УДК 517.535.4

А. Садуллаев

О КАНОНИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ n-КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1°. Для целой функции f от n комплексных переменных обозначим через Z_f множество ее нулей, через $n_f('z, t)$ — число нулей (с учетом кратности) функции $f('z, z_n)$ переменного z_n при фиксированном $'z=(z_1, \dots, z_{n-1})$ в круге $|z_n| \leqslant t$, а через $\alpha_i('z)$, $i = 1, 2, \dots$, — эти нули в порядке неубывания их модулей. Условимся считать, что $n_f('z^\circ, t) = -1$ для всех $t \geqslant 0$, если $f('z^\circ, z_n) \equiv 0$.

Пусть $\rho_f('z)$ — порядок роста функции $f('z, z_n)$ переменного z_n при фиксированном $'z$ и $\rho_{z_f}('z)$ — показатель сходимости последовательности $\alpha_1('z), \alpha_2('z), \dots$, который определяется следующим образом:

$$\rho_{z_f}('z) = \lim_{r_n \to \infty} \frac{\Phi('z, r_n)}{\ln r_n}, \tag{1}$$

где

$$\Phi('z, r_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f\left('z, r_n e^{i\varphi_n}\right)\right| d\varphi_n.$$

Известно, что множества

$$N_\rho(f) = \left\{ 'z \in \boldsymbol{C}^{n-1} : \rho_f('z) < \sup_{'z \in \boldsymbol{C}^{n-1}} \rho_f('z) \overset{\text{def}}{=} \rho_n(f) \right\}$$

и

$$N_\rho(Z_f) = \left\{ 'z \in \boldsymbol{C}^{n-1} : \rho_{Z_f}('z) < \sup_{'z \in \boldsymbol{C}^{n-1}} \rho_{Z_f}('z) \overset{\text{def}}{=} \rho_n(Z_f) \right\}$$

являются полярными (см. Лелон [1]) и работу [7])*.

Положим

$$\rho(f) = \sup_{\lambda \in \boldsymbol{C}^n} \rho_\varphi(\lambda)$$

и

$$\rho(Z_f) = \sup_{\lambda \in \boldsymbol{C}^n} \rho_{Z_\varphi}(\lambda),$$

где $\varphi(\lambda, \omega) = f(\lambda_1 \omega, \dots, \lambda_n \omega)$ — целая функция переменного $(\lambda, \omega) \in \boldsymbol{C}^{n+1}$.

Лелоном [3] и Штоллем [8] различными методами доказано, что если $\rho(f) < \infty$, то функция f представляется в виде

$$f(z) = \psi(z) \exp g(z), \tag{2}$$

где g и ψ — целые функции, причем ψ, называемая канонической функцией, имеет порядок роста, равный $\rho(Z_f)$.

Определения характеристик $\rho(f)$ и $\rho(Z_f)$, данные здесь, несколько отличаются от определений их Лелоном и Штоллем.

---

* Свойства множества $N_\rho(f)$ при $n=2$ изучались в работах Сира [4] и Лелона [2]. Так, в 1941 г. Лелон доказал, что для целой функции f двух комплексных переменных множество $N_\rho(f)$ имеет внутреннюю емкость нуль. В общем случае этот вопрос рассматривался Л. И. Ронкиным в [6] (см. также Л. И. Ронкин [5]), где доказано, что множества $N_\rho(f)$ и $N_\rho(Z_f)$ имеют Г-емкости нуль. Несколько более сильный факт для множества $N_\rho(f)$, а именно его полярность, очевидным образом вытекает из результатов Лелона [1].

Можно показать, что эти определения эквивалентны (см. Л. И. Ронкин [5]).

С помощью представления (2) при условии $\rho(Z_f) < \infty$ и еще при некоторых дополнительных условиях Л. И. Ронкин [5] доказал существование целой функции $\psi_n(z)$ такой, что $\rho_n(\psi_n) = \rho_n(Z_f)$.

Здесь доказывается существование канонической функции по одной из переменных (теорема 1) и затем канонической функции по совокупности переменных (теорема 3). Тем самым усиливается сформулированный выше результат Л. И. Ронкина и дается положительный ответ на один из поставленных им в [5] вопросов.

2°. *Вспомогательные результаты.* Известно, что $\rho_n(Z_f)$ совпадает с нижней гранью тех чисел $\lambda \geqslant 0$, для которых при всех $'r = (r_1, \ldots, r_{n-1})$ сходится интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{M_\Phi('r, t)}{t^{\lambda+1}} dt, \tag{3}$$

где $M_\Phi('r, t) = \max\limits_{\substack{|z_i|=r_i \\ i=1,\ldots,(n-1)}} \Phi('z, t)$ (см. Л. И. Ронкин [5]).

Отсюда, если обозначать через q наименьшее целое число, для которого при $\lambda = q+1$ и при всех $'r$ сходится интеграл (3), то выполняется неравенство

$$\rho_n(Z_f) - 1 \leqslant q \leqslant \rho_n(Z_f). \tag{4}$$

Докажем несколько лемм.

Лемма 1. *В любом поликруге $U('z^\circ, 'r)$, компактном в области $E_f = C^{n-1} \setminus 'Z_f$, где $'Z_f = \{'z \in C^{n-1} : f('z, 0) = 0\}$, ряд $\sum |\alpha_i^{-m}('z)|$ сходится равномерно для всех $m > q$.*

Доказательство. Без ограничения общности положим $'z^\circ = 0$. Ясно, что при $0 < R_1 \leqslant R_2 < \infty$ имеем

$$\sum_{R_1 < |\alpha_i| \leqslant R_2} |\alpha_i^{-m}('z)| = \frac{n_f('z, R_2)}{R_2^m} - \frac{n_f('z, R_1)}{R_1^m} + \\ + m \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{n_f('z, t)}{t^{m+1}} dt. \tag{5}$$

Применяя формулу Иенсена, при $'z \in U(0, 'r)$ получим

$$n_f('z, t) \leqslant \int\limits_0^{et} \frac{n_f('z, s)}{s} ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln|f('z, ete^{i\varphi_n})| d\varphi_n - \ln|f('z, 0)| \leqslant M_\Phi('r, et) + \\ + \max_{\substack{|z_i|=r_i \\ i=1,\ldots,(n-1)}} (-\ln|f('z, 0)|).$$

Так как $\int\limits_0^\infty \frac{M_\Phi('r,\ t)}{t^{m+1}}\,dt < \infty$, то правая часть, а значит, и левая часть (5) равномерно стремится к нулю при $R_1,\ R_2 \to \infty$. Лемма доказана)

Лемма 2. *Для любого* $m > q$ *функция* $\operatorname{Re}\sum\limits_i \alpha_i^{-m}('z)$ *является плюригармонической в* E_f.

Доказательство. Сначала покажем, что функция непрерывна в E_f*. Фиксируем произвольную точку $'z^\circ \in E$ и возьмем последовательность положительных чисел $\{t_j\}$ такую, что $t_j \to \infty$ при $j \to \infty$ и $f('z^\circ,\ z_n) \neq 0$, на множестве

$$\{|z_n| \leqslant t_1\} \cup \left\{\bigcup_{j=2}^{\infty} \{|z_n| = t_j\}\right\}.$$

Тогда для каждого $j > 1$ существует окрестность $'V_j \ni 'z^\circ$ такая что $f('z,\ z_n) \neq 0$ на множестве

$$'V_j \times \{\{|z_n| < t_1\} \cup \{|z_n| = t_j\}\}.$$

По обобщенному принципу аргумента при $'z \in 'V_j$ имеем

$$\sum_{|\alpha_i| < t_j} \alpha_i^{-m}('z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z_n|=t_j} z_n^{-m}\,\frac{\frac{\partial}{\partial z_n} f('z,\ z_n)}{f('z,\ z_n)}\,dz_n -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z_n|=t_1} z_n^{-m}\,\frac{\frac{\partial}{\partial z_n} f('z,\ z_n)}{f('z,\ z_n)}\,dz_n, \tag{6}$$

где правая часть, а значит, и левая непрерывна в $'V_j$.

Следовательно, функции $S_j('z) = \sum\limits_{|\alpha_i| < t_j} \alpha_i^{-m}('z)$, $j = 2,\ 3, \ldots,$ непрерывны в точке $'z^\circ$. Отсюда по лемме 1 заключаем, что функции $\sum\limits_i \alpha_i^{-m}('z)$, а значит, $\operatorname{Re}\sum\limits_i \alpha_i^{-m}('z)$ непрерывна в точке $'z^\circ$.

Остается показать, что для любой аналитической прямой $l \rightleftharpoons \{'z \in C^{n-1} : 'z = 'z^\circ + 'W^\circ\omega\}$, где $'z^\circ \in E_f$, $'W^\circ \in C^{n-1}$ и $\omega \in C$ — параметр, функция $\operatorname{Re}\sum\limits_i \alpha_i^{-m}('z^\circ + 'W^\circ\omega)$ переменного ω гармонична в $l \cap E_f$. Так как $\alpha_i('z^\circ + 'W^\circ\omega)$, $i = 1,\ 2, \ldots,$ являются нулями функции $f('z^\circ + 'W^\circ\omega,\ z_n)$ переменного z_n при фиксированном $\omega \in C$, то достаточно показать гармоничность $\operatorname{Re}\sum\limits_i \alpha_i^{-m}('z)$ при $n = 2$, т. е. при $f(z) = f(z_1,\ z_2)$.

---

* Доказательство непрерывности функции $\operatorname{Re}\sum \alpha_i^{-m}('z)$ сообщил нам И. В. Островский — оно проще предложенного нами.

Для $z_1 \in F_i$ имеем формулу (см. А. А. Гольдберг, И. В. Островский [9])

$$\frac{1}{m!}\cdot\frac{\partial^m \ln f(z_1, z_2)}{\partial z_2^m}\bigg|_{z_2=0} + \frac{1}{m}\sum_{|\alpha_i|\leqslant R}\alpha_i^{-m}(z_1) =$$

$$= \frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi}\ln|f(z_1, Re^{i\varphi_2})|\,e^{-im\varphi_2}d\varphi_2 +$$

$$+\frac{1}{m}\sum_{|\alpha_i|\leqslant R}\left(\frac{\bar{\alpha}_i(z_1)}{R^2}\right)^m.$$

Заметим, что если $m > q$, то

$$\left|\sum_{|\alpha_i|\leqslant R}\left(\frac{\bar{\alpha}_i(z_1)}{R^2}\right)^m\right| \leqslant \frac{n_f(z_1, R)}{R^m} \to 0$$

при $R \to \infty$, равномерно на любом компакте $U \Subset E_f$. Отсюда видно, что при $R \to \infty$ функция

$$J(z_1, R) = \frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi}\ln|f(z_1, Re^{i\varphi_2})|\,e^{-im\varphi_2}d\varphi_2 \tag{7}$$

стремится к функции

$$J(z_1) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \ln f(z_1, z_2)}{\partial z_2^m}\bigg|_{z_2=0} + \frac{1}{m}\sum_i \alpha_i^{-m}(z_1)$$

равномерно на любом компакте $U \subset E_f$. При фиксированном $\overset{\circ}{z}_1 \in E_f$ (без ограничения общности полагаем $\overset{\circ}{z}_1 = 0$) и при достаточно малых $r > 0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} J(re^{i\varphi_1})\,d\varphi_1 = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} J(re^{i\varphi_1}, R)\,d\varphi_1 =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi}\cos(m\varphi_2)\,d\varphi_2\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\varphi_1}, Re^{i\varphi_2})|\,d\varphi_1.$$

В силу равномерной сходимости функции $J(z_1, R)$ (при $R \to \infty$) и теоремы Фубини предельный переход под знаком интеграла и изменение порядка интегрирования в этом соотношении законны. По классическому неравенству Иенсена, величина

$$\tilde{N}_f(r, Re^{i\varphi_2}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\varphi_1}, Re^{i\varphi_2})|\,d\varphi_1 - \ln|f(0, Re^{i\varphi_2})|$$

неотрицательна. Отсюда получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} J(re^{i\varphi_1})\,d\varphi_1 = \operatorname{Re} J(0) +$$

$$+\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi}\tilde{N}_f(r, Re^{i\varphi_2})\cos(m\varphi_2)\,d\varphi_2,$$

где

$$\left|\frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi}\widetilde{N}_f(r,\ Re^{i\varphi_2})\cos(m\varphi_2)\,d\varphi_2\right| \leqslant \frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi}\widetilde{N}_f(r,\ Re^{i\varphi_2})\,d\varphi_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\varphi_1},\ Re^{i\varphi_2})|\,d\varphi_1 - \ln|f(0,\ Re^{i\varphi_2})|\right]d\varphi_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{R^m}M_\Phi(r,\ R) - \frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi}\ln|f(0,\ Re^{i\varphi_2})|\,d\varphi_2.$$

Следовательно,

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi}\widetilde{N}_f(r,\ Re^{i\varphi_2})\cos(m\varphi_2)\,d\varphi_2 = 0$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}I\,(re^{i\varphi_1})\,d\varphi_2 = \operatorname{Re}I\,(0).$$

Таким образом, для любой точки $z_1^0 \in E_f$

$$\operatorname{Re}I\,(z_1^0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}I\,(z_1^0 + re^{i\varphi_1})\,d\varphi_1$$

для всех $r < r_0(z_1^0)$, т. е. функция $\operatorname{Re} I\,(z_1)$, а значит, и $\operatorname{Re}\sum_i \alpha_i^{-m}(z_1)$ — гармоническая в E_f. Лемма доказана.

Следствие. *Для любого* $m > q$ *функция* $\operatorname{Re}\sum(z_n\alpha_i^{-1}('z))^m$ *плюригармонична в* $E_f \times \boldsymbol{C}$.

Действительно, если $\beta_i(z)$ — нули (с учетом кратности) функции $F(z, \omega) = f('z, z_n\omega)$ переменного ω при фиксированном z, то легко видеть, что

$$\sum_i \beta_i^{-m}(z) = \sum_i (z_n\alpha_i^{-1}('z))^m$$

для любой $z \in E_f \times \boldsymbol{C}$. По лемме 2, $\operatorname{Re}\sum_i \beta_i^{-m}(z)$, а значит, и $\operatorname{Re}\sum_i (z_n\alpha_i^{-1}('z))^m$ плюригармонична в $E_F = E_f \times \boldsymbol{C}$.

Пусть $'U$ — поликруг, компактный в E_f. Ясно, что при любом фиксированном $'z \in {'U}$ функция

$$\psi('z, z_n) = \prod_i\left(1 - \frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right)\exp P_q\left(\frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right),$$

где

$P_q(\omega) = \sum_{k=1}^{q}\frac{\omega^k}{K}$, является целой функцией от z_n, имеющей те же нули (с учетом кратности), что и функция $f('z, z_n)$.
Следовательно,

$$f('z, z_n)\ \psi^{-1}('z, z_n) = \exp g('z, z_n),$$

где $g('z, z_n)$ — целая функция переменного z_n. Так как $\exp g('z, 0) = f('z, 0)$ голоморфна в $'U$, можно считать, что $g('z, 0)$ также голоморфна в $'U$.

Лемма 3. *Существует $r_n > 0$ такое, что в $U = 'U \times \{|z_n| < r_n\}$ функция $\ln|\psi(z)|$ плюригармонична.*

Доказательство. Берем $r_n > 0$ так, чтобы $f(z) \neq 0$ в $'U \times \{|z_n| \leqslant r_n\}$. Тогда при $z \in U = 'U \times \{|z_n| < r_n\}$ имеем

$$\ln|\psi(z)| = \sum_i \left(\ln\left|1 - \frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right| + \operatorname{Re} P_q\left(\frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right)\right) =$$

$$= -\sum_i \operatorname{Re} \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right)^k = -\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{Re}\left(z_n^k \sum_i \alpha_i^{-k}('z)\right). \tag{8}$$

По следствию леммы 2, функция $\operatorname{Re}\left(z_n^k \sum_i \alpha_i^{-k}('z)\right)$ плюригармонична в U для любого $k > q$. Так как ряд (8) сходится равномерно в области U, то функция $\ln|\psi(z)|$ является плюригармонической в этой области. Лемма доказана.

Из леммы 3 следует, что функция $\operatorname{Re} g(z) = \ln|f(z)| - \ln|\psi(z)|$ плюригармонична в U. Поэтому существует голоморфная в U функция $g_1(z)$ такая, что $\operatorname{Re} g_1 = \operatorname{Re} g$. Отсюда $g_1(z) - g(z) = iR(z)$, где R — действительнозначная функция в U. Так как при фиксированном $'z \in 'U$ функция $iR('z, z_n) = g_1('z, z_n) - g('z, z_n)$ переменного z_n голоморфна в $\{|z_n| < r_n\}$, то $R(z)$ не зависит от z_n, т. е. $R('z, z_n) = R('z)$. Но при $z_n = 0$ функция $iR('z) = g_1('z, 0) - g('z, 0)$ является голоморфной в $'U$. Отсюда $R('z) = \text{const}$ и $g(z) \in H(U)$. Из теоремы Хартогса следует, что $g(z) \in H('U \times \boldsymbol{C})$. Поэтому функция $\psi(z) = f(z)\exp(-g(z))$ является голоморфной в $'U \times \boldsymbol{C}$. Так как $'U$ — произвольный поликруг, компактный в E_f, то функция

$$\psi(z) = \prod_i \left(1 - \frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right) \exp P_q\left(\frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right)$$

голоморфна в $E_f \times \boldsymbol{C}$.

3°. *Основной результат.*

Теорема 1. *Пусть целая функция f такова, что $\rho_n(z_f) < \infty$. Тогда она представляется в виде*

$$f(z) = \psi(z)\exp g(z), \tag{9}$$

где ψ, g — целые функции и

$$\rho_n(\psi) = \rho_n(z_f).$$

Доказательство. Представляем f в виде

$$f(z) = A('z)\, z_n^m\, \varphi(z),$$

где $m \geqslant 0$, $A('z)$, $\varphi(z)$ — целые функции, $\varphi('z, 0) \not\equiv 0$ и размерность аналитического множества

$$G_\varphi = \{'z \in C^{n-1} : \varphi('z, z_n) = 0$$
для всех $z_n \in C\}$ не превосходит $n-3$ (см. [7]).

Покажем, что функция

$$B(z) = \varphi('z, 0) \exp\left(\sum_{m=1}^{q} \frac{z_n^m}{m!} \times \frac{d^m \ln\varphi}{dz_n^m}\bigg|_{z_n=0}\right) \prod_i \left(1 - \frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right) \times$$
$$\times \exp P_q\left(\frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right),$$

голоморфная в $E_\varphi \times C$, продолжается на все C^n как целая функция*. Ясно, что если $'z^0 \in C^{n-1} / G_\varphi$, то найдется окрестность $'V \ni$ $\ni 'z^0$ такая, что в $V = 'V \times C$ функция φ представляется в виде

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^{r} (z_n - \alpha_i('z))\, \varphi_1(z),$$

где r — кратность нуля функции $\varphi('z^\circ, z_n)$ переменного z_n в точке $z_n = 0$, $\varphi_1 \in H(V)$ и $\varphi_1('z, 0) \neq 0$ в $'V$. Отсюда при $'z \in 'V \cap E_\varphi$ имеем

$$\varphi('z, 0) = \prod_{i=1}^{r} (-\alpha_i('z))\, \varphi_1('z, 0)$$

и

$$\frac{d^m \ln\varphi}{dz_n^m}\bigg|_{z_n=0} = -(m-1)! \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{-m}('z) + \frac{d^m \ln\varphi_1}{dz_n^m}\bigg|_{z_n=0},$$

Следовательно, функция

$$B(z) = \varphi('z, 0) \exp\left(\sum_{m=1}^{q} \frac{z_n^m}{m!} \frac{d^m \ln\varphi}{dz_n^m}\bigg|_{z_n=0}\right) \times \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right) \times$$
$$\times \exp P_q\left(\frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right) \times \prod_{i>r} \left(1 - \frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right) \times \exp P_q\left(\frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right) =$$
$$= \varphi_1('z, 0) \exp\left(\sum_{m=1}^{q} \frac{z_n^m}{m} \times \frac{d^m \ln\varphi_1}{dz_n^m}\bigg|_{z_n=0}\right) \prod_{i=1}^{r} (z_n - \alpha_i('z)) \times \tag{10}$$
$$\times \prod_{i>r} \left(1 - \frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right) \exp P_q\left(\frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right)$$

голоморфно продолжается из $('V \cap E_\varphi) \times C$ в V. Так как $\dim(G_\varphi \times$ $\times C) \leqslant n-2$, то $B(z)$ является целой функцией в C^n. При этом очевидно, что частное $f(z)\ \psi^{-1}(z)$, где $\psi(z) = A('z)\ z_n^m\ B(z)$, является целой функцией, не обращающейся в нуль. Отсюда

$$f(z) = \psi(z) \exp g(z),$$

где g — целая функция в C^n.

Остается доказать, что $\rho_n(\psi) = \rho_n(Z_f)$.

---

* Здесь $\alpha_i('z)$ — корни функции $\varphi('z, z_n)$ переменного z_n при фиксированном $'z$ с учетом кратности и в порядке неубывания их модулей.

Так как $\rho_n(\psi) = \rho_n(B)$, то достаточно показать, что $\rho_n(B) = \rho_n(Z_f)$. Пусть q $('z)$ — наименьшее целое число, для которого сходится интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\Phi('z, t)}{t^{q('z)+2}} dt. \qquad (11)$$

Ясно, что $q('z) \leqslant q$ и $\rho z_f('z) - 1 \leqslant q('z) \leqslant \rho z_f('z)$.

При этом, как отмечалось в п. 1°, $\rho z_f('z) = \rho_n(Z_f)$ для всех $'Z \in C^{n-1}$, за исключением некоторого полярного множества $P \subset C^{n-1}$. Если $q \neq \rho_n(Z_f)$, то $q('z) = q$ для всех $'z \overline{\in} P$ и, следовательно, функция при $'z \in E_\varphi / P$)

$$B_1(z) = \prod_i \left(1 - \frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right) \exp P_q \left(\frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right)$$

является каноническим произведением Вейерштрасса последовательности $\alpha_1('z)$, $\alpha_2('z)$, ...

Отсюда имеем

$$\rho_B('z) = \rho_{B_1}('z) = \rho_{Zf}('z) = \rho_n(Z_f)$$

для всех $'z \in E_\varphi / P$, т. е. $\rho_n(B) = \rho_n(Z_f)$.

Если $q = \rho_n(Z_f)$, то из оценки (см. Б. Н. Левин [10])

$$\ln|B_1(z)| \leqslant A_q r^q \left\{ \int_0^r \frac{n_\varphi('z, t)}{t^{q+1}} + r \int_r^\infty \frac{n_\varphi('z, t)}{t^{q+2}} dt \right\},$$

где $A_q = 3e(q+1)(\ln q + 2)$, $'z \in E_\varphi$ и $z = |Z_n|$ следует, что $\rho_{B_1}('z) \leqslant q = \rho_n(Z_f)$. Следовательно, в этом случае также $\rho_n(B) = \rho_n(z_f)$. Теорема доказана.

Замечание. В случае, когда $\rho_n(Z_f) = q + 1$, верхний тип функции ψ по переменной z_n при порядке $\rho_n(Z_f)$:

$$\sigma_{n,\psi} = \sup_{'r \in R+}{}_{n-1} \sigma_{n,\psi}('r)$$

равен нулю. (Здесь

$$\sigma_{n,\psi}('r) = \overline{\lim_{r_n \to \infty}} \frac{\ln^+ M_\psi(r)}{r_n^{\rho_n}(Z_f)},$$

$$M_\psi(r) = M_\psi(r_1, \ldots, r_n) = \max_{\substack{|z_i| = r_i \\ i=1, \ldots, n}} |\psi(z)|).$$

Это показывает, что функция ψ обладает свойством минимальности, которое характеризует каноническое произведение.

В самом деле, согласно оценке канонического произведения, при $'z^\circ \in E_\varphi$ имеем

$$\ln^+ M_{B_1}('z^\circ, r_n) \leqslant A_q r_n^q \left\{ \int_{r_0}^{r_n} \frac{n_\varphi('z^\circ, t)}{t^{q+1}} dt + r_n \int_{r_n}^\infty \frac{n_\varphi('z^\circ, t)}{t^{q+2}} dt \right\},$$

где $M_{B_1}('z, r_n) = \max\limits_{|z_n| = r_n} |B_1('z, z_n)|$, $r_0 = |\alpha_1('z_0)| > 0$.

Пользуясь неравенством

$$n_\varphi('z^\circ, t) \leqslant C_\sigma(\Phi('z^\circ, \sigma t) - \ln|f('z^\circ, 0)|),$$

где $\sigma > 1$ — произвольное число и C_σ — константа, получим (при $r_n > r_0$)

$$\ln^+ M_{B_1}('z^\circ, r_n) \leqslant C_\sigma A_q r_n^q \left\{ \int\limits_{r_0}^{r_n} \frac{\Phi('z^\circ, \sigma t)}{t^{q+1}} dt + r_n \int\limits_{r_n}^{\infty} \frac{\Phi('z^\circ, \sigma t)}{t^{q+2}} dt \right\} +$$

$$+ C_{\sigma, q}('z^\circ) r_n^q \ln \frac{er_n}{r_0},$$

где

$$C_{\delta, q}('z^\circ) = C_{r_0} C_\sigma A_q |\ln|f('z^\circ, 0)||,$$

C_{r_0} — константа, зависящая только от r_0.

Следовательно, если $K \subset\subset E_\varphi \cap U(0, 'r)$, где

$$U(0', 'r) = \{'z \in C^{n-1} : |z_i| < r_i, \ i = 1, \ldots, (n-1)\},$$

то

$$\max_{'z \in K} \ln^+ M_{B_1}('z, z_n) \leqslant C_\delta A_q r_n^q \left\{ \int\limits_{r_0}^{r_n} \frac{M_\Phi('r, \delta t)}{t^{q+1}} dt + \right.$$

$$\left. + r_n \int\limits_{r_n}^{\infty} \frac{M_\Phi('r, \delta t)}{t^{q+2}} dt \right\} + C_{\delta, q}(K) r_n^q \ln \frac{er_n}{r_0},$$

где

$$r_0 > 0 \text{ и } C_{\delta, q}(K) = \max_{'z \in K} C_{\delta, q}('z).$$

Заметим, что любой поликруг $U(0, 'r) \subset C^{n-1}$ можно покрыть конечным числом поликругов: $U_1, \ldots, U_N$ достаточно малого радиуса таких, что их остовы $\Gamma_i \subset E_\varphi$, $i = 1, \ldots, N$.

Отсюда видно, что для любого $\delta > 1$ существуют такие константы $r_0 > 0$, $C^{(1)}_{\delta, q}('r)$ и $C^{(2)}_{\delta, q}('r)$, что (при $r_n > r_0$)

$$\ln^+ M_\psi(r) \leqslant C^{(1)}_{\delta, q}('r) r_n^q \left\{ \int\limits_{r_0}^{r_n} \frac{M_\Phi(\delta' r, \delta t)}{t^{q+1}} dt + \right.$$

$$\left. + r_n \int\limits_{r_n}^{\infty} \frac{M_\Phi(\delta' r, \delta t)}{t^{q+2}} dt \right\} + C^{(2)}_{\delta, q}('r) r_n^q \ln \frac{er_n}{r_0}.$$

Из этого неравенства при $\rho_n(z_l) = q + 1$ легко получается требуемый результат.

Теорема 2. *Пусть целая функция* $f(z)$ *такова, что* $\rho_n(Z_f)<\infty$ *и* $E_f \neq \varnothing$. *Тогда при* $m>q$ *функция*

$$F('z)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m \ln f}{\partial z_n^m}\bigg|_{z_n=0}+\frac{1}{m}\sum_i \alpha_i^{-m}('z)$$

продолжается на все C^{n-1} *как целая функция* (см. Л. И. Ронкин [5], где этот результат доказан в частном случае).

Доказательство. Представим f в виде $f(z)=A('z)\ \varphi(z)$, где A, φ — целые функции и размерность аналитического множества

$$G_\varphi=\{'z\in C^{n-1}: n_\varphi('z)=-1\}$$

не превосходит $n-3$.

Покажем сначала голоморфность функции F в E_f. Если $'U\Subset E_f$ — поликруг, то, по следствию леммы 2, существует $g\in H('U\times C)$ такая, что

$$\operatorname{Re} g(z)=\operatorname{Re}\sum_i\left(z_n\alpha_i^{-1}('z)\right)^m.$$

Отсюда

$$g(z)-\sum_i\left(z_n\alpha_i^{-1}('z)\right)^m=iR(z),$$

где $R(z)$ — действительнозначная функция в $'U\times C$. Так как при фиксированном $'z\in{}'U$ функция

$$iR('z,\ z_n)=g('z,\ z_n)-z_n^m\sum_i\alpha_i^{-m}('z)$$

является целой функцией по переменной z_n, то она — константа, т. е. $R('z,\ z_n)=R('z)$. Но при $z_n=0$ функция $iR('z)=g('z,\ 0)$ голоморфна в $'U$. Поэтому $R('z)=\text{const}$, и функция

$$\sum_i\left(z_n\alpha_i^{-1}('z)\right)^m$$

голоморфна в $'U\times C$. Отсюда $\sum\limits_i\alpha_i^{-m}('z)$, а значит, и $F('z)$ является голоморфной функцией в E_f.

Если $'z^\circ\in C^{n-1}\setminus G_\varphi$, то найдется окрестность $V\ni{}'z^\circ$ такая, что в $V={}'V\times C$ функция φ представляется в виде

$$\varphi(z)=\prod_{i=1}^{r}(z_n-\alpha_i('z))\ \varphi_1(z),$$

где r — кратность нуля функции $\varphi('z^\circ,\ z_n)$ переменного z_n, в точке $z_n=0$, $\varphi_1\in H(V)$ и $\varphi_1('z,\ 0)\neq 0$ в $'V$. Отсюда при $'z\in{}'V\cap E_f$ имеем

$$\frac{\partial^m \ln f}{\partial z_n^m}\bigg|_{z_n=0}=\frac{\partial^m \ln \varphi}{\partial z_n^m}\bigg|_{z_n=0}=$$

$$=-(m-1)!\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^{-m}('z)+\frac{\partial^m \ln \varphi_1}{\partial z_n^m}\bigg|_{z_n=0}.$$

Следовательно, функция

$$F('z) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \ln f}{\partial z_n^m}\bigg|_{z_n=0} +$$

$$+ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{-m}('z) + \frac{1}{m} \sum_{i>r} \alpha_i^{-m}('z) =$$

$$= \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \ln \varphi_1}{\partial z_n^m}\bigg|_{z_n=0} + \frac{1}{m} \sum_{i>r} \alpha_i^{-m}('z)$$

голоморфно продолжается из $'V \cap E_f$ в $'V$. Так как $\dim G_\varphi \leqslant \leqslant n-3$, то $F('z)$ является целой функцией в C^{n-1}. Теорема доказана.

4°. *Каноническая функция по совокупности переменных.* С помощью теоремы 1 легко получить известный результат о представлении целых функций в виде (2).

Обозначим через q наименьшее целое число, для которого сходится интеграл:

$$\int_1^\infty \frac{M_\Phi(t)}{t^{q+2}}\, dt,$$

где

$$\Phi(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f\ \lambda t e^{i\varphi})|\, d\varphi$$

$$M_\Phi(t) = \max_{\|\lambda\|=1} \Phi(\lambda, t), \quad \|\lambda\| = (|\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3. *Пусть целая функция f такова, что $f(0) \neq 0$ и $\rho(Z_f) < \infty$. Тогда f представляется в виде*

$$f(z) = \psi(z) \exp g(z), \tag{12}$$

где ψ, g — целые функции, $\rho(\psi) = \rho(Z_f)$ и в некоторой окрестности начала координат функция $\ln \psi(z)$ разлагается в ряд Тейлора следующим образом:

$$\ln \psi(z) = \sum_{|k|=q+1}^{\infty} a_k z^k. \tag{13}$$

($k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс).

Доказательство. По теореме 1 функция $f(\lambda\omega)$ представляется в виде

$$f(\lambda\omega) = \psi(\lambda, \omega) \exp \tilde{g}(\lambda, \omega),$$

где $\tilde{g}(\lambda, \omega)$ и

$$\tilde{\psi}(\lambda, \omega) = \prod_i \left(1 - \frac{\omega}{\alpha_i(\lambda)}\right) \exp P_q\left(\frac{\omega}{\alpha_i(\lambda)}\right)$$

— целые функции от $n+1$ комплексных переменных, $\alpha_i(\lambda)$ нули (с учетом кратности) функции $f(\lambda\omega)$ переменного ω при фиксированном λ в порядке неубывания их модулей.

Так как

$$\alpha_i^{-1}(\lambda\omega) = \omega\alpha_i^{-1}(\lambda)$$

для любого $\omega \in \boldsymbol{C}$, то

$$\tilde{\psi}(\lambda, \omega) = \prod_i \left(1 - \alpha_i^{-1}(\lambda\omega)\right) \exp P_q\left(\alpha_i^{-1}(\lambda\omega)\right) = \psi(\lambda\omega),$$

где $\psi(z)$ — целая функция от n переменных. Отсюда $f(z) = \psi(z) \exp g(z)$. Легко видеть, что $\rho(\psi) = \rho(z_f)$, и в окрестности нуля

$$V = \left\{z \in \boldsymbol{C}^n : \left|\alpha_1^{-1}(z)\right| < 1\right\}$$

функция $\ln \psi(z)$ разлагается в ряд

$$\ln \psi(z) = \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \sum_i \alpha_i^{-\nu}(z). \tag{14}$$

Сумма ряда $\sum\limits_i \alpha_i^{-\nu}(z)$ как целая и однородная степени ν функция является однородным полиномом степени ν. Отсюда и следует разложение (13). Теорема доказана.

5°. *Замечание.* Пусть $f(z)$ — целая функция n-переменных и

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k('z) z_n^k —$$

разложение этой функции в ряд Харторгса. Обозначим через $\tilde{n}_f('z)$ нижнюю грань тех целых чисел k, для которых $g_k('z) \neq 0$ (таким образом, $\tilde{n}_f('z^0) = -1$, если $g_k('z^0) = 0$ для всех $k \geqslant 0$). Тогда

$$\tilde{G}_m = \{'z \in \boldsymbol{C}^{n-1} : \tilde{n}_f('z) \leqslant m\}$$

совпадает с множеством, где $g_k('z) = 0$ для всех $k > m$, и, следовательно, является аналитическим множеством в $\boldsymbol{C}^{n-1}$. Отсюда, если f не представляется в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m} g_k('z) z_n^k, \quad m < \infty, \tag{15}$$

то множество

$$\tilde{L}_f = \{'z \in \boldsymbol{C}^{n-1} : \tilde{n}_f('z) < \infty\}$$

является счетным объединением аналитических множеств (размерности, меньшей n):

$$\tilde{L}_f = \bigcup_{k=-1}^{\infty} \tilde{G}_k.$$

Аналогичный результат для множества нулей целой функции более слабый. Именно, если аналитическое множество $V \subset \boldsymbol{C}^n$ не является множеством нулей никакой функции вида (15), то $G_k = \{'z \in \boldsymbol{C}^{n-1} : n_V('z) \leqslant k\}$, $k \geqslant -1$, являются замкнутыми полярными множествами, где $n_V('z^0)$ — число точек пересечения (с учетом кратности)

$$V \cap \{z \in \boldsymbol{C}^n : z_1 = z_1^0, \ldots, z_{n-1} = z_{n-1}^0\},$$

причем $n_V('z^0) = -1$, если это пересечение не дискретно (см. лемму 3 из работы [7]).

Доказанная выше теорема 1 при дополнительном ограничении на множество V позволяет усилить этот результат. Справедливо

Предложение. *Если аналитическое множество* $V \subset \boldsymbol{C}^n$ *не является множеством нулей никакой функции вида* (15) *и* $\rho_n(V) < \infty$, *где* $\rho_n(V) = \rho_n(z_f)$, f — *определяющая функция* V, *то* $G_k = \{'z \in \boldsymbol{C}^{n-1} : n_V('z) \leqslant k\}, k \geqslant -1$, *являются не только полярными, но и аналитическими множествами.*

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что $\{z \in \boldsymbol{C}^n : z_n = 0\} \not\subset V$.

а). Если $\rho_n(V) < 1$, то, по теореме 1, определяющая функция f множества V представляется в виде

$$f(z) = \psi(z) \exp g(z),$$

где ψ, g — целые функции, и в области $E_f\, \psi$ имеет вид

$$\psi(z) = f('z, 0) \prod_i \left(1 - \frac{z_n}{\alpha_i('z)}\right).$$

Отсюда, если $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k('z) z_n^k$ — разложение функции ψ в ряд Харторгса, то $G_k = \{'z \in \boldsymbol{C}^{n-1} : g_i('z) = 0, i = k+1, k+2\}$... Следовательно, в этом случае все G_k — аналитические множества.

б). В случае, когда $\rho_n(V) \geqslant 1$, рассмотрим голоморфное отображение $F : (z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n) \to (z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n^m)$, где $m > \rho_n(V)$, пространства $\boldsymbol{C}^n$ на себя. Покажем, что оно переводит V в V' — аналитическое множество в $\boldsymbol{C}^n$. Без ограничения общности предположим, что

$$\dim G_f = \dim \{'z \in \boldsymbol{C}^{n-1} : n_f('z) = -1\} \leqslant n - 3, \tag{16}$$

где f — определяющая функция множества V.

Если $n_f('z^\circ) \neq -1$ и $R > 0$ такое, что $f('z^\circ, z_n) \neq 0$ на $|z_n| = R$, то для некоторой окрестности $'U \ni 'z^\circ$ имеем

$$V \cap U = \left\{z \in U : \prod_{i=1}^{k} (z_n - \alpha_i('z)) = 0\right\}, \tag{17}$$

где $U = 'U\{|z_n| < R\}$, $k \geqslant 0$ и $\alpha_i('z)$ — нули (с учетом кратности) функции $f('z, z_n)$ переменного z_n при фиксированном $'z$. Следовательно,

$$V' \cap \tilde{U} = \left\{z \in \tilde{U} : \prod_{i=1}^{k} (z_n - \alpha_i^m('z)) = 0\right\}, \tag{18}$$

где

$$\widetilde{U} = 'U \times \{|z_n| < R^m\}.$$

Функция

$$\prod_{i=1}^{k} (z_n - \alpha_i^m('z)) = z_n^k + A_1('z)\, z_n^{k-1} + \ldots + A_k('z)$$

является голоморфной в $\widetilde{U}$, ибо коэффициенты A_i, $i = 1, \ldots, k$, как симметрические полиномы от нулей $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ являются голоморфными в $\widetilde{U}$ (см. Б. В. Шабат [11], доказательство подготовительной теоремы Вейерштрасса).

Отсюда видно, что $V' \diagup (G_f \times \boldsymbol{C})$ является аналитическим множеством. Так как $\dim (G_f \times \boldsymbol{C}) \leqslant n-2$, то V' является аналитическим множеством в $\boldsymbol{C}^n$.

Ясно, что $\rho_n(V') < 1$ и $G_k' = \{'z \in \boldsymbol{C}^{n-1} : n_{V'}('z) \leqslant k\} = G_k$. По доказанному в а), для любого k, $k \geqslant -1$ множество G_k', а значит, и G_k является аналитическим множеством в $\boldsymbol{C}^{n-1}$. Предложение доказано.

Замечание. Все результаты данной работы, за исключением теоремы 3, с соответствующими изменениями остаются в силе и в том случае, если вместо пространства $\boldsymbol{C}^n = \boldsymbol{C}^{n-1} \times \boldsymbol{C}$ рассматривается область $D = 'D \times \boldsymbol{C}$, где $'D \subset \boldsymbol{C}^{n-1}$ — область, в которой разрешима любая вторая проблема Кузена.

Выражаю благодарность Б. В. Шабату и Л. И. Ронкину за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lelong P. Fonctions entieres de type exponentiel dans C^n. — «Ann. Inst. Fourier» (Grenoble), 1966, t. 16, fasc. 2, p. 266—318.

2. Lelong P. Sur quelques problemes de la theorie des functions de deux Variables complexes. — «Ann. Scient. Ecote norm. Super.», 1941, t. 58, p. 83—176.

3. Lelong P. Sur l'extension aux fonctions entieres de variables d'ordre fini, d'un devoloppement canonique de Weierstrass. — «C. R. Acad. Sci. Paris», 1953, t. 234, p. 865—867.

4. Sire J. Sur les fonctions entieres de deux varia bles d'ordre apparent total fini. — «Rend. circolo mat. Palermo», 1911, t. 31, p. 1—91.

5. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.

6. Ронкин Л. И. О росте целых функций многих комплексных переменных. -«Мат. сб.», 1966, т. 71, (113), с. 337—356.

7. Садуллаев А. Критерии алгебраичности аналитических множеств. — «Функциональный анализ и его приложения», 1972, т. 6, вып. 1, с. 85—86.

8. Stoll W. Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen, —«Math. Z.», 1953, Bd 57, S. 211—237.

9. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука». 1970, 591 с.

10. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956. 632 с.

11. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М., «Наука», 1919. 576 с.

Поступила 3 июня 1972 г.