УДК 519.46

Е. И. Глазман

О ХАРАКТЕРАХ КОМПАКТНЫХ ПОЛУГРУПП

В работе Хьюита и Цукермана [1] было найдено необходимое и достаточное условие отделимости точек дискретной коммутативной полугруппы ее характерами. Оно заключается в следующем свойстве «сепеpативности» полугруппы:

$$x^2 = y^2 = xy \Rightarrow x = y.$$

Это свойство является необходимым для любой полугруппы. Однако для произвольной топологической коммутативной полугруппы оно не достаточно, как показывает пример полугруппы $[0,1]$* с операцией $a \cdot b = \max(a, b)$ и стандартной топологией. В общем случае появляется еще одно необходимое условие: подполугруппа идемпотентов должна быть вполне несвязна. Шнеперман доказал [2], что для компактной, коммутативной полугруппы идемпотентов это условие и достаточно (сепеpативность здесь имеет место автоматически). Не может ли быть, что для отделимости точек компактной, коммутативной полугруппы ее характерами достаточно, чтобы полугруппа была сепаративной, а подполугруппа идемпотентов вполне несвязной? В настоящей работе показано, что выполнение этих естественных условий все же недостаточно.

Пусть S — коммутативная, компактная, связная полугруппа с нулем* и $\varkappa_0$ — ее нетривиальный характер, т. е. гомоморфизм полугруппы в единичный круг $|\zeta| \leqslant 1$, отличный от тождественного нуля и тождественной единицы.

Рассмотрим в $S \times \boldsymbol{R}$ множество

$$S' = \{(z, t) : \varkappa_0(z) \neq 0, \ t \leqslant \ln^2 |\varkappa_0(z)|\}$$

с операцией $(z_1, t_1) + (z_2 t_2) = (z_1 \cdot z_2, t_1 + t_2)$ и стандартной топологией. Очевидно, что S' является локально-компактной коммутативной полугруппой.

Пусть $\tilde{S}$ — одноточечная компактификация пространства S'. Присоединенный элемент обозначим ∞. Положим, по определению, $\infty + w = w + \infty = \infty$ для всех $w \in \tilde{S}$. Легко видеть, что $\tilde{S}$ — топологическая полугруппа. Действительно, базой окрестностей точки ∞ может служить набор множеств

$$\Omega_{N_1 N_2} = \left\{ (z, t) : |\varkappa_0(z)| < \frac{1}{N_1} \vee t < -N_2 \right\},$$

где N_1, N_2 — натуральные числа. Непрерывность сложения в бесконечно удаленной точке следует из включения

$$\Omega_{N_1 N_2} + \Omega_{N_1 N_2} \subset \Omega_{N_1 N_2}.$$

* Здесь нуль — элемент поглощающий, т. е. $z \cdot 0 = 0$.

Предложение. *В полугруппе $\tilde{S}$ существуют пары точек, не отделяемые характерами.*

Доказательство. Благодаря связности полугруппы существует такая точка z_0, что $\varkappa_0(z_0) \neq 0$ и $|\varkappa_0(z_0)| \neq 1$. Введем функцию на группе целых чисел

$$\tilde{\chi}(n) = \frac{\tilde{\chi}(kz_0, n)}{\tilde{\chi}(kz_0, 0)}.$$

Заметим, что $\tilde{\psi}(n)$ не зависит от k и $\tilde{\psi}(n_1 + n_2) = \tilde{\psi}(n_1)\tilde{\psi}(n_2)$. Значит, $\tilde{\psi}(n) = \zeta^n$ и отсюда

$$\tilde{\chi}(kz_0, n) = \zeta^n \tilde{\chi}(kz_0, 0). \tag{1}$$

Далее возможны три случая.

1. $|\zeta| < 1$. Тогда

$$|\tilde{\chi}(kz_0, n)| = |\zeta^n| |\tilde{\chi}(kz_0, 0)|.$$

При фиксированном $k = k_0$

$$|\tilde{\chi}(k_0 z_0, n)| \to \infty \quad (n \to -\infty),$$

что противоречит ограниченности характера $\tilde{\chi}$.

2. $|\zeta| = 1$. Тогда

$$|\tilde{\chi}(kz_0, n)| = |\tilde{\chi}(kz_0, 0)|,$$

но $\lim\limits_{n \to -\infty} (k_0 z_0, n) = \infty$. Значит,

$$|\tilde{\chi}(\infty)| = |\tilde{\chi}(z_0, 0)|^{k_0} \neq 0,$$

т. е. $\tilde{\chi}(\infty) = 1$ и, следовательно, $\tilde{\chi} = 1$.

3. $|\zeta| > 1$. Заметим, что $(kz_0, k^{\frac{3}{2}}) \in \tilde{S}$ начиная с некоторого k. Из формулы (1) получаем равенство

$$\tilde{\chi}(kz_0, k^2) = \zeta^{k^{\frac{3}{2}}} \tilde{\chi}(kz_0, 0)$$

или

$$\ln|\tilde{\chi}(kz_0, k^{\frac{3}{2}})| = k^{\frac{3}{2}} \ln|\zeta| + k \ln|\tilde{\chi}(z_0, 0)|.$$

Но $\ln|\zeta| > 0$ и, следовательно,

$$|\tilde{\chi}(kz_0, k^{\frac{3}{2}})| \to \infty \quad k \to \infty).$$

Итак, допустив существование нетривиального характера, который в точке $(z_0, 0)$ отличен от нуля, во всех трех случаях мы пришли к противоречию. Таким образом, для всякого нетривиального характера $\tilde{\chi}$ полугруппы $\tilde{S}$ $\tilde{\chi}(z_0, 0) = 0$, а значит, точки $(z_0, 0)$ и ∞ неотделимы.

Предложение доказано.

Если его применить к полугруппе $D = \{z : |z| \leqslant 1\}$ в комплексной плоскости, беря характер $\chi_0(z) = z$, то полугруппа будет обладать только тривиальными характерами. Действительно, пусть $\tilde{\chi}$ — нетривиальный характер полугруппы $\tilde{D}$. Тогда $\tilde{\chi}$ имеет вид

$$\tilde{\chi}(z, t) = |z|^{\alpha+i\beta} z^n e^{\lambda t}, \quad r = \operatorname{Re} \lambda > 0, \tag{2}$$

при $t \leqslant 0$.

Из соотношения

$$\tilde{\chi}(z^2, 0) = \tilde{\chi}(z, t)\, \tilde{\chi}(z, -t)$$

следует, что и при $t > 0$ характер имеет вид (2). Но из доказательства предложения видно, что $\tilde{\chi}(z_0, 0) = 0$. Следовательно, $\tilde{\chi} \leqslant 0$.

Выражаю признательность проф. Ю. И. Любичу за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hewitt E., Zuckerman H. S. The l_1—algebra of a commutative semigroup.—«Trans. Amer. Math. Soc.», 1956, vol. 83, p. 70—97.

5. Шпенерман Л. Б. Теорема двойственности для компактных коммутативных топологических полугрупп.—«Мат. заметки», 1967, т. I, № 5, с. 531—536.

Поступила 8 июня 1973 г.