УДК 517.925.2

М. М. Бендерский,
Л. А. Пастур

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{\xi} + q(t)\xi = 0, \tag{1}$$

где $q(t)$ — случайный процесс. Нас будет интересовать асимптотика решений уравнения (1) при $t \to +\infty$. Как и в детерминированном случае, выберем в качестве асимптотической характеристики поведения решений величину

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln \sqrt{\xi^2 + \dot{\xi}^2}}{t}. \tag{2}$$

Если $q(t)$ — стационарный случайный процесс и $M|q| < \infty$, то, как следует из результатов работ [1, 2], последний предел существует для почти всех реализаций $q(t, \omega)$ (ω — точка вероятностного пространства Ω) при каждом заданном начальном условии. Полагая $\xi(0) = \cos\varphi, \dot{\xi}(0) = \sin\varphi, -\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, обозначим этот предел через $I(\varphi, \omega)$.

В настоящей работе при определенных условиях на $q(t)$ докажем, что $I(\varphi, \omega) = I$, где I — детерминированная константа, а равенство имеет место при каждом φ для почти всех ω (теоремы 1, 3). При этом $I \geqslant 0$, а более специальные условия (теоремы 4, 5) позволяют доказать более строгое неравенство $I > 0$. Укажем также некоторые формулы для I, а затем в случае двузначного марковского процесса $q(t)$ вычислим I и проведем некоторый анализ полученных формул.

2. Запишем (1) в виде системы

$$\dot{\zeta} = A\,(q(t))\,\zeta,$$

$$\zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Будем предполагать, что $q(t)$ — измеримый стационарный случайный процесс и $M|q| < \infty$. Тогда почти каждая реализация локально суммируема [3], а для таких $q(t, \omega)$ имеет место теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы (3) (см. [4]). Поэтому с вероятностью 1 существует фундаментальная матрица $\Phi(t, \tau)$ этой системы такая, что $\Phi(\tau, \tau) = E$. Обозначим через $\mu(t)$ большее собственное значение матрицы $\{\Phi^*(t, 0)\cdot\Phi(t, 0)\}^{\frac{1}{2}}$ (звездочка обозначает операцию транспонирования). Из [2] следует, что с вероятностью 1 существует

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\mu(t)}{t} = I. \tag{4}$$

Пусть U_h — оператор сдвига в вероятностном пространстве Ω, соответствующий процессу $q(t)$, т. е. $U_h q(t) = q(t+h)$. Из соотношения $\mu(t) = \sup\|\Phi(t, 0)x\|$ находим, что $U_h I = I$, т. е. I — инвариантная случайная величина. Предположим теперь и всюду ниже, что процесс $q(t)$ метрически транзитивен. Тогда I с вероятностью 1 есть константа.

Обозначим $\xi(t, \varphi_0)$ решение уравнения (1) при условиях $\xi(0) = \cos\varphi_0, \dot{\xi} = \sin\varphi_0$ и пусть $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\dot{\xi}}{\xi}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ при $\xi = 0$ ($\varphi(t, \varphi_0)$ соответствует $\xi(t, \varphi_0)$).

Из (1) следует, что $\varphi(t)$ определяется уравнением

$$\dot{\varphi} = -(\sin^2\varphi + q(t)\cos^2\varphi) \tag{5}$$

и соответствующим условием приведения. Фазовое пространство процесса $\varphi(t)$ удобно представлять в виде окружности S длины π.

Пусть T_t — случайный оператор, который определяется соотношением $T_t\varphi_0 = \varphi(t, \varphi_0)$. Из равенства $\xi(t+h, \varphi, \omega) = \xi(t, T_h(\omega)\varphi, U_h\omega)$ тогда следует, что

$$I(\varphi, \omega) = I(T_h(\omega)\varphi, U_h\omega). \tag{6}$$

Как указывалось выше, мы хотим, прежде всего, найти условия, при которых для каждого φ с вероятностью 1 имеет место равенство

$$I(\varphi, \omega) = I. \tag{7}$$

Так как $|I(\varphi, \omega)| \leqslant I$, то нетривиальным является лишь случай, когда $I > 0$.

Обозначим через $e_1(t, \omega)$ ($e_2(t, \omega)$) собственный вектор матрицы $\Phi^*(t, 0)\,\Phi(t, 0)$, соответствующий большему (меньшему) собственному значению $\mu^2(t, \omega)$ ($\mu^{-2}(t, \omega)$), и пусть $\varphi_i(t, \omega)$, $i = 1, 2,$ — аргументы этих векторов.

Лемма 1. *С вероятностью* 1 *существует*

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_2(t, \omega) \equiv \bar{\varphi}(\omega). \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим множество тех ω, для которых предел (2) существует для каждого $\varphi \in S$. Как отмечалось выше, это множество имеет полную меру. Мы докажем, что предел (8) существует для каждого такого ω. Если рассматриваемый предел не существует, то функция $\varphi_2(t, \omega)$ при $t \to \infty$ имеет по крайней мере две предельные точки. Из непрерывности этой функции тогда следует, что найдутся точки φ', $\varphi'' \in S$ такие, что каждое из уравнений

$$\varphi_2(t, \omega) = \varphi'', \ \varphi_2(t, \omega) = \varphi'$$

имеет последовательность решений $t_k'' \to \infty, t_k' \to \infty$. Пусть начальный вектор $x = (\cos\varphi', \sin\varphi')$. Тогда из равенства

$$||\Phi(t, 0)x||^2 = \mu^2(t)x_1^2(t) + \mu^{-2}(t)x_2^2(t), \tag{9}$$

где $x_i = (x, e_i(t))$ следует, что величина

$$\frac{\ln||\Phi(t, 0)x||}{t} \tag{10}$$

стремится к $-I$ по подпоследовательности t_k' и к I по подпоследовательности t_k'', что противоречит существованию предела (10). Лемма доказана.

Если $\varphi \neq \bar{\varphi}(\omega)$, то $I(\varphi, \omega) = I$, что следует из (9). Но, как показано в [1, 2], существует φ, при котором $I(\varphi, \omega)$ равно $-I$. Поэтому

$$I(\bar{\varphi}(\omega), \omega) = -I. \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть $q(t)$ — стационарный и метрически транзитивный случайный процесс, $M|q| < \infty$. Если для каждого $a \leqslant 0$*

$$P\{q(t) = a\} = 0, \tag{12}$$

то для любого фиксированного φ

$$P\{I(\varphi, \omega) = I\} = 1. \tag{13}$$

Доказательство. Как мы видели выше, равенство $I(\varphi, \omega) = I$ нарушается только для ω из множества $B_{\varphi_1} = \{\omega : \bar{\varphi}(\omega) = \varphi_1\}$. Поэтому, чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно доказать, что из (12) вытекает равенство нулю меры множества при любом φ_1.

Рассмотрим процесс

$$\bar{\varphi}(t, \omega) = \bar{\varphi}(U_t\,\omega).$$

В силу наших предположений этот процесс является стационарным и метрически транзитивным. Поэтому с вероятностью 1

$$P(B_{\varphi_1}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \varkappa_{\varphi_1}(\bar{\varphi}(t, \omega))\,dt, \ \varkappa_{\varphi_1}(\varphi) = \begin{cases}1, \varphi = \varphi_1,\\ 0, \varphi \neq \varphi_1.\end{cases}$$

Но если $\omega \in B_{\varphi_1}$, то как следует из (6) и (11), $\varphi(U_t\omega) = T_t(\omega)\varphi_1$. Так что для таких ω

$$P(B_{\varphi_1}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \varkappa_{\varphi_1}(\varphi(t, \varphi_1))\,dt, \tag{14}$$

где $\varphi(t, \varphi_1) = T_t(\omega)\varphi_1$.

Таким образом, вопрос сводится к вычислению при фиксированном ω величины времени пребывания в точке φ_1 функции $\varphi(t, \varphi_1)$. Нетрудно проверить, что $\varphi(t, \varphi_1)$ для почти всех t удовлетворяет уравнению (5). Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением только таких t.

Предположим сначала, что реализации процесса $q(t)$ непрерывны. Пусть

$$C_T = \{t : t \in [0, T], \varphi(t, \varphi_1) = \varphi_1, \dot\varphi(t, \varphi_1) \neq 0\},$$

$$D_T = \{t : t \in [0, T], \varphi(t, \varphi_1) = \varphi_1, \dot\varphi(t, \varphi_1) = 0\}.$$

Множество C_T не имеет принадлежащих ему предельных точек, так как из условий $t_k \to t_0$ и $\varphi(t_k, \varphi_1) = \varphi_1$ следует, что $\dot\varphi(t_0, \varphi_1) = 0$. Поэтому Лебегова мера C_T равна нулю. С другой стороны,

$$D_T \subset \{t : t \in [0, T], q(t) = -\mathrm{tg}_2\,\varphi_1\},$$

откуда в силу (12) и метрической транзитивности $q(t)$ следует, что Лебегова мера D_T, деленная на T, стремится к нулю при $T \to \infty$.

Итак, для непрерывных $q(t)$ теорема доказана. В общем случае при оценке правой части (14) нужно воспользоваться теоремой Лузина, согласно которой всякая измеримая функция становится непрерывной после удаления из ее области определения множества сколь угодно малой меры.

3. Таким образом, теорема 1 показывает, что (13) может не выполняться только для таких $q(t)$, у которых одномерное распределение разрывно на отрицательной полуоси. Ниже для специального класса кусочно-постоянных процессов с независимо распределенными промежутками постоянства будет установлено (теорема 3), что равенство (13) имеет место и в этом случае. Мы увидим, что для таких $q(t)$ вопрос сводится к изучению при $n \to \infty$ величины

$$\frac{1}{n}\ln\|g_n \ldots g_1\xi\|,$$

где $g_1, g_2, \ldots$ независимые и одинаково распределенные двумерные матрицы, а $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$ — вектор в двумерном евклидовом пространстве R^2. Такая задача рассматривалась в ряде работ (см., например, [5,6]).

Сформулируем необходимый нам результат Г. Фюрстенберга [5] в виде теоремы и приведем ее доказательство, основанное на соображениях, аналогичных использованным выше.

Теорема 2. *Пусть $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределенных двумерных унимодулярных матриц. Равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln ||g_1 \ldots g_n\xi|| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} ||g_1 \ldots g_n|| \tag{15}$$

имеет место при каждом ξ с вероятностью 1, *если не существует вектора ξ, который является собственным для почти всех матриц g.*

Доказательство. Обозначим правую часть (15) через i, а левую — через $i(\varphi, u)$, где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\xi_2}{\xi_1}$, u — точка вероятностного пространства бесконечных последовательностей. Введем преобразование T_k на S, соответствующее преобразованию $g_k \ldots g_1$ в R^2. Действуя по аналогии с непрерывным случаем, приходим к метрически транзитивному процессу $\overline{\varphi}(n, u) = T_n \overline{\varphi}(u)$, где $\overline{\varphi}(u)$ — та единственная точка на S, для которой $i(\varphi, u) \neq i$.

Пусть $B_{\varphi_0} = \{u : i(\varphi_0, u) \neq i\}$. Если $P(B_{\varphi_0}) = 1$, то $g\varphi_0 = \varphi_0$ с вероятностью 1, что противоречит условию теоремы. Докажем, что предположение

$$0 < P(B_{\varphi_0}) < 1 \tag{16}$$

тоже приводит к противоречию. Рассмотрим процесс $\varphi(n, \varphi_0) = T_n\varphi_0$. Пусть $k = \min\{n : n > 0, \varphi(n, \varphi_0) = \varphi_0\}$. Если $Mk < \infty$, то легко видеть, что с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n \varkappa_{\varphi_0}(\varphi(j, \varphi_0)) = 0. \tag{17}$$

Но при $u \in B_{\varphi_0} \varphi(j, \varphi_0) = \overline{\varphi}(j)$, а поэтому левая часть (17) для таких u должна быть равна $P(B_{\varphi_0}) > 0$. Следовательно, $Mk < \infty$. В таком случае марковская последовательность $(\varphi(n, \varphi_0), g_{n+1})$ будет эргодической [7]. Тогда

$$i(\varphi_0 u) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n \ln \frac{||g_k \xi^{(k-1)}||}{||\xi^{(k-1)}||},$$

где $\xi^{(k)} = g_k \ldots g_1, \xi_0, \xi_0 = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$, не зависит от u, что противоречит (16). Теорема доказана.

Вернемся теперь к нашей основной задаче. Пусть $q(t)$ — кусочно-постоянный процесс со значениями $\{q_1, \ldots, q_m\}$, у которого промежутки постоянства L_j независимы, $\sum_1^m ML_j < \infty$, а переходы из q_i в q_j задаются постоянной матрицей P. Тогда пара $\{q(t), \tau(t)\}$, где $\tau(t)$ — расстояние от t до ближайшей слева точки разрыва $q(t)$, образует марковский процесс. Предположим, что этот процесс эргодичен (для этого достаточно, чтобы P была матрицей переходных вероятностей эргодической марковской цепи).

Фундаментальную матрицу $\Phi(t, 0)$ системы (3) можно записать в виде

$$\Phi(t, \tau_k)\, g_{k-1} \ldots g_1 \Phi(\tau_1, 0),$$

где $g_k = \Phi(\tau_{k+1}, \tau_k)$, а τ_j — моменты возвращения $q(t)$ в состояние q_1. Согласно (6)

$$I(\varphi_0, \omega) = I(\varphi_1, u), \tag{18}$$

где $u = U_{\tau_1}\omega$, $\varphi_1 = \mathrm{T}_{\tau_1}(\omega)\varphi_0$. Из определения процесса $q(t)$ следует, что φ_1 и u независимы.

Далее

$$I(\varphi_1, u) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|\Phi(t, \tau)\xi_1\| = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln \|g_k \ldots g_1\xi_1\|}{\tau_k - \tau_1} = \tag{19}$$

$$= \frac{1}{Ms}\, i(\varphi_1, u),\ \xi_1 = \Phi(\tau_1, 0)\xi_0,\ s = \tau_2 - \tau_1.$$

Из (18), (19) и независимости φ_1 и u следует, что

$$P\{I(\varphi_0, \omega) = I\} = \int_S P\{i(\varphi_1, u) = i\}\, P(d\varphi_1).$$

Таким образом, имеет место

Лемма 2. *Если при каждом* φ_1

$$P\{i(\varphi_1, u) = i\} = 1,$$

то при каждом φ *с вероятностью единица*

$$I(\varphi, \omega) = I.$$

Теорема 3. *Пусть $q(t)$ — кусочно-постоянный процесс, определенный выше, а Q — множество его положительных значений. Чтобы для каждого φ имело место равенство $P\{I(\varphi, \omega) = I\} = 1$, достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:*

1) Q не пусто и для некоторого $q_j \in Q$ величина L_j может принимать по крайней мере два значения l' и l'' таких, что

$$|l' - l''| \neq \frac{\pi}{q_j};$$

2) Q — пусто. Распределение каждого L_j не сосредоточено в одной точке.

Доказательство. Как следует из теоремы 2 и леммы 2, мы должны убедиться в том, что не существует собственного вектора, общего для всех реализаций матрицы. Пусть ξ_1 — такой вектор и выполнены условия 1. Тогда вектор ξ_1 одновременно является собственным для матриц

$$e^{A_k l_k} \cdot e^{A_j l_j} \ldots e^{A_1 l_1} \tag{20}$$

при $l_j = l'$ и $l_j = l''$. Здесь $A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q_j & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда вытекает, что существует вектор ξ', для которого

$$e^{A_j(l'-l'')}\xi' = \lambda\xi'. \tag{21}$$

Но из явного вида матрицы $e^{A_j l}$ следует, что это равенство противоречит условию 1. Пусть теперь выполнено условие 2. Легко проверить, что тогда ξ_1 будет одновременно собственным вектором $e^{A_1 t}$, $e^{A_k t}$ (см. (20)), что невозможно, так как собственные векторы у этих матриц разные. Теорема доказана.

4. Теперь установим некоторые неравенства, которым удовлетворяет величина I, и укажем подход к ее вычислению. Прямо из определения I и условия $\det\Phi(t, 0) = 1$ следует, что $I \geqslant 0$. Естественно ожидать, что при достаточно общих условиях имеет место строгое неравенство $I > 0$. Это неравенство и даже более сильные сравнительно просто получаются в том случае, когда почти все реализации $q(t)$ отрицательны.

Теорема 4. *Пусть $q(t)$ — стационарный метрически транзитивный процесс и*

$$0 \leqslant a \leqslant -q(t) \leqslant b.^{*)} \tag{22}$$

Тогда

$$\sqrt{a} \leqslant I \leqslant \sqrt{-Mq}. \tag{23}$$

Доказательство. Из определения $I(\varphi, \omega)$ и (1) следует, что

$$I(\varphi, \omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} [1 - q(t)] \sin 2\varphi(t)\, dt. \tag{24}$$

В силу (5), если $\varphi_1 \leqslant \varphi_0 \leqslant \varphi_2$, где $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{a}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\sqrt{b}$, то

$$\varphi_1 \leqslant \varphi(t, \varphi_0) \leqslant \varphi_2. \tag{25}$$

Рассмотрим пока только такие начальные данные и положим $z = \operatorname{tg}\varphi$. Из (5) находим, что

$$\dot{z} = -z^2 - q(t), \tag{26}$$

а значит,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln(1 + z^2) + z = \frac{(1 - q)z}{1 + z^2}. \tag{27}$$

Но правая часть этого тождества есть подынтегральное выражение в (24). Поэтому с учетом (25) имеем

$$I(\varphi_0, \omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(t, z_0)\, dt, \tag{28}$$

где $z_0 = \operatorname{tg}\varphi_0$.

---

*) Условие $q(t) \geqslant -b$ накладывается исключительно ради простоты доказательства. Утверждение теоремы справедливо и без этого предложения лишь при условии $M|q| < \infty$.

Функция $z(t, z_0)$ при $z_0 \in [\sqrt{a}, \sqrt{b}]$ удовлетворяет неравенству

$$|z(t, z_0') - z(t, z_0'')| \leqslant |z_0' - z_0''| e^{-2\sqrt{at}}, \tag{29}$$

которое можно получить из (26) с учетом (22). Отсюда и из (28) находим, что $I(\varphi_0, \omega)$ не зависит от $\varphi_0 \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Но тогда $I(\varphi_0, \omega) = I$, как это следует из (6) и (25). Таким образом, получаем, что в наших предположениях

$$I = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(t, z_0)\, dt, z_0 \in [\sqrt{a}, \sqrt{b}]. \tag{30}$$

Эта формула и (25) сразу приводит к неравенству $I \geqslant \sqrt{a}$. Чтобы получить правую часть (23), достаточно заметить, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T z dt \leqslant \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T z^2 dt}$$

и воспользоваться уравнением (26). Теорема доказана.

Перейдем теперь к случаю, когда $q(t)$ может принимать и положительные значения. Здесь мы можем указать условия строгой положительности I, если $q(t)$ — кусочно-постоянный процесс рассмотренного выше вида. Приведем возможный вариант таких условий, опираясь, как и в теореме 3, на результаты Фюрстенберга [5]. Пусть $q(t)$ — процесс с возможными значениями $q_1 > q_2 > \ldots > q_m$, $q_1 > 0$, у которого промежутки постоянства L_j независимы, $\Sigma ML_j < \infty$, а переходы задаются матрицей $\{p_{ij}\}$ $i, j = 1, \ldots, m$.

Теорема 5. *Неравенство $I > 0$ имеет место, если выполнены условия:*

1) существует j такое, что $p_{1j}p_{j1} > 0$;

2) величина L_1 может принимать значения l_1 и l_1' такие, что $\frac{1}{\pi}\sqrt{q_1}(l_1' - l_1)$ иррационально;

3) величина L_j может принимать значения, отличные от $\pi\sqrt{\frac{q_1}{q_j}}r, r = 0, 1, 2, \ldots$ (Последнее условие нужно лишь при условии $q_j > 0$).

Доказательство. Согласно [5], для строгой положительности i, следовательно, и I, достаточно, чтобы на S не существовало меры, инвариантной относительно почти всех реализаций матрицы одного цикла $g_1 = \Phi(\tau_2, \tau_1)$. Из $p_{1j}p_{j1} > 0$ следует, что существует цикл g_1 вида $\exp(A_jL_j)\exp(A_1L_1)$. Будем обозначать преобразование мер на S, соответствующее матрице $\exp(A_j L_j)$, через $h_j(L_j)$. Предположим, что на S существует мера, для которой

$$h_j(L_j) \cdot h_1(L_1)\mu = \mu.$$

Написав последнее соотношение для L_1, равного l_1 и l_1^{*} при одном и том же значении L_j, найдем, что

$$h_1(l_1' - l_1)\mu = \mu. \tag{31}$$

Предположим сначала, что $q_1 = 1$ и $\frac{1}{\pi}(l_1' - l_1)$ иррационально. Из (31) тогда следует, что мера μ инвариантна относительно поворота S на иррациональный угол. Но тогда μ — равномерная мера на S. Теперь непосредственной проверкой можно убедиться в том, что μ не инвариантна относительно преобразования $h_j(l)$, если только $q_j \leqslant 0$ или $q_j > 0$, но $l_j \neq \frac{k\pi}{\sqrt{q_j}}$. Случай $q_1 \neq 1$ сводится к изложенному заменой времени $t\sqrt{q_1} \to t$. Теорема доказана.

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно получить и более общие условия строгой положительности I для произвольного полумарковского процесса.

Полученные неравенства позволяют, в частности, изучить влияние флуктуаций $q(t)$ на рост решений уравнения (1). Обозначим через I_0 величину (4) для уравнения (1), в котором $q(t)$ заменено на $Mq(t)$. Если $Mq > 0$, то $I_0 = 0$, а $I \geqslant 0$ и даже $I > 0$, например, в условиях теоремы 5. В этом случае флуктуации увеличивают рост решений (ухудшают устойчивость). С другой стороны, если реализации неположительны, то $I_0 = \sqrt{-Mq}$, а, согласно (23), $I \leqslant \sqrt{-Mq}$. Таким образом, в этом случае флуктуации уменьшают рост решений.

5. Укажем теперь один из возможных путей для вычисления I. Пусть $F(t, q, \varphi)$ — совместная функция распределения случайных величин $q(t)$, $\varphi(t)$ и

$$F_T(q, \varphi) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t, q, \varphi)\,dt$$

— семейство функций распределения на $E = (-\infty, \infty) \times S$.

Теорема 6. *Если $q(t)$ — стационарный метрически транзитивный процесс, $M|q| < \infty$ и для каждого φ с вероятностью 1*

$$I(\varphi, \omega) = I,$$

то

$$I = \frac{1}{2}\int_E (1 - q)\sin 2\varphi\, dF(q, \varphi), \tag{32}$$

где $F(q, \varphi)$ — предел любой сходящейся подпоследовательности семейства $F_T(q, \varphi)$.

Доказательство. Из (24) и условий теоремы следует, что

$$I = M\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T [1 - q(t)]\sin 2\varphi(t)\,dt. \tag{33}$$

Внесем математическое ожидание под знак предела по T, воспользовавшись для этого теоремой Лебега об ограниченной сходимости в следующей формулировке: если ξ_n с вероятностью 1 сходится к ξ, $|\xi_n| \leqslant \eta_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} M\eta_n = M \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n$, то и ξ_n обладает этим свойством. В нашем случае роль ξ_n играет $\frac{1}{2T}\int\limits_0^T (1-q)\sin 2\varphi dt$, а роль η_n — величина $\frac{1}{2T}\int\limits_0^T |1-q|\, dt$. Теперь, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2, из [8] приходим к формуле (32).

Замечание. Аналогичные аргументы показывают, что в условиях теоремы 4

$$I = \int\limits_{\sqrt{a}}^{\infty} z\, dF(z), \tag{34}$$

где функция $F(z)$ следующим образом связана с функцией $F(q, \varphi)$, фигурирующей в (32):

$$F(z) = F(\infty, \operatorname{arctg} z).$$

Отметим еще, что формула (34) имеет место и при других предположениях о $q(t)$. Например, она верна для марковских $q(t)$. В этом случае уже не обязательно предполагать, что $q \geqslant a$, тогда интеграл в (35) надо понимать в смысле главного значения.

Теорема 6 показывает, что вычисление I сводится к вопросу о нахождении функции $F(q, \varphi)$. Предположим, что $q(t)$ — эргодический марковский процесс. Тогда пара (q, φ) тоже будет марковским процессом, а $F(q, \varphi)$ — инвариантной мерой этого процесса. Но инвариантная мера марковского процесса часто может быть найдена как стационарное решение прямого уравнения Колмогорова. Таким образом, в случае марковского $q(t)$ существует процедура, позволяющая, по крайней мере в принципе, найти величину I.

Конкретные вычисления по изложенной схеме приведем для процесса $q(t)$ вида

$$1 + \gamma r(t), \tag{35}$$

где $r(t)$ — однородный марковский процесс, принимающий два значения $r_{1,2} = \pm 1$ с матрицей перехода $\begin{pmatrix} -\nu_1 & \nu_1 \\ \nu_2 & -\nu_2 \end{pmatrix}$.

Инвариантная мера процесса (q, φ) в данном случае задается двумя функциями $p_{1,2}(\varphi)$, которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered} [(1-\gamma\cos^2\varphi)\, p_1]' - \nu_1 p_1 + \nu_2 p_2 = 0, \\ [(1+\gamma\cos^2\varphi)\, p_2]' + \nu_1 p_1 - \nu_2 p_2 = 0 \end{gathered} \tag{36}$$

и условиям

$$p_i\left(\frac{\pi}{2}\right) = p_i\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p_i(\varphi)\,d\varphi = \frac{\bar{\nu}_i}{\nu_1+\nu_2}, \quad i = 1, 2; \ \bar{\nu}_1 = \nu_2, \bar{\nu}_2 = \nu_1.$$

Решение указанной системы может быть найдено в квадратурах [8]. Подставляя его в (32), получим формулу для I, которую здесь не приводим из-за ее громоздкости. Из этой формулы, в частности, следует, что при $\gamma \ll 1$

$$I \sim \gamma^2 \frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_1+\nu_2)\,[(\nu_1+\nu_2)^2+4]}. \tag{37}$$

Таким образом, I имеет порядок γ^2 при малых γ. Кроме того, (37) позволяет предположить, что $I \to 0$, когда по крайней мере одно из ν_i стремится к нулю или к ∞. Этот факт действительно может быть доказан с использованием точной формулы для I.

Приведем численные значения величины $I \cdot 10^{+3}$ для некоторых γ и ν (таблица).

γ	ν							
	0,04	0,16	0,32	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0
0,2	0,212	0,825	1,53	2,525	2,571	2,515	2,281	2,022
0,4	0,920	3,58	6,592	10,59	10,68	10,38	9,314	8,101
0,6	2,44	9,445	17,13	25,95	25,69	24,59	21,17	18,87
0,8	*6,0*	*22,87*	*39,77*	*52,53*	*50,22*	*46,90*	*40,14*	*34,45*

Чтобы получить представление о том, как быстро величина

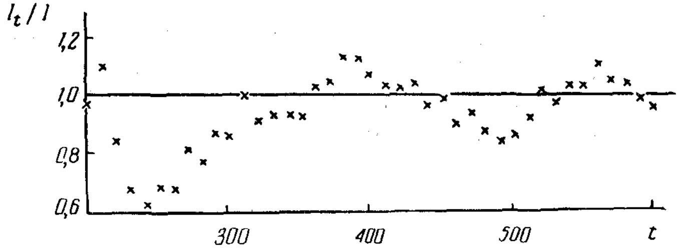
$$\frac{1}{t}\ln\sqrt{\xi^2+\dot{\xi}^2} \tag{38}$$

стремится к своему пределу, мы вычисляли значения функции (38) на ЭЦВМ М-20 методом Монте-Карло. При этом оказалось, что реализации, соответствующие одному ω и разным начальным условиям, практически совпадают при $t > 200$. На рисунке приведены значения функции (38) в промежутке $200 \leqslant t \leqslant 600$ при $\Delta t = 10$ ($\varphi_0 = 0$).

В заключение заметим, что так как корреляционная функция $B(t)$ процесса $r(t)$ есть $\frac{\nu_1\nu_2}{\nu_1+\nu_2}e^{-(\nu_1+\nu_2)t}$, то правую часть в формуле (37) можно записать в виде

$$\frac{\gamma^2}{4}\int_0^\infty B(t)\cos 2t\,dt.$$

Поскольку в этом выражении конкретная структура процесса $r(t)$ не присутствует, естественно предположить, что и в об-



$\nu_1=\nu_2=1;\quad \gamma=0,5$

щем случае стационарного метрического транзитивного процесса асимптотика по дисперсии γ^2 процесса $q(t)$ имеет вид

$$I\sim\frac{\gamma^2}{4}\int_0^\infty B(t)\cos 2t\,dt. \tag{39}$$

В пользу последнего предположения свидетельствует также то, что (39) может быть получено прямо из (5) и (24) формальным разложением по γ.

В заключение авторы приносят благодарность В. А. Марченко и И. В. Островскому за ценные замечания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миллионщиков В. М. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— «Дифференциальные уравнения», 1971, т. 7, № 3, с. 387—389.
2. Оселедец В. И. Мультипликативная эргодическая теорема.— «Труды Моск. мат. о-ва», 1968, т. XIX, с. 179.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965. 350 с.
4. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1958. 470 с.
5. Furstenberg H. Noncomnruting random products, — «Trans. Amer. Math. Soc», (1963), vol. 108, p. 377—428.
6. Тутубалин В. Н. О предельных теоремах для произведения случайных матриц. Теория вероятности и ее применение, X., 19. 32, 1965, т. X, с. 19—32.
7. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров., М., «Наука», 1969. 365 с.
8. Бендерский М. М., Пастур Л. А. О спектре одномерного уравнения Шредингера со случайным потенциалом.— «Мат. сб.», 1970, т. 82 (124), с. 273—284.