принадлежит* $\hat{H}$, *когда* $\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})\in H_2^{\perp}(G)$.

Доказательство непосредственно следует из равенства

$$\int_0^{2\pi}(\xi_{\varphi,\psi}(e^{it}),\ \chi(e^{it}))\,dt=\int_0^{2\pi}[(\varphi(e^{it}),\ \Theta(e^{it})\chi(e^{it}))+(\psi(e^{it}),\ \Delta(e^{it})\times$$
$$\times\chi(e^{it}))]\,dt,$$
$$(\chi(e^{it})\in H_2(G)).$$

Теорема 1[1]. *Если* $\Theta(\zeta)\in A(G,F)$, *то совокупность* $\hat{\alpha}$ *пространств* $\hat{H}$, F, G *и операторов*

$$\hat{T}\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}=\{e^{it}\varphi(e^{it})-\Theta(e^{it})c_{\varphi,\psi},\ (e^{it}),\ \psi(e^{it})-\Delta(e^{it})c_{\varphi,\psi}\},\quad(3)$$
$$(\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}\in\hat{H},\ c_{\varphi,\psi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{it}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})\,dt),$$
$$T_0=\Theta(0),$$
$$\hat{F}f=\{(\Theta(e^{it})T_0^*-I)f,\ \Delta(e^{it})T_0^*f\}\quad(f\in F),\qquad(4)$$
$$\hat{G}g=\{e^{-it}(\Theta(e^{it})-T_0)g,\ e^{-it}\Delta(e^{it})g\}\quad(g\in G)\qquad(5)$$

образует простой сжимающий узел, характеристическая функция которого совпадает внутри единичного круга с $\Theta(\zeta)$.

Доказательство. 1. Покажем, что оператор $\hat{T}$, определенный формулой (3), отображает все пространство $\hat{H}$ в себя. Действительно, если $\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}\in\hat{H}$, то, в силу леммы 1, функцию $\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})$ можно представить в виде

$$\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-int}c_{-n}\ (c_{-n}\in G,\ \ c_{-1}=c_{\varphi,\psi},\ \sum_{n=1}^{\infty}\|c_{-n}\|^2<\infty).$$

---

[1] При выполнении условий $\|\Theta(0)g\|<\|g\|\,(g\in G)$ и $F=\overline{(I-TT^*)H}$, $G=\overline{(I-T^*T)H}$, $T_0g=-T^*g\ (g\in G)$, $F=(I-TT^*)^{\frac{1}{2}}|F$, $G=(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}|G$ $(T\in[H,H],\ \|T\|\leqslant 1)$ это утверждение доказано Б. С. Надем и Ч. Фояшем [2]. Для случая, когда основной оператор обратим, восстановление узла по его характеристической функции проведено другим методом в работе [17]. В статье [1] обратимость основного оператора уже не требуется. При дополнительном ограничении $\dim G<\infty$ существование оператора T, для которого данная функция $\Theta(\zeta)$ является характеристической, установлено ранее В. Т. Поляцким [18].

Поскольку

$$\Theta^*(e^{it})\,[e^{it}\varphi(e^{it}) - \Theta(e^{it})\,c_{\varphi,\psi}] + \Delta(e^{it})\,[e^{it}\psi(e^{it}) - \Delta(e^{it})\,c_{\varphi,\psi}] =$$

$$= e^{it}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it}) - c_{\varphi,\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-int}c_{-n-1} \in H_2^{\perp}(G),$$

то на основании леммы 1

$$\hat{T}\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\} \in \hat{H}.$$

2. Введем оператор

$$\hat{S}\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\} = \{e^{-it}(\varphi(e^{it}) - \varphi(0),\ e^{-it}\psi(e^{it})\}$$

$$(\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\} \in \hat{H}).$$

Так как

$$\Theta^*(e^{it})\,[e^{-it}(\varphi(e^{it}) - \varphi(0))] + \Delta(e^{it})\,[e^{-it}\psi(e^{it})] =$$

$$= e^{-it}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it}) - e^{-it}\Theta^*(e^{it})\,\varphi(0) \in H_2^{\perp}(G),$$

то, по лемме 1,

$$\hat{S}\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\} \in \hat{H}.$$

Пусть

$$\{\varphi_1(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\},\ \{\varphi_2(e^{it}),\ \psi_2(e^{it})\} \in \hat{H}.$$

Из соотношений

$$(\hat{T}\{\varphi_1(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\},\ \{\varphi_2(e^{it}),\ \psi_2(e^{it})\})_{\hat{H}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(e^{it}\varphi_1(e^{it}) - \Theta(e^{it})\,c_{\varphi,\psi_1},\ \varphi_2(e^{it})) +$$

$$+ (e^{it}\psi_1(e^{it}) - \Delta(e^{it})\,c_{\varphi,\psi_1},\ \psi_2(e^{it}))]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(e^{it}\varphi_1(e^{it}),\ \varphi_2(e^{it})) + (e^{it}\psi_1(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}))]\,dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (c_{\varphi_1,\psi_1},\ \xi_{\varphi_2,\psi_2}(e^{it}))\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(\varphi_1(e^{it}),\ e^{-it}\varphi_2(e^{it})) + (\psi_1(e^{it}),\ e^{-it}\psi_2(e^{it}))]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(\varphi_1(e^{it}),\ e^{-it}(\varphi_2(e^{it}) - \varphi_2(0))) + (\psi_1(e^{it}),\ e^{-it}\psi_2(e^{it}))]\,dt =$$

$$= (\{\varphi_1(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\},\ \hat{S}\{\varphi_2(e^{it}),\ \psi_2(e^{it})\})_{\hat{H}}$$

следует, что

$$\hat{S} = \hat{T}^*.$$

3. Покажем, что операторы $\hat{F}$ и $\hat{G}$, введенные по формулам (4) и (5), ограничены и что их области значений принадлежат пространству $\hat{H}$. В самом деле, ограниченность оператора $\hat{F}$ вытекает из следующей оценки, основанной на соотношении $\|\Theta(\xi)\| \leqslant 1$ $(|\zeta| < 1)$:

$$\|\hat{F}f\|^2_{\hat{H}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\|(\Theta(e^{it})T_0^* - I)f\|^2 + \|\Delta(e^{it})T_0^*f\|^2]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\|T_0^*f\|^2 + \|f\|^2 - (\Theta(e^{it})T_0^*f, f) - (f, \Theta(e^{it})T_0^*f)]\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 4\|f\|^2 \quad (f \in F).$$

Поскольку

$$\Theta^*(e^{it})[(\Theta(e^{it})T_0^* - I)f] + \Delta(e^{it})[\Delta(e^{it})T_0^*f] =$$

$$= (T_0^* - \Theta^*(e^{it}))f \in H_2^{\perp}(G),$$

то, по лемме 1,

$$\hat{F}f \in \hat{H}.$$

Аналогично доказываются соответствующие утверждения об операторе $\hat{G}$.

4. Пусть $\{\varphi(e^{it}), \psi(e^{it})\} \in \hat{H}$, $f \in F$, $g \in G$. Так как

$$(\hat{F}f, \{\varphi(e^{it}), \psi(e^{it})\})_{\hat{H}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [((\Theta(e^{it})T_0^* - I)f, \varphi(e^{it})) + (\Delta(e^{it})T_0^*f, \psi(e^{it}))]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (T_0^*f, \Theta^*(e^{it})\varphi(e^{it}) + \Delta(e^{it})\psi(e^{it}))\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f, \varphi(e^{it}))\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (T_0^*f, \xi_{\varphi,\psi}(e^{it}))\,dt - (f, \varphi(0)) = -(f, \varphi(0)),$$

то

$$\hat{F}^*\{\varphi(e^{it}), \psi(e^{it})\} = -\varphi(0). \tag{6}$$

Из равенств

$$(\hat{G}g, \{\varphi(e^{it}), \psi(e^{it})\})_{\hat{H}} =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(e^{-it}(\Theta(e^{it})-T_0)g,\ \varphi(e^{it}))+(e^{-it}\Delta(e^{it})g,\ \psi(e^{it}))]\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(g,\ e^{it}(\Theta^*(e^{it})\varphi(e^{it})+\Delta(e^{it})\psi(e^{it}))\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{-it}T_0g,\ \varphi(e^{it}))\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(g,\ e^{it}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it}))\,dt=(g,\ c_{\varphi,\psi}).$$

вытекает, что

$$\hat{G}^*\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}=c_{\varphi,\psi}.$$

5. Проверим, что $\hat{\alpha}$ — сжимающий узел. Пусть $\{\varphi(e^{it}),\psi(e^{it})\}\in\hat{H}$. Обозначим вектор $\hat{T}^*\{\varphi(e^{it}),\psi(e^{it})$ через $\{\varphi_1(e^{it}),\psi_1(e^{it})\}$. Тогда

$$c_{\varphi_1,\psi_1}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\Theta^*(e^{it})\varphi(e^{it})-\Theta^*(e^{it})\varphi(0)+\Delta(e^{it})\psi(e^{it}))\,dt=$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Theta^*(e^{it})\varphi(0)\,dt=-T_0^*\varphi(0)$$

и, следовательно,

$$(I-\hat{T}\hat{T}^*)\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}=\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}-\hat{T}\{e^{-it}(\varphi(e^{it})-$$

$$-\varphi(0)),\ e^{-it}\psi(e^{it})\}=\{\varphi(e^{it}),\psi(e^{it})\}-\{\varphi(e^{it})-\varphi(0)+$$

$$+\Theta(e^{it})T_0^*\varphi(0),\ \psi(e^{it})+\Delta(e^{it})T_0^*\varphi(0)\}=-\{(\Theta(e^{it})T_0^*-I)\varphi(0),$$

$$\Delta(e^{it})T_0^*\varphi(0)\}=\hat{F}\hat{F}^*\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}.$$

Кроме того,

$$(I-\hat{T}^*\hat{T})\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}=\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}-$$

$$-\hat{T}^*\{e^{it}\varphi(e^{it})-\Theta(e^{it})c_{\varphi,\psi},\ e^{it}\psi(e^{it})-\Delta(e^{it})c_{\varphi,\psi}\}=$$

$$=\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}-\{\varphi(e^{it})-e^{-it}\Theta(e^{it})c_{\varphi,\psi}+e^{-it}T_0c_{\varphi,\psi},\ \psi(e^{it})-$$

$$-e^{-it}\Delta(e^{it})c_{\varphi,\psi}\}=\{e^{-it}(\Theta(e^{it})-T_0)c_{\varphi,\psi},\ e^{-it}\Delta(e^{it})c_{\varphi,\psi}\}=$$

$$=\hat{G}\hat{G}^*\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}.$$

Далее

$$\hat{F}^*\hat{F}f=\hat{F}^*\{(\Theta(e^{it})T_0^*-I)f,\ \Delta(e^{it})T_0^*f\}=(I-T_0T_0^*)f\ (f\in \boldsymbol{F}),$$

$$\hat{G}^*\hat{G}g=\hat{G}^*\{e^{-it}(\Theta(e^{it})-T_0)g,\ e^{-it}\Delta(e^{it})g\}=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0 (\Theta^* (e^{it}) \Theta (e^{it}) - \Theta^* (e^{it}) T_0 + \Delta^2 (e^{it})) g \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (I - \Theta^* (e^{it}) T_0) g \, dt = (I - T_0^* T_0) g \quad (g \in G).$$

Наконец,

$$\hat{T}\hat{G}g = \hat{T}\{e^{-it} (\Theta (e^{it}) - T_0) g, \ e^{-it}\Delta (e^{it}) g\} =$$

$$= \{(\Theta (e^{it}) - T_0) g - \Theta (e^{it})(I - T_0^* T_0) g, \Delta (e^{it}) g - \Delta(e^{it}) (I - T_0^* T_0) g\} =$$

$$= \{(\Theta (e^{it}) T_0^* - I) T_0 g, \ \Delta (e^{it}) T_0^* T_0 g\} = \hat{F} T_0 g \ (g \in G).$$

6. Покажем, что узел $\hat{\alpha}$ прост. С этой целью запишем равенства

$$(I - \zeta\hat{T})^{-1}\{\varphi (e^{it}), \ \psi (e^{it})\} =$$

$$= \left\{\frac{\varphi (e^{it}) - \Theta (e^{it}) g_{\varphi,\psi} (\zeta)}{1 - e^{it}\zeta}, \quad \frac{\psi (e^{it}) - \Delta (e^{it}) g_{\varphi,\psi} (\zeta)}{1 - e^{it}\zeta}\right\},$$

$$(\{\varphi (e^{it}), \psi (e^{it})\}) \in \hat{H},$$

$$g_{\varphi,\psi} (\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Theta^* (e^{it}) \varphi (e^{it}) + \Delta \ (e^{it}) \psi(e^{it})}{1 - e^{it}\zeta} dt, |\zeta| < 1),$$

$$(I - \zeta\hat{T}^*)^{-1}\{\varphi (e^{it}), \ \psi (e^{it})\} = \left\{\frac{e^{it}\varphi (e^{it}) - \zeta\varphi (\zeta)}{e^{it} - \zeta}, \quad \frac{e^{it}\psi (e^{it})}{e^{it} - \zeta}\right\}$$

$$(\{\varphi (e^{it}), \ \psi (e^{it})\} \in \hat{H}, \ |\zeta| < 1),$$

справедливость которых устанавливается непосредственной проверкой.

Покажем теперь, что множество всех векторов вида

$$(I - \zeta\hat{T})^{-1}\hat{F}f = \left\{\frac{\Theta (e^{it}) \Theta^* (\overline{\zeta}) - I}{1 - e^{it}\zeta} f, \quad \frac{\Delta (e^{it}) \Theta^*(\overline{\zeta})}{1 - e^{it}\zeta} f\right\} \tag{7}$$

$$(f \in F, \ |\zeta| < 1),$$

$$(I - \zeta\hat{T}^*)^{-1}\hat{G}g = \left\{\frac{\Theta (e^{it}) - \Theta (\zeta)}{e^{it} - \zeta} g, \quad \frac{\Delta (e^{it})}{e^{it} - \zeta} g\right\} \tag{8}$$

$$(g \in G, \ |\zeta| < 1)$$

полно в пространстве $\hat{H}$.

В самом деле, пусть вектор $\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}\in \overset{a}{H}$ ортогонален ко всем векторам вида (7) и (8). Тогда

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\varphi(e^{it}),\ \frac{\Theta(e^{it})\Theta^*(\bar\zeta)-I}{1-e^{it}\zeta}f\right)+\left(\psi(e^{it}),\ \frac{\Delta(e^{it})\Theta^*(\bar\zeta)}{1-e^{it}\zeta}f\right)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\Theta^*(e^{it})\varphi(e^{it})+\Delta(e^{it})\psi(e^{it}),\frac{\Theta^*(\bar\zeta)}{1-e^{it}\zeta}f\right)dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\varphi(e^{it}),\ f)}{1-e^{-it}\bar\zeta}dt=-(\varphi(\bar\zeta),\ f)\ (f\in F,\ |\zeta|<1)$$

и

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\varphi(e^{it}),\ \frac{\Theta(e^{it})-\Theta(\zeta)}{e^{it}-\zeta}\ g\right)+\left(\psi(e^{it}),\ \frac{\Delta(e^{it})}{e^{it}-\zeta}g\right)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\Theta^*(e^{it})\varphi(e^{it})+\Delta(e^{it})\psi(e^{it}),\ g)}{e^{-it}-\bar\zeta}dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\varphi(e^{it}),\ \frac{\Theta(\zeta)}{e^{it}-\zeta}g\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\xi_{\varphi,\psi}(e^{it}),\ g)}{e^{-it}-\bar\zeta}dt=\left(\xi_{\varphi,\psi}\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right),\ g\right)$$

$$(g\in G,\ |\zeta|<1).$$

Таким образом, почти всюду на единичной окружности $\varphi(e^{it})=0$, $\Theta^*(e^{it})\varphi(e^{it})+\Delta(e^{it})\psi(e^{it})=0$ и, стало быть, почти всюду $\Delta(e^{it})\psi(e^{it})=0$. Поскольку $\psi(e^{it})\in\overline{\Delta L_2(G)}$, то почти всюду $\psi(e^{it})=0$.

7. Согласно (8) и (6) имеем

$$\Theta_{\hat a}(\zeta)g=(T_0-\zeta\hat F^*(I-\zeta\hat T^*)^{-1}\hat G)\,g=T_0g-$$

$$-\zeta\hat F^*\left\{\frac{\Theta(e^{it})-\Theta(\zeta)}{e^{it}-\zeta}g,\ \ \frac{\Delta(e^{it})}{e^{it}-\zeta}g\right\}=T_0g+$$

$$+\zeta\frac{T_0-\Theta(\zeta)}{-\zeta}g=\Theta(\zeta)g\ \ (g\in G,\ |\zeta|<1).$$

Теорема доказана.

Узел $\alpha_1=\begin{pmatrix}H_1T_1H_1\\ F_1\quad G_1\\ FT_0G\end{pmatrix}$ называется *унитарно эквивалентным* узлу $\alpha_2=\begin{pmatrix}H_2T_2H_2\\ F_2\quad G_2\\ FT_0G\end{pmatrix}$, если существует такое изометрическое отображение U пространства H_1 на H_2, что $UT_1=T_2U$, $F_2=UF_1$, $G_2=UG_1$. Будем говорить, что оператор U *преобразует* *узел* α_1 в α_2. Очевидно, понятие унитарной эквивалентности узлов рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Как известно [1], простые узлы α_1 и α_2 унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $\Theta_{\alpha_1}(\zeta) = \Theta_{\alpha_2}(\zeta)$. Если один из двух эквивалентных узлов $\alpha_j = \begin{pmatrix} H_j T_j H_j \\ F_j \quad G_j \\ F T_0 G \end{pmatrix}$ $(j = 1,\ 2)$ прост, то прост и второй, причем оператор U, преобразующий α_1 в α_2, однозначно определяется равенствами

$$U(I - \zeta T_1)^{-1} F_1 f = (I - \zeta T_2)^{-1} F_2 f \quad (f \in F,\ |\zeta| < 1),$$

$$U(I - \zeta T_1^*)^{-1} G_1 g = (I - \zeta T_2^*)^{-1} G_2 g \quad (g \in G,\ |\zeta| < 1).$$

Пусть α — произвольный сжимающий узел. Как показано в [1], $\Theta_\alpha(\zeta) \in A(G,\ F)$. Если узел α прост, то узел $\hat{\alpha}$, построенный по функции $\Theta(\zeta) = \Theta_\alpha(\zeta)$ так, как это сделано в теореме 1, будем называть *функциональной моделью* узла α.

Теорема 2*. *Простой сжимающий узел* $\alpha = \begin{pmatrix} HTH \\ F \quad G \\ F T_0 G \end{pmatrix}$ *и его функциональная модель* $\hat{\alpha}$ *унитарно эквивалентны, причем оператор* U, *преобразующий* α *в* $\hat{\alpha}$, *определяется равенствами*

$$U(I - \zeta T)^{-1} F f = \left\{ \frac{\Theta(e^{it})\,\Theta^*(\bar{\zeta}) - I}{I - e^{it}\zeta} f,\ \frac{\Delta(e^{it})\Theta^*(\bar{\zeta})}{I - e^{it}\zeta} f \right\}$$

$$(f \in F,\ |\zeta| < I),$$

$$U(I - \zeta T^*)^{-1} G g = \left\{ \frac{\Theta(e^{it}) - \Theta(\zeta)}{e^{it} - \zeta} g,\ \frac{\Delta(e^{it})}{e^{it} - \zeta} \right\}$$

$$(g \in G,\ |\zeta| < I).$$

Доказательство вытекает из теоремы 1 и из сформулированных выше предложений об унитарно эквивалентных узлах.

§ 2. Условия правильности факторизации характеристической функции

1. Пусть $\Theta(\zeta) \in A(G,\ F)$, Построим по функции $\Theta(\zeta)$ узел $\hat{\alpha}$ и обозначим через $P_{H_2(G)}$, $P_{H_2^{\perp}(G)}$ ортопроекторы в $L_2(G)$ на $H_2(G)$, $H_2^{\perp}(G)$, через $P_{\tilde{H}'}$ — ортопроектор в $\tilde{H}$ на $\tilde{H}'$.

---

* Аналогичное предложение для случая $\|\Theta(0) g\| < \|g\|$ $(g \in G)$, $F = \overline{(I - TT^*) H}$, $G = \overline{(I - T^*T) H}$, $T_0 g = -T^* g$ $(g \in G)$ $F = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}} F$, $G = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}} | G$, $(T \in [H,\ H],\ \|T\| \leqslant 1)$ доказано другим методом в [2].

*Лемма 2**. *Если* $\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}\in\tilde{H}$, то $P_{\tilde{H}'}\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\}=$
$=\{\Theta(e^{it})P_{H_2(G)}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it}),\Delta(e^{it})P_{H_2(G)}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})\}$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\{\Theta(e^{it})P_{H_2(G)}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it}),\ \Delta(e^{it})P_{H_2(G)}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})\}\in\tilde{H}'.$$

Поскольку очевидно

$$\{\varphi(e^{it})-\Theta(e^{it})P_{H_2(G)}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it}),\ \psi(e^{it})-\Delta(e^{it})P_{H_2(G)}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})\}\in\tilde{H},$$

$$\Theta^*(e^{it})[\varphi(e^{it})-\Theta(e^{it})P_{H_2(G)}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})]+\Delta(e^{it})[\psi(e^{it})-$$
$$-\Delta(e^{it})P_{H_2(G)}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})]=\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})-P_{H_2(G)}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})=$$
$$=P_{H_2^{\perp}(G)}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})\in H_2^{\perp}(G),$$

то, по лемме 1,

$$\{\varphi(e^{it})-\Theta(e^{it})P_{H_2(G)}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it}),\ \psi(e^{it})-\Delta(e^{it})P_{H_2(G)}\xi_{\varphi,\psi}(e^{it})\}\in\hat{H}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим сжимающие узлы

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}H_1T_1H_1\\ F_1\quad G_1\\ ET_0^{(1)}G\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}H_2T_2H_2\\ F_2\quad G_2\\ FT_0^{(2)}E\end{pmatrix}$$

и обозначим через P_1, P_2 ортопроекторы на H_1, H_2, действующие в $H=H_1\oplus H_2$. Совокупность пространств H, F, G и операторов

$$T=T_1P_1+T_2P_2-F_1G_2^*P_2\in[H,\ H],$$
$$F=F_1(T_0^{(2)})^*+F_2\in[F,\ H],\quad G=G_1+G_2T_0^{(1)}\in[G,\ H],$$
$$T_0=T_0^{(2)}T_0^{(1)}\in[G,\ F]$$

образует сжимающий узел α, который называется *произведением* α_2 на α_1 $(\alpha=\alpha_2\alpha_1)$ [1]. Как известно [1],

$$\Theta_{\alpha_2\alpha_1}(\zeta)=\Theta_{\alpha_2}(\zeta)\Theta_{\alpha_1}(\zeta)\quad(|\zeta|<1).\tag{9}$$

Введем обозначения

$$\Theta_j(\zeta)=\Theta_{\alpha_j}(\zeta),\ \Delta_j(e^{it})=(I-\Theta_j^*(e^{it})\Theta_j(e^{it}))^{\frac{1}{2}}$$
$$(j=1,\ 2),\ \Theta(\zeta)=\Theta_2(\zeta)\Theta_1(\zeta).$$

Через $\overline{\Delta_1L_2(G)}$ $(\overline{\Delta_2L_2(E)})$ обозначим замыкание в $L_2(G)$ $(L_2(E))$ множества всех вектор-функций вида $\Delta_1(e^{it})\varphi(e^{it})$ $(\Delta_2(e^{it})\varphi(e^{it}))$, где $\varphi(e^{it})\in L_2(G)$ $(\in L_2(E))$. Зададим оператор Φ, действующий из $\overline{\Delta_2L_2(E)}\oplus\overline{\Delta_1L_2(G)}$ в $L_2(G)$ по формуле

$$\Phi\{\psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}=\Theta_1^*(e^{it})\Delta_2(e^{it})\psi_2(e^{it})+\Delta_1(e^{it})\psi_1(e^{it}).\tag{10}$$

* По существу, это предложение другим методом доказано в [19]. Приведенное доказательство взято из [15].

Теорема 3. *Пусть α_1 и α_2 — простые сжимающие узлы. Для того чтобы узел $\alpha = \alpha_2\alpha_1$ был простым, необходимо и достаточно, чтобы оператор Φ отображал $\overline{\Delta_2 L_2(E)} \oplus \overline{\Delta_1 L_2(G)}$ в свою область значений взаимно-однозначно.*

Доказательство 1. Построим гильбертово пространство

$$\tilde{H} = H_2(F) \oplus \overline{\Delta_2 L_2(E)} \oplus \overline{\Delta_1 L_2(G)}$$

и функциональные модели

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} \hat{H}_1 \hat{T}_1 \hat{H}_1 \\ \hat{F}_1 \quad \hat{G}_1 \\ E T_0^{(1)} G \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} \hat{H}_2 \hat{T}_2 \hat{H}_2 \\ \hat{F}_2 \quad \hat{G}_2 \\ F T_0^{(2)} E \end{pmatrix}$$

узлов α_1 и α_2.

Оператор U_1, действующий из $\hat{H}_1$ в $\tilde{H}$ по формуле

$$U_1\{\varphi(e^{it}),\ \psi(e^{it})\} = \{\Theta_2(e^{it})\varphi(e^{it}),\ \Delta_2(e^{it})\varphi(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\},$$

очевидно, изометричен. Введем обозначение $\hat{\hat{H}}_1 = U_1\hat{H}_1$. Полагая

$$\hat{\hat{T}}_1\{\Theta_2(e^{it})\varphi(e^{it}),\ \Delta_2(e^{it})\varphi(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\} =$$

$$= U_1\hat{T}_1U_1^{-1}\{\Theta_2(e^{it})\varphi(e^{it}),\ \Delta_2(e^{it})\varphi(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\} =$$

$$= \{\Theta_2(e^{it})\,(e^{it}\varphi(e^{it}) - \Theta_1(e^{it})\,c_{\varphi,\psi_1}),\ \Delta_2(e^{it})\,(e^{it}\,\varphi(e^{it}) - \Theta_1(e^{it})\,c_{\varphi,\psi_1}),$$
$$e^{it}\psi_1(e^{it}) - \Delta_1(e^{it})\,c_{\varphi,\psi_1}\},$$

$$(\{\Theta_2(e^{it})\varphi(e^{it}),\ \Delta_2(e^{it})\varphi(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\} \in \hat{\hat{H}}_1,$$

$$c_{\varphi,\psi_1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it}\,[\Theta_1^*(e^{it})\,\varphi(e^{it}) + \Delta_1(e^{it})\,\psi_1(e^{it})]\,\mathrm{dt}),$$

$$\hat{\hat{F}}_1 f_1 = U_1\hat{F}_1 f = \{\Theta_2(e^{it})\,(\Theta_1(e^{it})\,(T_0^{(1)})^* - I)\,f,\ \Delta_2(e^{it})\,(\Theta_1(e^{it})\times$$
$$\times (T_0^{(1)})^* - I)\,f,\ \Delta_1(e^{it})\,(T_0^{(1)})^* f\}$$
$$(f \in E),$$

$$\hat{\hat{G}}_1 g = U_1\hat{\hat{G}}_1 g = \{\Theta_2(e^{it})\,e^{-it}\,(\Theta_1(e^{it}) -$$
$$- T_0^{(1)})\,g,\ \Delta_2(e^{it})\,e^{-it}\,(\Theta_1(e^{it}) - T_0^{(1)})\,g,\ e^{-it}\Delta_1(e^{it})\,g\}$$
$$(g \in G),$$

получим узел

$$\hat{\hat{\alpha}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{\hat{H}}_1 & \hat{\hat{T}}_1 & \hat{\hat{H}}_1 \\ \hat{\hat{F}}_1 & & \hat{\hat{G}}_1 \\ F & T_0^{(1)} & G \end{pmatrix},$$

унитарно эквивалентный узлу α_1. Узел $\hat{\hat{\alpha}}_1$ прост и

$$\Theta_{\hat{\hat{\alpha}}_1}(\zeta) = \Theta_1(\zeta) \quad (|\zeta| < 1). \tag{11}$$

Пусть теперь $\{\varphi(e^{it}), \psi_2(e^{it})\} \in \hat{H}_2$. Очевидно, оператор $U_2\{\varphi(e^{it}), \psi_2(e^{it})\} = \{\varphi(e^{it}), \psi_2(e^{it}), 0\}$ изометрично отображает $\hat{H}_2$ в $\tilde{H}$. Введем обозначение $\hat{\hat{H}}_2 = U_2\hat{H}_2$. Полагая

$$\hat{\hat{T}}_2\{\varphi(e^{it}), \psi_2(e^{it}), 0\} = U_2\hat{T}_2U_2^{-1}\{\varphi(e^{it}), \psi_2(e^{it}), 0\} =$$
$$= \{e^{it}\varphi(e^{it}) - \Theta_2(e^{it})c_{\varphi,\psi_2}, e^{it}\psi_2(e^{it}) - \Delta_2(e^{it})c_{\varphi,\psi_2}, 0\}$$
$$(\{\varphi(e^{it}), \psi_2(e^{it}), 0\} \in \hat{\hat{H}}_2,$$
$$c_{\varphi,\psi_2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it}\left[\Theta_2^*(e^{it})\varphi(e^{it}) + \Delta_2(e^{it})\psi_2(e^{it})\right]dt),$$
$$\hat{\hat{F}}_2 f = U_2\hat{F}_2 f = \{(\Theta_2(e^{it})(T_0^{(2)})^* - I)f, \Delta_2(e^{it})(T_0^{(2)})^* f, 0\}$$
$$(f \in F),$$
$$\hat{\hat{G}}_2 g = U_2\hat{G}_2 g = \{e^{-it}(\Theta_2(e^{it}) - T_0^{(2)})g, e^{-it}\Delta_2(e^{it})g, 0\} \quad (g \in E),$$

получим узел

$$\hat{\hat{\alpha}}_2 = \begin{pmatrix} \hat{\hat{H}}_2 & \hat{\hat{T}}_2 & \hat{\hat{H}}_2 \\ \hat{\hat{F}}_2 & & \hat{\hat{G}}_2 \\ F & T_0^{(2)} & E \end{pmatrix},$$

унитарно эквивалентный узлу α_2. Узел $\hat{\hat{\alpha}}_2$ прост и

$$\Theta_{\hat{\hat{\alpha}}_2}(\zeta) = \Theta_2(\zeta) \quad (|\zeta| < 1). \tag{12}$$

Построим узел $\hat{\hat{\alpha}} = \hat{\hat{\alpha}}_2\hat{\hat{\alpha}}_1$. Очевидно, узел $\alpha = \alpha_2\alpha_1$ будет простым тогда и только тогда, когда прост узел $\hat{\hat{\alpha}}$.

2. Совокупность $\tilde{H}'$ всех векторов вида

$$\{\Theta(e^{it})\chi(e^{it}), \Delta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})\chi(e^{it}), \Delta_1(e^{it})\chi(e^{it})\}$$
$$(\chi(e^{it}) \in H_2(G))$$

принадлежит $\tilde{H}$ и, очевидно, является подпространством. Положим $\hat{\hat{H}} = \tilde{H} \ominus \tilde{H}'$. Легко видеть, что вектор $\{\varphi(e^{it}), \psi_2(e^{it}), \psi_1(e^{it})\} \in \tilde{H}$ принадлежит подпространству $\hat{\hat{H}}$ тогда и только тогда, когда

$$\xi_{\varphi,\psi_2,\psi_1}(e^{it}) = \Theta^*(e^{it})\varphi(e^{it}) + \Theta_1^*(e^{it})\Delta_2(e^{it})\psi_2(e^{it}) +$$
$$+ \Delta_1(e^{it})\psi_1(e^{it}) \in H_2^{\perp}(G). \tag{13}$$

Если

$$\{\Theta_2(e^{it})\varphi_1(e^{it}),\ \Delta_2(e^{it})\varphi_1(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}\in \hat{\boldsymbol{H}}_1,$$

$$\{\varphi_2(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}),\ 0\}\in \hat{\hat{\boldsymbol{H}}}_2,$$

то, в силу леммы 1,

$$\Theta^*(e^{it})\,\Theta_2(e^{it})\,\varphi_1(e^{it})+\Theta_1^*(e^{it})\,\Delta_2(e^{it})\,\Delta_2(e^{it})\,\varphi_1(e^{it})+$$
$$+\Delta_1(e^{it})\,\psi_1(e^{it})=\Theta_1^*(e^{it})\,\varphi_1(e^{it})+\Delta_1(e^{it})\,\psi_1(e^{it})\in H_2^{\perp}(\boldsymbol{G}),$$
$$\Theta^*(e^{it})\,\varphi_2(e^{it})+\Theta_1^*(e^{it})\,\Delta_2(e^{it})\,\psi_2(e^{it})=$$
$$=\Theta_1^*(e^{it})\left[\Theta_2^*(e^{it})\,\varphi_2(e^{it})+\Delta_2(e^{it})\,\psi_2(e^{it})\right]\in H_2^{\perp}(\boldsymbol{G}).$$

Следовательно, $\hat{\hat{\boldsymbol{H}}}_1\subset\hat{\hat{\boldsymbol{H}}},\ \hat{\hat{\boldsymbol{H}}}_2\subset\hat{\hat{\boldsymbol{H}}}$. Из равенств

$$(\{\Theta_2(e^{it})\varphi_1(e^{it}),\ \Delta_2(e^{it})\varphi_1(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\},\ \{\varphi_2(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}),\ 0\})_{\tilde{\boldsymbol{H}}}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\varphi_1(e^{it}),\ \Theta_2^*(e^{it})\,\varphi_2(e^{it})+\Delta_2(e^{it})\,\psi_2(e^{it}))\,dt=0$$

вытекает, что подпространства $\hat{\hat{\boldsymbol{H}}}_1$ и $\hat{\hat{\boldsymbol{H}}}_2$ взаимно-ортогональны.

Принимая во внимание лемму 2, запишем равенство

$$\{\varphi(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}=\{\Theta_2(e^{it})\,\tilde{\xi}(e^{it}),\ \Delta_2(e^{it})\tilde{\xi}(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}+$$
$$+\{\varphi(e^{it})-\Theta_2(e^{it})\,\tilde{\xi}(e^{it}),\ \psi_2(e^{it})-\Delta_2(e^{it})\,\tilde{\xi}(e^{it}),\ 0\}\tag{14}$$
$$(\{\varphi(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}),\psi_1(e^{it})\}\in\hat{\hat{\boldsymbol{H}}},\ \tilde{\xi}(e^{it})=P_{H_2(\boldsymbol{E})}\xi_{\varphi,\,\psi_2}(e^{it}),$$
$$\xi_{\varphi,\,\psi_2}(e^{it})=\Theta_2^*(e^{it})\,\varphi(e^{it})+\Delta_2(e^{it})\,\psi_2(e^{it}))$$

и отметим, что

$$\{\varphi(e^{it})-\Theta_2(e^{it})\,\tilde{\xi}(e^{it}),\ \psi_2(e^{it})-\Delta_2(e^{it})\,\tilde{\xi}(e^{it}),\ 0\}\in\hat{\boldsymbol{H}}_2.$$

Поскольку

$$\{\tilde{\xi}(e^{it}),\ \ \psi_1(e^{it})\}\in H_2(\boldsymbol{E})\oplus\overline{\Delta_1L_2(\boldsymbol{G})}$$

и в силу (13)

$$\Theta_1^*(e^{it})\,\tilde{\xi}(e^{it})+\Delta_1(e^{it})\,\psi_1(e^{it})=$$
$$=\Theta_1^*(e^{it})\,\xi_{\varphi,\,\psi_2}(e^{it})-\Theta_1^*(e^{it})\,P_{H_2(\boldsymbol{E})}\xi_{\varphi,\,\psi_2}(e^{it})+\Delta_1(e^{it})\,\psi_1(e^{it})=$$
$$=\left[\Theta^*(e^{it})\,\varphi(e^{it})+\Theta_1^*(e^{it})\,\Delta_2(e^{it})\,\psi_2(e^{it})+\Delta_1(e^{it})\,\psi_1(e^{it})\right]-$$
$$-\Theta_1^*(e^{it})\,P_{H_2^{\perp}(\boldsymbol{E})}\xi_{\varphi,\,\psi_2}(e^{it})\in H_2^{\perp}(\boldsymbol{G}),$$

то на основании леммы 1 $\{\tilde{\xi}(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\} \in \hat{H}_1$ и, следовательно, $\{\Theta_2(e^{it})\tilde{\xi}(e^{it}),\ \Delta_2(e^{it})\tilde{\xi}(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\} \in \hat{H}_1$. Таким образом, $\hat{H} = \hat{H}_1 \oplus \hat{H}_2$.

Обозначим через P_1 и P_2 ортопроекторы в $\hat{H}$ на $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$. В силу (14)

$$P_1\{\varphi(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\} = \\ = \{\Theta_2(e^{it})\tilde{\xi}(e^{it}),\ \Delta_2(e^{it})\tilde{\xi}(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}, \tag{15}$$

$$P_2\{\varphi(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\} = \\ = \{\varphi(e^{it}) - \Theta_2(e^{it})\tilde{\xi}(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}) - \Delta_2(e^{it})\tilde{\xi}(e^{it}),\ 0\}. \tag{16}$$

Положим

$$c_{\varphi,\psi_2,\psi_1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it}\left[\Theta^*(e^{it})\varphi(e^{it}) + \Theta_1^*(e^{it})\Delta_2(e^{it})\psi_2(e^{it}) + \right. \\ \left. + \Delta_1(e^{it})\psi_1(e^{it})\right] dt.$$

Используя (15) и (16), можно получить следующие равенства:

$$\hat{T}\{\varphi(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\} = \\ = (\hat{T}_1P_1 + \hat{T}_2P_2 - \hat{F}_1\hat{G}_2^*P_2)\{\varphi(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\} = \\ = \{e^{it}\varphi(e^{it}) - \Theta(e^{it})c_{\varphi,\psi_2,\psi_1},\ e^{it}\psi_2(e^{it}) - \\ - \Delta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})c_{\varphi,\psi_2,\psi_1},\ e^{it}\psi_1(e^{it}) - \Delta_1(e^{it})c_{\varphi,\psi_2,\psi_1}\},$$

$$\hat{T}^*\{\varphi(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\} = \\ = \{e^{-it}(\varphi(e^{it}) - \varphi(0)),\ e^{-it}\psi_2(e^{it}),\ e^{-it}\psi_1(e^{it})\},$$

$$\hat{F}f = (\hat{F}_1(T_0^{(2)})^* + \hat{F}_2)f = \\ = \{(\Theta(e^{it})T_0^* - I)f,\ \Delta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})T_0^*f,\ \Delta_1(e^{it})T_0^*f\} \quad (f \in \boldsymbol{F}),$$

$$\hat{G}g = (\hat{G}_1 + \hat{G}_2T_0^{(1)})g = \\ = \{e^{-it}(\Theta(e^{it}) - T_0)g,\ e^{-it}\Delta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})g,\ e^{-it}\Delta_1(e^{it})g\} \\ (g \in \boldsymbol{G}).$$

Итак, узел

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{H} & \hat{T} & \hat{H} \\ \hat{F} & & \hat{G} \\ \boldsymbol{F} & T_0 & \boldsymbol{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_2 & \hat{T}_2 & \hat{H}_2 \\ \hat{F}_2 & & \hat{G}_2 \\ \boldsymbol{F} & T_0^{(2)} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{H}_1 & \hat{T}_1 & \hat{H}_1 \\ \hat{F}_1 & & \hat{G}_1 \\ \boldsymbol{E} & T_0^{(1)} & \boldsymbol{G} \end{pmatrix}$$

построен. В силу (9) из равенств (11), (12) следует, что

$$\Theta_{\hat{\hat{\alpha}}}(\zeta)=\Theta_{\hat{\hat{\alpha}}_2}(\zeta)\,\Theta_{\hat{\hat{\alpha}}_1}(\zeta)=\Theta_2(\zeta)\,\Theta_1(\zeta)=\Theta(\zeta)\ (|\zeta|<1).$$

4. Непосредственная проверка показывает, что если $\{\varphi(e^{it}), \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}\in\hat{\hat{H}}$, то

$$(I-\zeta\hat{\hat{T}})^{-1}\{\varphi(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}=$$

$$=\left\{\frac{\varphi(e^{it})-\Theta(e^{it})\,g_{\varphi,\psi_2,\psi_1}(\zeta)}{1-e^{it}\zeta},\ \frac{\psi_2(e^{it})-\Delta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})\,g_{\varphi,\psi_2,\psi_1}(\zeta)}{1-e^{it}\zeta},\right.$$

$$\left.\frac{\psi_1(e^{it})-\Delta_1(e^{it})\,g_{\varphi,\psi_2,\psi_1}(\zeta)}{1-e^{it}\zeta}\right\}$$

$$\Bigg(g_{\varphi,\psi_2,\psi_1}(\zeta)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\Theta^*(e^{it})\,\varphi(e^{it})+\Theta_1^*(e^{it})\,\Delta_2(e^{it})\,\psi_2(e^{it})+\Delta_1(e^{it})\,\psi_1(e^{it})}{1-e^{it}\zeta}\,dt\Bigg),$$

$$(I-\zeta\hat{\hat{T}}^{*})^{-1}\{\varphi(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}=$$

$$=\left\{\frac{e^{it}\varphi(e^{it})-\zeta\varphi(\zeta)}{e^{it}-\zeta},\ \frac{e^{it}\psi_2(e^{it})}{e^{it}-\zeta},\ \frac{e^{it}\psi_1(e^{it})}{e^{it}-\zeta}\right\}$$

и, следовательно,

$$(I-\zeta\hat{\hat{T}})^{-1}\hat{\hat{F}}f=\left\{\frac{\Theta(e^{it})\,\Theta^*(\bar{\zeta})-I}{1-e^{it}\zeta}f,\ \frac{\Delta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})\,\Theta^*(\bar{\zeta})}{1-e^{it}\zeta}f,\right.$$

$$\left.\frac{\Delta_1(e^{it})\,\Theta^*(\bar{\zeta})}{1-e^{it}\zeta}f\right\} \tag{17}$$

$$(|\zeta|<1,\quad f\in F),$$

$$(I-\zeta\hat{\hat{T}}^{*})^{-1}\hat{\hat{G}}g=\left\{\frac{\Theta(e^{it})-\Theta(\zeta)}{e^{it}-\zeta}g,\ \frac{\Delta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})}{e^{it}-\zeta}\,g,\right.$$

$$\left.\frac{\Delta_1(e^{it})}{e^{it}-\zeta}g\right\}\quad(|\zeta|<1,\ g\in G). \tag{18}$$

Теорема будет доказана, если показать, что ортогональное дополнение в $\hat{\hat{H}}$ к замыканию линейной оболочки векторов (17) и (18) состоит из тех и только тех векторов вида $\{0,\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}\in\tilde{\tilde{H}}$, для которых

$$\Phi\{\psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}=\Theta_1^*(e^{it})\,\Delta_2(e^{it})\,\psi_2(e^{it})+\Delta_1(e^{it})\,\psi_1(e^{it})=0. \tag{19}$$

Пусть $\{0,\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\} \in \tilde{H}$ и выполняется соотношение (19). Тогда, очевидно, вектор $\{0,\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}$ удовлетворяет соотношению (13) и, следовательно, принадлежит $\hat{H}$.

Вместе с тем

$$(\{0,\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\},\ (I-\zeta\hat{T})^{-1}\hat{F}f)_{\tilde{H}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\psi_2(e^{it}),\ \frac{\Delta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})\,\Theta^*(\bar{\zeta})}{1-e^{it}\zeta}f\right)+\left(\psi_1(e^{it}),\ \frac{\Delta_1(e^{it})\,\Theta^*(\bar{\zeta})}{1-e^{it}\zeta}f\right)\right]dt=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\Theta_1^*(e^{it})\,\Delta_2(e^{it})\,\psi_2(e^{it})+\Delta_1(e^{it})\,\psi_1(e^{it}),\ \frac{\Theta^*(\bar{\zeta})}{1-e^{it}\zeta}f\right)dt=0$$

$$(|\zeta|<1,\quad f\in F),$$

$$(\{0,\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\},\ (I-\zeta\hat{T}^*)^{-1}\hat{G}g)_{\tilde{H}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\psi_2(e^{it}),\ \frac{\Delta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})}{e^{it}-\zeta}g\right)+\left(\psi_1(e^{it}),\ \frac{\Delta_1(e^{it})}{e^{it}-\zeta}g\right)\right]dt=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\Theta_1^*(e^{it})\,\Delta_2(e^{it})\,\psi_2(e^{it})+\Delta_1(e^{it})\,\psi_1(e^{it}),\ \frac{g}{e^{it}-\zeta}\right)dt=0$$

$$(|\zeta|<1,\ g\in G).$$

Обратно, пусть вектор $\{\varphi(e^{it}),\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}\in\hat{H}$ ортогонален ко всем векторам вида (17) и (18). Тогда в силу (13)

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\varphi(e^{it}),\ \frac{\Theta(e^{it})\,\Theta^*(\bar{\zeta})-I}{1-e^{it}\zeta}f\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\psi_2(e^{it}),\ \frac{\Delta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})\,\Theta^*(\bar{\zeta})}{1-e^{it}\zeta}f\right)+\left(\psi_1(e^{it}),\ \frac{\Delta_1(e^{it})\,\Theta^*(\bar{\zeta})}{1-e^{it}\zeta}f\right)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\xi_{\varphi,\psi_2,\psi_1}(e^{it}),\ \frac{\Theta^*(\bar{\zeta})}{1-e^{it}\zeta}f\right)dt-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\varphi(e^{it}),\ f)}{1-e^{-it}\bar{\zeta}}dt=$$

$$=-(\varphi(\bar{\zeta}),\ f)\quad(|\zeta|<1,\ f\in F)$$

и

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\varphi(e^{it}),\ \frac{\Theta(e^{it})-\Theta(\zeta)}{e^{it}-\zeta}g\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\psi_2(e^{it}),\ \frac{\Delta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})}{e^{it}-\zeta}g\right)+\left(\psi_1(e^{it}),\ \frac{\Delta_1(e^{it})}{e^{it}-\zeta}g\right)\right]dt=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\xi_{\varphi,\,\psi_2,\,\psi_1}(e^{it}),\ \frac{g}{e^{it}-\zeta}\right)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\varphi(e^{it}),\ \frac{\Theta(\zeta)}{e^{it}-\zeta}g\right)dt =$$

$$= \left(\xi_{\varphi,\,\psi_2,\,\psi_1}\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right),\ g\right)$$

$$(|\zeta| < 1,\ g \in \boldsymbol{G}).$$

Таким образом, почти всюду на единичной окружности $\varphi(e^{it}) = 0$ и $\xi_{\varphi,\,\psi_2,\,\psi_1}(e^{it}) = 0$. Следовательно, рассматриваемый вектор имеет вид $\{0,\ \psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\}$ и удовлетворяет соотношению (19). Теорема доказана.

2. Пусть сжатие $A \in [\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{F}]$ представлено в виде $A = A_2A_1$, где $A_1 \in [\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{E}]$, $A_2 \in [\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{F}]$ — также сжатия.

Положим

$$\Delta = (I - A^*A)^{\frac{1}{2}},\quad \Delta_1 = (I - A_1^*A_1)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta_{*1} = (I - A_1A_1^*)^{\frac{1}{2}},\quad \Delta_2 = (I - A_2^*A_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Области значений этих операторов обозначим соответственно через $\boldsymbol{M}\,(\subset \boldsymbol{G})$, $\boldsymbol{M}_1\,(\subset \boldsymbol{G})$, $\boldsymbol{M}_{*1}\,(\subset \boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{M}_2\,(\subset \boldsymbol{E})$. Факторизацию $A = A_2A_1$ назовем *регулярной**, если $\boldsymbol{M}_{*1} \cap \boldsymbol{M}_2 = \{0\}$. Ясно, что если факторизация $A = A_2A_1$ регулярна, то регулярной является и факторизация $A^* = A_1^*A_2^*$. Достаточным условием регулярности факторизации $A = A_2A_1$ является, очевидно, выполнение по крайней мере одного из равенств $A_1A_1^* = I$, $A_2^*A_2 = I$.

Построим ортогональную сумму $\overline{\boldsymbol{M}_2} \oplus \overline{\boldsymbol{M}_1}$. Легко видеть, что оператор X, действующий из $\boldsymbol{M}$ в $\overline{\boldsymbol{M}_2} \oplus \overline{\boldsymbol{M}_1}$, согласно формуле $X(\Delta g) = \{\Delta_2A_1g,\ \Delta_1g\}$ $(g \in \boldsymbol{G})$, изометричен. Расширяя его по непрерывности, получим изометрический оператор с областью определения $\overline{\boldsymbol{M}}$. Для расширенного оператора сохраним обозначение X.

Пусть теперь функция $\Theta(\zeta) \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{F})$ представлена в виде

$$\Theta(\zeta) = \Theta_2(\zeta)\,\Theta_1(\zeta)\quad (\Theta_1(\zeta) \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{E}),\ \ \Theta_2(\zeta) \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{F})).$$

Переходя к предельным значениям на единичной окружности, найдем, что почти всюду $\Theta(e^{it}) = \Theta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})$. Легко видеть, что оператор Y, действующий из $\Delta L_2(\boldsymbol{G})$ в $\overline{\Delta_2L_2(\boldsymbol{E})} \oplus \overline{\Delta_1L_2(\boldsymbol{G})}$ по формуле

$$Y(\Delta(e^{it})\,\varphi(e^{it})) = \{\Delta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})\,\varphi(e^{it}),\ \Delta_1(e^{it})\,\varphi(e^{it})\}$$

$$(\varphi(e^{it}) \in L_2(\boldsymbol{G})),$$

изометричен. Расширяя его по непрерывности, получим оператор с областью определения $\overline{\Delta L_2(\boldsymbol{G})}$. Сохраним для него обозначение Y.

* Это понятие было введено Ю. Л. Шмульяном [10] для операторов, действующих в конечномерных пространствах.

Теорема 4. *Пусть α_1 и α_2 — простые сжимающие узлы. Для того чтобы узел $\alpha = \alpha_2\alpha_1$ был простым, необходимо и достаточно, чтобы факторизация*

$$\Theta(e^{it}) = \Theta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it}) \quad (\Theta(\zeta) = \Theta_\alpha(\zeta),\ \Theta_j(\zeta) = \Theta_{\alpha_j}(\zeta),\ j = 1,\ 2) \tag{20}$$

была регулярной почти всюду на единичной окружности.

Доказательство. Как показано в продолжении работы [15], для того чтобы факторизация $A = A_2A_1$ была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы область значений оператора X совпадала со всем пространством $\overline{M_2 \oplus M_1}$. Из этого утверждения и предложения VII.3.1 монографии [2] следует, что факторизация (20) регулярна почти всюду на единичной окружности в том и только том случае, когда область значений оператора Y совпадает со всем пространством $\overline{\Delta_2 L_2(E)} \oplus \overline{\Delta_1 L_2(G)}$. Последнее условие, как показывает равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(\psi_2(e^{it}),\ \Delta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})\,\varphi(e^{it}) + (\psi_1(e^{it}),\ \Delta_1(e^{it})\,\varphi(e^{it}))]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\Theta_1^*(e^{it})\,\Delta_2(e^{it})\,\psi_2(e^{it}) + \Delta_1(e^{it})\,\psi_1(e^{it}),\ \ \varphi(e^{it})\right) dt$$

$$(\{\psi_2(e^{it}),\ \psi_1(e^{it})\} \in \overline{\Delta_2 L_2(E)} \oplus \overline{\Delta_1 L_2(G)},\ \varphi(e^{it}) \in L_2(G)),$$

выполняется тогда и только тогда, когда оператор Φ, определенный формулой (10), отображает $\overline{\Delta_2 L_2(E)} \oplus \overline{\Delta_1 L_2(G)}$ в свою область значений взаимно-однозначно. Доказываемое утверждение вытекает теперь из теоремы 3.

Следствие. *Пусть α_1 и α_2 — простые сжимающие узлы. Если почти всюду на единичной окружности выполняется хотя бы одно из равенств $\Theta_{\alpha_1}(e^{it})\,\Theta_{\alpha_1}^*(e^{it}) = I$, $\Theta_{\alpha_2}^*(e^{it})\,\Theta_{\alpha_1}(e^{it}) = I$, то узел $\alpha = \alpha_2\alpha_1$ прост.*

3. Пусть дан сжимающий узел $\alpha = \begin{pmatrix} H & T & H \\ F & & G \\ F & T_0 & G \end{pmatrix}$ и пусть подпространство $H_1 \subset H$ инвариантно относительно T. Положим $H_2 = H \ominus H_1$. Существуют такие сжимающие узлы

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} H_1 & T_1 & H_1 \\ F_1 & & G_1 \\ F_1 & T_0^{(1)} & G_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} H_2 & T_2 & H_2 \\ F_2 & & G_2 \\ F_2 & T_0^{(2)} & G_2 \end{pmatrix},$$

что

$$G_1 = G,\ T_1 = P_1T \mid H_1,\ G_1 = P_1G,$$
$$F_2 = F,\ T_2 = P_2T \mid H_2,\ F_2 = P_2F,$$

где $P_j\ (j = 1,\ 2)$ — ортопроектор на H_j [1]. Эти узлы называются *проекциями* α соответственно на H_1 и H_2 и обозначаются символами $\overrightarrow{\mathrm{pr}}_{H_1}\alpha\ (= \alpha_1)$, $\overleftarrow{\mathrm{pr}}_{H_2}\alpha\ (= \alpha_2)$. Проекции узла определяются неоднозначно. Однако, имея одну из проекций, можно выбрать вторую так, чтобы выполнялось равенство $\alpha = \alpha_2\alpha_1$. Таким образом, согласно (9), каждому инвариантному подпространству основного оператора узла α соответствует факторизация функции $\Theta_\alpha(\zeta)$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пусть сжатие $T \in [H, H]$ вполне неунитарно. Рассмотрим простой сжимающий узел $\alpha = \begin{pmatrix} H & T & H \\ F & & G \\ F & T_0 & G \end{pmatrix}$ и предположим, что функция представлена в виде

$$\Theta_\alpha(\zeta) = \Theta_2(\zeta)\,\Theta_1(\zeta) \quad (\Theta_1(\zeta) \in A(G, E),\ \Theta_2(\zeta) \in A(E, F)). \qquad (21)$$

Факторизацию (21) назовем *правильной*, если существует такое инвариантное относительно оператора T подпространство H_1, что

$$\Theta_1(\zeta) = \Theta_{\alpha_1}(\zeta),\ \Theta_2(\zeta) = \Theta_{\alpha_2}(\zeta) \quad (|\zeta| < 1),\ \text{ где } \alpha_1 = \overrightarrow{\mathrm{pr}_{H_1}\alpha},$$

$$\alpha_2 = \overleftarrow{\mathrm{pr}_{H_2}\alpha}\ (H_2 = H \ominus H_1) \text{ и } \alpha = \alpha_2\alpha_1.$$

Факторизация (21) правильна тогда и только тогда, когда произведение $\alpha_2\alpha_1$ произвольных простых узлов α_2 и α_1 таких, что

$$\Theta_j(\zeta) = \Theta_{\alpha_j}(\zeta) \quad (j = 1, 2),$$

есть простой узел [1]. Отсюда и из теоремы 4 вытекает

Теорема 5. *Пусть α — простой сжимающий узел и функция $\Theta_\alpha(\zeta)$ представлена в виде (21). Для того чтобы факторизация была правильной, необходимо и достаточно, чтобы факторизация $\Theta_\alpha(e^{it}) = \Theta_2(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})$ была регулярной почти всюду на единичной окружности.*

Следствие. *Пусть α — простой сжимающий узел, и функция $\Theta_\alpha(\zeta)$ представлена в виде (21). Если почти всюду на единичной окружности выполняется хотя бы одно из равенств $\Theta_1(e^{it}) \times \Theta_1^*(e^{it}) = I$, $\Theta_2^*(e^{it})\,\Theta_2(e^{it}) = I$, то факторизация правильна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Бродский В. М. Об операторных узлах и их характеристических функциях.— ДАН СССР, 1971, т. 198, № 1, с. 16—19.
2. Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1970, 431 с.
3. Гинзбург Ю. П. Мультипликативные представления аналитических оператор — функций. Автореф. докт. дис. Одесса, 1967. 25 с.
4. Sz.—Nagy B., Fojas C. Forme triangulaire d'une contraction et factorisation de la fonction caracteristique. — «Asta Sci. Math»., 1967, vol. 28, N1—2, p. 201—212.
5. Лившиц М. С. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве.— «Мат. сб.», 1946, 19(61): 2, с. 239—262.
6. Лившиц М. С., Потапов В. П. Теорема умножения характеристических матриц-функций.— ДАН СССР, 1950, т. 62, № 4, с. 625—628.

7. Шмульян Ю. Л. Операторы с вырожденной характеристической функцией.— ДАН СССР, 1953, т. 93, № 6, с. 985—988.
8. Лившиц М. С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов.— «Мат. сб.», 1954, т. 34 (76), № 1, с. 145—198.
9. Бродский М. С., Лившиц М. С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы.— *УМН, 1958,* т. *13,* № 1, с. 3—85.
10. Шмульян Ю. Л. Некоторые вопросы теории операторов с конечным рангом неэрмитовости.— «Мат. сб.», 1962, т. 57 (99), № 1, с. 105—136.
11. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969, 287 с.
12. De Branges L., Factorisations and invariant subspaces. — «J. Math. Anal. and Appl.», 1970, vol. 29, p. 163—200.
13. Шварцман Я. С. Функциональная модель вполне непрерывного диссипативного узла.— «Мат. исследования» (Кишинев), 1968, т. 3, № 3, с. 126—138.
14. Шварцман Я. С. Об инвариантных подпространствах диссипативного оператора и делителях его характеристической функции.— «Функциональный анализ и его приложения», *1970,* т. 4, № 4, *с. 85—86.*
15. Шварцман Я. С. Функциональная модель диссипативного узла.— «Мат, исследования», 1972, т. 7, № 2, с. 158—180.
16. Бродский В. М., Шварцман Я .С. Об инвариантных подпространствах сжатий.— ДАН СССР, 1971, т. 201, № 3, с. 519—522.
17. Бродский В. М., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. О характеристических функциях обратимого оператора. — «Acta Sci Math.», 1971, т. 32, № 1—2, с. 141—164.
18. Поляцкий В. Т. Приведение к треугольному виду некоторых неунитарных операторов. Автореф. канд. дис. Одесса, 1959. 18 с.
19. Адамян В. М., Аров Д. З. Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов.— «Мат. исследования», 1966, т. 1, № 2, с. 3—64