УДК 517.535.4

Е. Н. Сергиенко

О РОСТЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ СПЕЦИАЛЬНУЮ ОЦЕНКУ СНИЗУ

I. В 1960 г. В. И. Мацаев [1] доказал следующую теорему.

Теорема А. *Если целая функция $f(z)$ допускает оценку снизу*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \geqslant -C\frac{r^\alpha}{|\sin\varphi|^k}, \quad \alpha > 1, \ k \geqslant 0, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

то функция $f(z)$ не выше порядка α нормального типа.

В настоящей работе докажем теорему, являющуюся обобще нием теоремы В. И. Мацаева на мероморфные функции.

Будем пользоваться характеристиками Неванлинны функци $f(z)$, мероморфной в плоскости [2, с. 26]:

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi;$$

$$N(r, f) = \int\limits_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t}\, dt + n(0, f)\ln r,$$

где $n(t, f)$ — число полюсов функции $f(z)$ в круге $|z| \leqslant t$;

$$T(r, f) = T(r) = m(r, f) + N(r, f);$$

$$\delta(\infty, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, f)}{T(r, f)}. \qquad (1)$$

Величина $\delta(\infty, f)$ называется неванлинновским дефектом функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке. Заметим, что если $f(z)$ — целая функция, то $\delta(\infty, f) = 1$. Наше обобщение теоремы В. И. Мацаева формулируется так:

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, удовлетворяющая во всей плоскости неравенству*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \geqslant -C\frac{r^\alpha}{|\sin\varphi|^k}, \quad \alpha > 1, \ k \geqslant 0. \qquad (2)$$

Кроме того, предположим, что

$$\delta_0 = \delta(\infty, f) > 0. \qquad (3)$$

Тогда функция $f(z)$ не выше нормального типа порядка α.

Доказательство. Сделаем замену переменных

$$z = \zeta^{\frac{1}{\beta}} e^{i\frac{\psi}{2}},$$

где числа β и ψ выбраны следующим образом:

$$1 < \beta < \min(2, \alpha); \ 0 < \psi \leqslant \pi\left(1 - \frac{1}{\beta}\right),$$

а $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$. Тогда выполнено неравенство

$$0 < \frac{\psi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{\beta} + \frac{\psi}{2} < \pi - \frac{\psi}{2}. \qquad (4)$$

Положим

$$F_{\beta,\psi}(\zeta) = f\left(\zeta^{\frac{1}{\beta}} e^{i\frac{\psi}{2}}\right). \qquad (5)$$

Очевидно, функция $F_{\beta,\psi}(\zeta)$ мероморфна в замкнутой верхней полуплоскости и не имеет в ней нулей. Обозначим ее полюсы через ζ_n, считая их занумерованными в порядке возрастания

...дулей. В силу условий (2) и (4) функция $\ln|F_{\beta,\psi}(\zeta)|$ удовлетворяет следующей оценке снизу при $Im\,\zeta \geqslant 0$:

$$\ln|F_{\beta,\psi}(\zeta)| \geqslant -C_1 \frac{\rho^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^k}. \tag{6}$$

Применив формулу Грина для полукруга $\{|\zeta|<R,\ \mathrm{Im}\,\zeta>0\}$ функции $\ln|F_{\beta,\psi}(\zeta)|$, получим [3]

$$\ln|F_{\beta,\psi}(\zeta)| - \sum_{\substack{|\zeta_n|<R \\ \mathrm{Im}\,\zeta_n>0}} \ln\left|\frac{R^2-\overline{\xi}_n\zeta}{R^2-\xi_n\zeta}\,\frac{\zeta-\overline{\zeta}_n}{\zeta-\zeta_n}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \ln|F_{\beta,\psi}(t)|\left\{\frac{\rho\sin\vartheta}{|\zeta-t|^2} - \frac{R^2\rho\sin\vartheta}{|R^2-\zeta t|^2}\right\}dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \ln|F_{\beta,\psi}(Re^{i\theta})\left\{\frac{R^2-\rho^2}{|Re^{i\theta}-\zeta|^2} - \frac{R^2-\rho^2}{|Re^{-i\theta}-\zeta|^2}\right\}d\theta.$$

Представим функцию $\ln|F_{\beta,\psi}(\zeta)|$ в виде

$$\ln|F_{\beta,\psi}(\zeta)| = \ln^+|F_{\beta,\psi}(\zeta)| - \ln^-|F_{\beta,\psi}(\zeta)|.$$

олагая в формуле (7) $\zeta = i$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \ln^+|F_{\beta,\psi}(Re^{i\theta})|\left\{\frac{R^2-1}{|Re^{i\theta}-i|^2} - \frac{R^2-1}{|Re^{-i\theta}-i|^2}\right\}d\theta +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \ln^+|F_{\beta,\psi}(t)|\left\{\frac{1}{|i-t|^2} - \frac{R^2}{|R^2-it|^2}\right\}dt +$$

$$+ \sum_{\substack{|\zeta_n|<R \\ \mathrm{Im}\,\zeta_n>0}} \ln\left|\frac{R^2-i\overline{\zeta}_n}{R^2-i\zeta_n}\,\frac{i-\overline{\zeta}_n}{i-\zeta_n}\right| = \ln|F_{\beta,\psi}(i)| +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \ln^-|F_{\beta,\psi}(t)|\left\{\frac{1}{|i-t|^2} - \frac{R^2}{|R^2-it|^2}\right\}dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \ln^-|F_{\beta,\psi}(Re^{i\theta})|\left\{\frac{R^2-1}{|Re^{i\theta}-i|^2} - \frac{R^2-1}{|Re^{-i\theta}-i|^2}\right\}d\theta. \tag{8}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $0<|f(z)|<\infty$ при $|z|\leqslant 1$. Поэтому величину $\ln|F_{\beta,\psi}(\zeta)|$ можно считать равномерно ограниченной при $|\zeta|\leqslant 1$ по β, ψ.

Воспользуемся следующими оценками подынтегральных ядер:

$$\frac{1}{2(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1+t^2} - \frac{R^2}{R^4+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2},\ R>2 \tag{9}$$

(левое неравенство верно при $|t| \leqslant \frac{R}{2}$, а правое — для всех t)

$$\frac{2\sin\theta}{R} \leqslant \frac{R^2-1}{|Re^{i\theta}-i|^2} - \frac{R^2-1}{|Re^{-i\theta}-i|^2} \leqslant \frac{8\sin\theta}{R},\ R>3. \qquad (10)$$

Использовав соотношения (6), (9) и (10) для оценки правой части в равенстве (8), получим при $R>3$ неравенства

$$\int_{-R}^{R} \ln^+|F_{\beta,\psi}(t)|\frac{dt}{1+t^2} \leqslant C_2\frac{R^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^k}, \qquad (11)$$

$$\int_0^{\pi} \ln^+|F_{\beta,\psi}(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta \leqslant C_2\frac{R^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^k}, \qquad (12)$$

$$\sum_{\substack{|\zeta_n|<R\\ \operatorname{Im}\zeta_n>0}} \ln\left|\frac{R^2-i\bar\zeta_n}{R^2-i\zeta_n}\,\frac{i-\bar\zeta_n}{i-\zeta_n}\right| \leqslant C_2\frac{R^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^k}.$$

Легко показать, что при $|\zeta_n| \leqslant \frac{R}{2}$

$$\ln\left|\frac{R^2-i\bar\zeta_n}{R^2-i\zeta_n}\,\frac{i-\bar\zeta_n}{i-\zeta_n}\right| \geqslant C_3\frac{\operatorname{Im}\zeta_n}{1+|\zeta_n|^2},$$

поэтому

$$\sum_{\substack{|\zeta_n|<R\\ \operatorname{Im}\zeta_n>0}} \frac{\operatorname{Im}\zeta_n}{1+|\zeta_n|^2} \leqslant C_4\frac{R^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^k}. \qquad (13)$$

Положим в формуле (7) $R \geqslant 2\rho$, $\rho>3$. Используя оценки [1]

$$\frac{\rho\sin\vartheta}{\rho^2+t^2-2\rho t\cos\vartheta} \leqslant \begin{cases} \dfrac{\rho}{t^2\sin\vartheta}, & |t|\geqslant 1,\\[2mm] \dfrac{4\sin\vartheta}{\rho}, & |t|<1,\end{cases}$$

$$\frac{R^2-\rho^2}{|Re^{i\theta}-\zeta|^2} - \frac{R^2-\rho^2}{|Re^{-i\theta}-\zeta|^2} \leqslant 24\sin\theta,\quad R\geqslant 2\rho,\ \rho>3.$$

а также неотрицательность подынтегральных ядер, получим из (7) следующее соотношение:

$$\ln|F_{\beta,\psi}(\zeta)| \leqslant \sum_{\substack{|\zeta_n|<R\\ \operatorname{Im}\zeta_n>0}} \ln\left|\frac{R^2-\bar\zeta_n\zeta}{R^2-\zeta_n\zeta}\,\frac{\zeta-\bar\zeta_n}{\zeta-\zeta_n}\right| +$$

$$+\frac{12}{\pi}\int_0^{\pi}\ln^+|F_{\beta,\psi}(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta+\frac{4\sin\vartheta}{\pi\rho}\int_{-1}^{1}\ln^+|F_{\beta,\psi}(t)|\,dt+$$

$$+\frac{2\rho}{\pi\sin\vartheta}\int_1^R\{\ln^+|F_{\beta,\psi}(t)|+\ln^+|F_{\beta,\psi}(-t)|\}\frac{dt}{1+t^2} \qquad (14)$$

при $R\geqslant 2\rho$.

Используем неравенство

$$\ln\left|\frac{R^2-\bar{\zeta}_n\zeta}{R^2-\zeta_n\zeta}\,\frac{\zeta-\bar{\zeta}_n}{\zeta-\zeta_n}\right|\leqslant\ln\left|\frac{\zeta-\bar{\zeta}_n}{\zeta-\zeta_n}\right|$$

и соотношения (11), (12) для оценки правой части в (14); получим

$$\ln|F_{\beta,\psi}(\zeta)|\leqslant\sum_{\substack{|\zeta_n|<R\\ \operatorname{Im}\zeta_n>0}}\ln\left|\frac{\zeta-\bar{\zeta}_n}{\zeta-\zeta_n}\right|+\frac{C_5R^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^k\sin\vartheta}. \qquad (15)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$u(\zeta)=u(\rho e^{i\vartheta})=\sum_{\substack{|\zeta_n|<R\\ \operatorname{Im}\zeta_n>0}}\ln\left|\frac{\zeta-\bar{\zeta}_n}{\zeta-\zeta_n}\right|.$$

Эту функцию можно представить в виде

$$u(\zeta)=\iint_{\Pi}K(\zeta,z)\,d\nu(z), \qquad (16)$$

где $\nu(E)$ — мера Лебега — Стильтьеса, определенная на борелевских множествах E, содержащихся в полуплоскости $\Pi=\{\operatorname{Im}z\geqslant 0\}$, формулой

$$\nu(E)=2\sum_{\substack{\zeta_n\in E\\ |\zeta_n|<R}}\frac{\operatorname{Im}\zeta_n}{1+|\zeta_n|^2}, \qquad (17)$$

$$K(\zeta,z)=\frac{1+|z|^2}{2y}\ln\left|\frac{\zeta-\bar{z}}{\zeta-z}\right|,\ y>0.$$

В [2, с. 386] доказана теорема об оценке функции $u(\zeta)$, представимой в виде (16). Мы воспользуемся таким следствием этой теоремы [2, с. 394]: неравенство

$$u(\rho e^{i\vartheta})\leqslant\left(\frac{D}{q}+18\right)\nu(\Pi)\,\rho,\ 0<\vartheta<\pi, \qquad (18)$$

где D — абсолютная постоянная, выполняется для всех $\rho\geqslant 1$, исключая, возможно, некоторое открытое множество $A_q\subset[1,\infty)$ такое, что

$$\int_{A_q}d(\ln\rho)<q.$$

В дальнейшем будем считать $q < 1$. В силу соотношений (17) и (13) имеем

$$\nu(\mathrm{II}) \leqslant C_6 \frac{R^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^k}. \tag{19}$$

Так как $q < 1$, а $\rho \leqslant \frac{R}{2}$, то в силу (18) и (19)

$$u(\rho e^{i\vartheta}) \leqslant C_6\left(\frac{D}{q} + 18\right)\rho\frac{R^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^k} \leqslant \frac{C_7}{q}\frac{R^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^k}$$

при $\rho \leqslant \frac{R}{2}$, $\rho \overline{\in} A_{q,\psi}$.

После этого неравенство (15) можно переписать следующим образом:

$$\ln|F_{\beta,\psi}(\zeta)| \leqslant \frac{C_8}{q}\frac{R^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^k \sin\vartheta}, \quad \rho \leqslant \frac{R}{2}, \quad \rho \overline{\in} A_{q,\psi}. \tag{20}$$

Положим

$$\zeta = r^\beta e^{i\lambda\beta\frac{\psi}{2}},$$

где

$$1 \leqslant \lambda \leqslant \frac{\pi}{\psi} - 1.$$

Тогда в силу соотношений (5) и (20) получим

$$\ln\left|f\left(re^{i\frac{\psi}{2}(\lambda+1)}\right)\right| = \ln|F_{\beta,\psi}(\zeta)| \leqslant \frac{C_8}{q}\frac{R^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^k \sin\frac{\lambda\beta\psi}{2}}$$

$$\text{при } \rho = r^\beta \leqslant \frac{R}{2}, \text{ или } r \leqslant \left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \ r \overline{\in} A'_{q,\psi},$$

$$\int\limits_{A'_{q,\psi}} d(\ln r) < \frac{q}{\beta} < q.$$

В силу выбора λ имеем

$$\psi \leqslant \frac{\psi}{2}(\lambda+1) \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\psi}{2} < \lambda\beta\frac{\psi}{2} \leqslant \pi - \psi.$$

Будем в дальнейшем вместо $\left(\frac{R}{2}\right)^{1/\beta}$ писать просто R, а вместо $A'_{q,\psi}$ будем писать $A_{q,\psi}$.

Тогда при $\psi \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $r \leqslant R$, $r \overline{\in} A_{q,\psi}$ выполнено неравенство

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{C_9}{q} \frac{R^\alpha}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^{k+1}}.$$

Аналогичное неравенство (но с другим исключительным мно-жеством $A^{(1)}_{q,\psi}$) можно доказать в секторе $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi - \psi$. Тогда в секторе $\psi \leqslant \varphi \leqslant \pi - \psi$, $r \leqslant R$ при

$$r \overline{\in} A_{q,\psi} \cup A^{(1)}_{q,\psi}, \qquad \int\limits_{A_{q,\psi} \cup A^{(1)}_{q,\psi}} d(\ln r) < 2q$$

выполнено неравенство

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{C_{10}}{q} \frac{R^\alpha}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|^{k+1}}.$$

Выберем последовательность $\psi_n \downarrow 0$, удовлетворяющую условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\psi_n < \frac{p}{4}, \quad 0 < p < \frac{1}{2}, \tag{21}$$

$$0 < k_2 \leqslant \frac{\sin\psi_n}{\sin\psi_{n+1}} \leqslant k_1 < \infty. \tag{22}$$

Положим $\psi = \psi_n$, $q = \sin\psi_n$, тогда в секторе $r \leqslant R$, $\psi_n \leqslant \varphi \leqslant \pi - \psi_n$ при $r \overline{\in} A_{\psi_n}$ выполнено

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant C_{10} \frac{R^\alpha}{|\sin\psi_n|^{k+2}}.$$

Но в секторах $\psi_{n+1} \leqslant \varphi \leqslant \psi_n$, $\pi - \psi_n \leqslant \varphi \leqslant \pi - \psi_{n+1}$ при $r \leqslant R$, $r \overline{\in} A_{\psi_{n+1}}$ выполнено неравенство

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant C_{10} \frac{R^\alpha}{|\sin\psi_{n+1}|^{k+2}}.$$

В силу условия (22) из этого неравенства следует, что

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant C_{10} k_1^{k+2} \frac{R^\alpha}{|\sin\varphi|^{k+2}}$$

при $\psi_{n+1} \leqslant \varphi \leqslant \psi_n$, $\pi - \psi_n \leqslant \varphi \leqslant \pi - \psi_{n+1}$;

$$r \leqslant R, \; r \overline{\in} A_{\psi_{n+1}}.$$

Таким образом, используя условие (21), получаем, что неравенство

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant C_{11} \frac{R^\alpha}{|\sin\varphi|^{k+2}}$$

выполнено при $r \leqslant R,\ r \bar{\in} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\psi_n} = A_R,\ 0 < \varphi < \pi$. причем

$$\int_{A_R} d(\ln r) < \frac{p}{2}.$$

Аналогичное неравенство получается при $\pi < \varphi < 2\pi$. Окончательно имеем

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant C_{12}\frac{r^{\alpha}}{|\sin\varphi|^{k+2}} \qquad (23)$$

при

$$\frac{R}{e^2} \leqslant r \leqslant R,\ r \bar{\in} A_R,\ \int_{A_R} d(\ln r) < p,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Пусть $R_m = e^{2m},\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Положим

$$A_m = A_{R_m} \cap [e^{2m-2},\ e^{2m}];\quad A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

Тогда при $r \bar{\in} A$ в силу (23) имеем

$$\ln^+|f(re^{i\varphi})| \leqslant C_{12}\frac{r^{\alpha}}{|\sin\varphi|^{k+2}}. \qquad (24)$$

Заметим, что

$$\operatorname{mes} A_m = \int_{A_m} \mathrm{dr} \leqslant e^{2m}\int_{A_m} d(\ln r) < pe^{2m} = p\,\frac{e^{2m} - e^{2m-2}}{1 - e^{-2}},$$

поэтому

$$m^*(A) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\operatorname{mes}\{A \cap [0,\ r]\}}{r} < \frac{p}{1 - e^{-2}} < 2p < 1. \qquad (25)$$

Оценим величину $m(r,\ f)$. Имеем, считая $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$,

$$m(r,\ f) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}\right\}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{\delta}^{\pi-\delta} + \int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta}\right\}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi. \qquad (26)$$

Для оценки двух последних интегралов в (26) воспользуемся соотношением (24). При $r \bar{\in} A$ имеем

$$m(r,\ f) \leqslant \frac{C_{13}r^{\alpha}}{(\sin\delta)^{k+2}} + \left\{\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}\right\}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi. \qquad (27)$$

Для оценки интегралов в (27) нам потребуется одна из теорем Эдрея и Фукса [4] (см. также [2, с. 58]). Пусть $\varphi(z)$ — мероморфная функция; l и δ — некоторые числа, $l > 1,\ 0 < \delta < \pi$;

1. Существует такая постоянная $C(l, \delta)$, что для любого измеримого множества $E_r \subset [-\pi, \pi]$, $\operatorname{mes} E_r = \delta$, выполняется

$$\int_{E_r} \ln^+ |\varphi(re^{i\theta})| \, d\theta \leqslant C(l, \delta) T(lr, \varphi),$$

где $C(l, \delta) = \frac{6l}{l-1} \delta \ln \frac{2\pi e}{\delta} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Применяя эту теорему к функции $f(z)$, получаем из (27), считая $r \overline{\in} A$,

$$m(r, f) \leqslant C_{14} \frac{r^{\alpha}}{\delta^{k+2}} + C(l, \delta) T(lr, f). \tag{28}$$

По условию теоремы, при всех $r \geqslant r_0$ имеем

$$m(r, f) \geqslant \frac{\delta_0}{2} T(r, f),$$

поэтому из (28) следует при $r \geqslant r_0$, $r \overline{\in} A$,

$$T(r, f) \leqslant C_{15} \left\{ \frac{r^{\alpha}}{\delta^{k+2}} + C(l, \delta) T(lr, f) \right\}. \tag{29}$$

Положим

$$\delta = \delta(r) = [T(r)]^{-\frac{\varepsilon}{m}}; \quad (m = k + 2),$$

$$l = l(r) = 1 + \frac{1}{\ln T(r)}.$$

Тогда из (29) при $r \geqslant r_0$, $r \overline{\in} A$, получим

$$T(r) \leqslant C_{15} \left\{ r^{\alpha} [T(r)]^{\varepsilon} + C(l, \delta) T\left[r + \frac{r}{\ln T(r)}\right] \right\}.$$

Используя выражение для $C(l, \delta)$, получаем отсюда

$$T(r) \leqslant C_{15} \left\{ r^{\alpha} [T(r)]^{\varepsilon} + [T(r)]^{-\frac{\varepsilon}{m}} T\left[r + \frac{r}{\ln T(r)}\right] \ln^2 T(r) \right\}. \tag{30}$$

Согласно лемме Бореля—Неванлинны [2, с. 121], для всех $r \geqslant r_1 \geqslant r_0$, исключая, возможно, множество B_η конечной логарифмической длины, выполнено неравенство

$$T\left[r + \frac{r}{\ln T(r)}\right] \leqslant [T(r)]^{1+\eta}.$$

Поэтому для $r \geqslant r_1$ при $r \overline{\in} A_\eta = A \cup B_\eta$, $m^*(A_\eta) < 1$, имеем из (30)

$$T(r) \leqslant C_{15} \{ r^{\alpha} [T(r)]^{\varepsilon} + [T(r)]^{1+\eta-\frac{\varepsilon}{m}} \ln^2 T(r) \}. \tag{31}$$

Очевидно, что

$$\ln^2 T(r) \leqslant [T(r)]^{\frac{\varepsilon}{2m}}, \quad r \geqslant r_2 \geqslant r_1.$$

Тогда из (31) получаем, что неравенство

$$T(r) \leqslant C_{15}\left\{r^{\alpha}[T(r)]^{\varepsilon} + [T(r)]^{1+\eta-\frac{\varepsilon}{2m}}\right\} \tag{32}$$

выполнено для $r \geqslant r_2$, $r \bar{\in} A_\eta$. Будем считать, что $0 < \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{4m}$, а число η выбрано так: $0 < \eta < \frac{\varepsilon}{4m}$. Следовательно, из (3 для $r \geqslant r_2$, $r \bar{\in} A_\eta$, имеем

$$T(r) \leqslant C_{15} r^{\alpha}[T(r)]^{1-\frac{\varepsilon}{4m}}.$$

Поэтому при $r \geqslant r_2$, $r \bar{\in} A_\eta$,

$$T(r) \leqslant C_{16} r^{\frac{4m\alpha}{\varepsilon}}. \tag{33}$$

Воспользуемся теперь следующей леммой [2, с. 360]. Пусть $u(r)$ и $v(r)$ — две неубывающие функции и для всех $r \geqslant 0$, исключая, возможно, множество A, $m^*(A) < 1$, выполняется $u(r) \leqslant v(r)$. Тогда для всех достаточно больших r выполняется

$$u(r) \leqslant v(Kr), \quad 1 < K < \infty.$$

Согласно этой лемме, из (25) и (33) следует, что

$$T(r) \leqslant C_{17} r^{\frac{4m\alpha}{\varepsilon}}, \quad r > 1,$$

так что функция $f(z)$ во всяком случае имеет конечный порядок роста.

Покажем теперь, что функция $f(z)$ не выше нормального типа порядка α. Предположим противное, т. е. что характеристика $T(r, f)$ не ниже максимального типа порядка α.

Зафиксируем в (29) величину $l > 1$. Используя выражение для $C(l, \delta)$, получим из (29)

$$T(r) \leqslant C_{18}\left\{\frac{r^{\alpha}}{\delta^{m}} + \delta^{1-\gamma} T(lr)\right\}, \quad 0 < \gamma < 1, \tag{34}$$

при $r \geqslant r_0$, $r \bar{\in} A$.

Найдя минимум правой части по δ, имеем из (34)

$$T(r) \leqslant 2C_{18} r^{\alpha\frac{1-\gamma}{m+1-\gamma}}[T(lr)]^{\frac{m}{m+1-\gamma}},$$

$r \bar{\in} A$, $r \geqslant r_0$.

Обозначив

$$\gamma_1 = \frac{1-\gamma}{m+1-\gamma}, \quad 0 < \gamma_1 < \frac{1}{2},$$

получим отсюда

$$T(r) \leqslant 2C_{18} r^{\alpha\gamma_1}[T(lr)]^{1-\gamma_1}$$

при $r \geqslant r_0$, $r \bar{\in} A$, $m^*(A) < 1$.

Воспользовавшись еще раз леммой [2, с. 3^0], получим, что неравенство

$$T(r) \leqslant C_{19} r^{\alpha\gamma_1} [T(Lr)]^{1-\gamma_1}, \quad L > 1,$$

выполнено для всех $r > 1$, поэтому при $r > 1$

$$T(Lr) \geqslant C_{20} \left\{\frac{T(r)}{r^{\alpha\gamma_1}}\right\}^{\frac{1}{1-\gamma_1}}.$$

Эбозначив

$$\gamma_2 = \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}, \quad 0 < \gamma_2 < 1,$$

получим при $r > 1$

$$T(Lr) \geqslant C_{20} \frac{[T(r)]^{1+\gamma_2}}{r^{\alpha\gamma_2}} = T(r) \left\{C_{21} \frac{T(r)}{r^{\alpha}}\right\}^{\gamma_2}.$$

По предположению, величина $T(r)$ не ниже максимального типа порядка α. Поэтому существует число $r_3 > 1$, такое, что

$$\left\{C_{21} \frac{T(r_3)}{r_3^{\alpha}}\right\}^{\gamma_2} > M,$$

где $M > L^{\alpha}$ — некоторое число.

Тогда из 35) имеем

$$T(L^n r_3) \geqslant M^n T(r_3). \tag{36}$$

Пусть $r > r_3$; положим в (36)

$$n = \left[\frac{\ln r - \ln r_3}{\ln L}\right],$$

тогда из (36) имеем

$$T(r) \geqslant T(r_3) \frac{1}{M} \left(\frac{r}{r_3}\right)^{\frac{\ln M}{\ln L}}. \tag{37}$$

Число M, очевидно, можно выбрать сколь угодно большим. Поэтому из (37) следует, что величина $T(r)$ имеет бесконечный нижний порядок роста. Но уже доказано, что функция $T(r)$ имеет конечный порядок роста, и мы пришли к противоречию.

Следовательно, функция $f(z)$ не выше нормального типа порядка α. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы 2 удобно пользоваться таким следствием теоремы 1:

Следствие 1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция и для всех $r > 0$, кроме $r \in A$, $m^*(A) < 1$, выполнено неравенство*

$$T(r) \leqslant C \left\{\frac{r^{\nu}}{\delta^m} + C(l, \delta)\, T(lr)\right\}, \quad \nu > 0, \quad m \geqslant 2.$$

Тогда рост функции $f(z)$ не выше нормального типа порядка ν.

Теорема 2. *Пусть мероморфная функция $f(z)$ удовлетворяет условию* (2) *теоремы* 1 *и значение $z=\infty$ является борелевским исключительным значением функции $f(z)$. Тогда*

$$T(r) \leqslant C(r^\alpha + 1).$$

Доказательство. Заметим сначала, что для мероморфных функций борелевское исключительное значение, вообще говоря, не является неванлинновским исключительным значением и наоборот (см., например, [2, гл. IV]). Поэтому доказываемая теорема не является следствием теоремы 1.

Перейдем к доказательству теоремы. Покажем вначале, что функция $f(z)$ имеет конечный порядок роста.

Неравенство (28) мы получили, пользуясь только условием (2). Поэтому и в нашем случае неравенство

$$m(r, f) \leqslant C_{22}\frac{r^\alpha}{\delta^m} + C(l, \delta)\,T(lr) \tag{38}$$

выполнено при $r \overline{\in} A$, $m^*(A) < 1$. Прибавим к обеим частям (38) величину $N(r, f)$; получим

$$T(r) \leqslant C_{22}\frac{r^\alpha}{\delta^m} + C(l, \delta)\,T(lr) + N(r, f). \tag{39}$$

Так как категория $N(r, f)$ меньше категории $T(r)$, то порядок величины $N(r, f)$ во всяком случае конечен. Поэтому существует число $\mu > 0$ такое, что для всех $r > 1$

$$N(r, f) < C_{23}r^\mu.$$

Тогда из (39) получаем при $r \overline{\in} A$, $r > 1$,

$$T(r) \leqslant C_{24}\left\{\frac{r^\nu}{\delta^m} + C(l, \delta)\,T(lr)\right\}, \quad \nu = \max\{\mu, \alpha\}.$$

Применяя следствие 1, получаем, что функция $T(r)$ имеет конечный порядок роста.

Покажем теперь, что этот порядок не может быть больше α. Предположим противное. Пусть порядок $T(r)$ равен β, $\beta > \alpha$.

Зафиксируем в (39) число l и используем выражение для $C(l, \delta)$; имеем при $r \overline{\in} A$

$$T(r) \leqslant C_{25}\left\{\frac{r^\alpha}{\delta^m} + \delta^{1-\gamma}T(lr)\right\} + N(r, f), \quad 0 < \gamma < 1.$$

Найдя минимум правой части по δ и используя еще раз лемму [2, с. 360], получим, что неравенство

$$T(r) \leqslant C_{26}r^{\alpha\gamma_1}[T(Lr)]^{1-\gamma_1} + N(Lr, f), \quad L > 1 \tag{40}$$

выполнено при $r > 1$.

Предположим, что функция $T(r)$ — максимального типа порядка β. Тогда имеем

$$T(r) \leqslant C_{27}r^{\beta+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad r > 1;$$
$$N(r, f) \leqslant C_{27}r^\beta, \quad r > 1.$$

Поэтому из (40) следует

$$T(r) \leqslant C_{28}\{r^{\alpha\gamma_1+(\beta+\varepsilon)(1-\gamma_1)} + r^{\beta}\}, \quad r > 1.$$

Так как число ε может быть выбрано сколь угодно малым, то отсюда получаем, что функция $T(r)$ не выше нормального типа порядка β.

Аналогично получаем противоречие, предполагая, что функция $T(r)$ — нормального или минимального типа порядка β.

Следовательно, порядок функции $T(r)$ равен α. Но тогда имеем

$$N(r, f) \leqslant C_{29} r^{\alpha},$$

и из (39) получаем, что при $r \bar{\in} A$ выполнено

$$T(r) \leqslant C_{30}\left\{\frac{r^{\alpha}}{\delta^m} + C(l, \delta)\, T(lr)\right\}.$$

Применяя еще раз следствие 1, получаем утверждение теоремы 2.

II. В. И. Мацаевым [5] получен следующий результат, дополняющий теорему A и важный для теории операторов.

Теорема B. *Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет во всей плоскости неравенству*

$$\ln|f(z)| \geqslant -C\left(\frac{r}{|\sin\varphi|}\right)^{\rho}, \quad 0 < \rho < 1, \quad z = re^{i\varphi},$$

то функция $f(z)$ не выше экспоненциального типа и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\ln|f(t)||\frac{dt}{1+t_2} < \infty. \tag{B}$$

Хорошо известно [6], что целые функции экспоненциального типа, удовлетворяющие условию (B), обладают свойством: существует предел

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\bar{\in} A}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r} = \begin{cases} K_1 \sin\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ K_2 \sin\varphi, & \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Множество $A \subset [1, \infty)$ является множеством нулевой относительной меры, т. е.

$$m^*(A) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\{A \cap [0, r]\}}{r} = 0.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, удовлетворяющая во всей плоскости неравенству*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \geqslant -C\left(\frac{r}{|\sin\varphi|}\right)^{\rho}, \quad 0 < \rho < 1. \tag{41}$$

Пусть, кроме того,

$$\delta_0 = \delta(\infty, f) > 0. \tag{42}$$

Тогда функция $f(z)$ не выше экспоненциального типа (т. е. $T(r, f) = O(r)$);

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ln|f(t)|| \frac{dt}{1+t^2} < \infty \tag{43}$$

и существует предел

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ \bar{r\in A}}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r} = \begin{cases} K_3 \sin\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ K_4 \sin\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases} \tag{44}$$

где

$$A \subset [1, \infty), \quad m^*(A) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\varphi_{1,2}(w) = w \pm e^{i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}(w+i)^\alpha. \tag{45}$$

Легко показать, что при $0 < \alpha < 1$ функции $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$ однолистны в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$.

Обозначим области, в которые переводят верхнюю полуплоскость функции $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$, через D_1 и D_2, их границы — через Γ_1 и Γ_2. Можно показать, что область D_1 лежит строго внутри верхней полуплоскости, т. е. $\operatorname{Im}\varphi_1(w) > 0$, а область D_2 объемлет верхнюю полуплоскость.

Введем в рассмотрение функции

$$F_1(w) = f[\varphi_1(w)], \tag{46}$$

$$F_2(w) = f[\varphi_2(w)], \tag{47}$$

при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$. Легко показать, что при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ функции $F_1(w)$ и $F_2(w)$ мероморфны; кроме того, они допускают следующие асимптотические оценки снизу:

$$\ln|F_1(w)| \geqslant -C_1|w|^{(2-\alpha)\rho}, \quad \operatorname{Im} w \geqslant 0; \tag{48}$$

$$\ln|F_2(u)| \geqslant -C_1|u|^{(2-\alpha)\rho}, \quad u = \operatorname{Re} w. \tag{49}$$

Лемма 1. *Функция $f(z)$ не выше экспоненциального типа (т. е. $T(r) = O(r)$).*

Доказательство леммы 1. Пусть число $\alpha > 0$ удовлетворяет неравенству $2 - \frac{1}{\rho} < \alpha < 1$, что возможно, так как $\rho < 1$. Тогда $(2-\alpha)\rho < 1$. Так как $\operatorname{Im}\varphi_1(w) > 0$ при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$, то функция $F_1(w)$ не имеет нулей в замкнутой верхней полуплоскости. Поэтому функция $\frac{1}{F_1(w)}$ аналитична при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ и, как следует из (48), удовлетворяет оценке

$$\ln\frac{1}{|F_1(w)|} \leqslant C_1|w|^{(2-\alpha)\rho}, \quad (2-\alpha)\rho < 1. \tag{50}$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln^+ \frac{1}{|F_1(t)|} \frac{dt}{1+t^2} < \infty. \tag{51}$$

Далее нам потребуются характеристики Неванлинны функции $F(z)$, мероморфной в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ [2, с. 38]. Положим

$$A(r, F) = \frac{1}{\pi}\int_{1}^{r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\{\ln^+|F(t)| + \ln^+|F(-t)|\}\,dt; \qquad (52)$$

$$B(r, F) = \frac{2}{\pi r}\int_{0}^{\pi} \ln^+|F(re^{i\varphi})|\sin\varphi d\varphi; \qquad (53)$$

$$C(r, F) = 2\sum_{0<\rho_n<r}\left(\frac{1}{\rho_n} - \frac{\rho_n}{r^2}\right)\sin\psi_n, \qquad (54)$$

где $\rho_n e^{i\psi_n}$ — полюсы функции $F(z)$.

Аналогом характеристики $T(r)$ является величина

$$S(r, F) = A(r, F) + B(r, F) + C(r, F). \qquad (55)$$

В силу аналитичности функции $\frac{1}{F_1(w)}$ величина $C\left(r, \frac{1}{F_1}\right) \equiv 0$. Используя соотношения (50) и (51), легко показать, что $A\left(r, \frac{1}{F_1}\right) = O(1)$ и $B\left(r, \frac{1}{F_1}\right) = O(1)$. Поэтому характеристика $S\left(r, \frac{1}{F_1}\right) = O(1)$.

В [2, с. 382] показано, что мероморфная в полуплоскости функция с ограниченной характеристикой $S(r)$ допускает следующее представление в открытой верхней полуплоскости $w = \rho e^{i\vartheta}$:

$$\ln\frac{1}{|F_1(w)|} = \frac{v}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{1}{|F_1(t)|}\,\frac{dt}{t^2+\rho^2-2t\rho\cos\vartheta} -$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\ln\left|\frac{w-\bar{a}_m}{w-a_m}\right| + \eta v, \qquad (56)$$

где a_m — нули функции $\frac{1}{F_1(w)}$, занумерованные в порядке возрастания модулей; η — не зависящая от w постоянная.

Там же [2, с. 386] показано, что для функции

$$u(w) = \frac{v}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{1}{|F_1(t)|}\,\frac{dt}{t^2+\rho^2-2t\rho\cos\vartheta} - \sum_{m=1}^{\infty}\ln\left|\frac{w-\bar{a}_m}{w-a_m}\right|$$

равномерно относительно ϑ, $0 < \vartheta < \pi$, выполняется

$$u(w) = o(\rho) \qquad (57)$$

при $\rho \to \infty$, $\rho \in A \subset [1, \infty)$, причем $\int_A d(\ln\rho) < \infty$.

Очевидно, из (56) и (57) следует, что при $0 < \vartheta < \pi$, $\rho \overline{\in} A$, выполнено неравенство

$$|\ln|F_1(w)|| = \left|\ln \frac{1}{|F_1(w)|}\right| \leqslant C_2|w|.$$

Легко показать, что при $z \in D_1$, $r \overline{\in} B$, причем $\int\limits_B d(\ln r) < \infty$, выполнено следующее неравенство:

$$|\ln|f(z)|| \leqslant C_8|z|. \tag{58}$$

Обозначим дугу окружности радиуса r с центром в начале координат, лежащую в области D_1, через $L^+(r)$, симметричную с ней относительно вещественной оси дугу той же окружности — через $L^-(r)$, оставшуюся часть окружности — через $L(r)$. При $r \overline{\in} B$ имеем

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L(r)} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L^+(r)} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L^-(r)} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant C_4 r + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L(r)} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi. \tag{59}$$

Угловая мера $\delta(r)$ дуги $L(r)$, как легко показать, имеет порядок $r^{\alpha-1}$ при $r \to \infty$. Используя одну из теорем Эдрея и Фукса [4] (см. также [2, с. 58]), получим при $r \overline{\in} B$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L(r)} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi \leqslant C(k, \delta)\,T(kr), \tag{60}$$

где

$$C(k, \delta) = \frac{6k}{k-1}\delta \ln\frac{2\pi e}{\delta};\ k > 1, \quad \delta = \delta(r).$$

Согласно теореме 1, $T(kr) < C_5(\varepsilon)\,r^{1+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. Выбрав $\varepsilon < 1-\alpha$, получим из (59) и (60) при $r \overline{\in} B$

$$m(r, f) \leqslant C_6 r. \tag{61}$$

По условию $\delta_0 = \delta(\infty, f) > 0$, поэтому

$$T(r) \leqslant \frac{2}{\delta_0} m(r, f), \quad r \geqslant r_0,$$

а из (61) следует, что

$$T(r) \leqslant C_7 r, \quad r \overline{\in} B, \quad r \geqslant r_0.$$

Так как B — множество конечной логарифмической длины, то

$$T(r) \leqslant C_8 r \tag{62}$$

для всех $r > 1$.

Лемма 2. Существует последовательность $R_k \to \infty$ такая, что

$$\ln|f(R_k e^{i\theta})| \geqslant -C_9 R_k \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Доказательство леммы 2. Воспользуемся следующей теоремой Неванлинны [7] (см. также [2, с. 55]). Пусть $\varphi(z)$ — мероморфная функция, l — некоторое число, $l > 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{1}{r}\int_0^r \ln^+ M(t, \varphi)\,dt \leqslant C(l)\,T(lr, \varphi), \tag{63}$$

где постоянная $C(l)$ зависит только от l.

Из (63) следует, что существует последовательность $R_k \to \infty$ такая, что

$$\ln M(R_k, \varphi) < 2C(l)\,T(2lR_k, \varphi).$$

Возьмем в качестве $\varphi(z)$ функцию $\frac{1}{f(z)}$; тогда, учитывая (62), получим

$$\ln|f(R_k e^{i\theta})| \geqslant -C_9 R_k, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для корней b_k функции $F_2^{\cdot}(w)$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} b_k}{1 + |b_k|^2}.$$

Доказательство. Очевидно, $b_k = \psi_2(a_k)$, где a_k — корни функции $f(z)$, а $w = \psi_2(z)$ — функция, обратная к функции $z = \varphi_2(w)$. Из определения функции $\varphi_2(w)$ следует, что

$$w = z + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}(w + i)^{\alpha} = z + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)} w^{\alpha}[1 + o(1)],$$

а так как $w(z) = z + o(z)$, то

$$\psi_2(z) = z + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)} z^{\alpha}[1 + o(1)] = z + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)} z^{\alpha} + o(z^{\alpha}).$$

Поэтому

$$b_k = \psi_2(a_k) = a_k + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)} a_k^{\alpha} + o(a_k^{\alpha}),$$

а отсюда имеем

$$b_k^2 = |a_k|^2[1 + o(1)], \tag{64}$$

$$\operatorname{Im} b_k = |a_k|^{\alpha}\left[\cos\frac{\pi\alpha}{2} + o(1)\right]. \tag{65}$$

Используя (64), (65) и лемму 1, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} b_k}{1+|b_k|^2} \leqslant C_{10} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{2-\alpha}} =$$

$$= C_{10} \int_1^{\infty} \frac{dn(t, 0)}{t^{2-\alpha}} = C_{11} \int_1^{\infty} \frac{n(t, 0)}{t^{3-\alpha}} dt < \infty,$$

так как $\alpha < 1$, $n(t, 0) \leqslant T(2t, f) < C_{12}t$.

Продолжим доказательство теоремы 1. Пусть G — область в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$, граница которой состоит из простой жордановой кривой C с концами t_1 и t_2 на вещественной оси и соединяющего их отрезка вещественной оси. Пусть $G_1 \subset G \subset G_2$, где G_1 и G_2 — полукруги с центром в нуле радиусов R_1 и R_2 ($R_2 > R_1 > 2$) соответственно, ограниченные полуокружностями C_1, C_2 и вещественной осью. Пусть $\omega(w, \gamma)$, $\omega_1(w, \gamma)$, $\omega_2(w, \gamma)$, $\omega_0(w, \gamma)$ — гармонические меры дуги γ осносительно областей G, G_1, G_2 и полуплоскости; $g(w_1, w_2)$, $g_1(w_1, w_2)$, $g_2(w_1, w_2)$, $g_0(w_1, w_2)$ — соответствующие функции Грина. Через Δ обозначим отрезок вещественной оси.

Приведем без доказательства следующие утверждения, принадлежащие В. И. Мацаеву [8]:

$$\omega(i, C) < \omega_1(i, C_1) < \frac{8}{\pi R_1}; \tag{66}$$

$$\omega(i, \Delta) < \omega_2(i, \Delta) < \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{dt}{1+t^2}, \quad \Delta \subset (t_1, t_2); \tag{67}$$

$$\omega(i, \Delta) > \omega_1(i, \Delta) > \frac{3}{16\pi} \int_{\Delta} \frac{dt}{1+t^2}, \quad \Delta \subset \left(-\frac{R_1}{2}, \frac{R_1}{2}\right); \tag{68}$$

$$g(i, w) < g_0(i, w) = \ln \left| \frac{i+w}{i-w} \right|, \quad w \in G. \tag{69}$$

Будем пользоваться также следующей теоремой, принадлежащей М. Г. Крейну [9]. Пусть $h(z)$ голоморфна при $\operatorname{Im} z > 0$ и непрерывна при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Пусть $\ln|h(z)| \leqslant r(z)$, где $r(z)$ — неотрицательная гармоническая при $\operatorname{Im} z > 0$ и непрерывная при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ функция. Тогда сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln^+ |h(t)| \frac{dt}{1+t^2}.$$

Выберем число R равным одному из R_k (лемма 2). Пусть кривая C — прообраз в полуплоскости $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ части окружности радиуса R с центром в нуле, попадающей внутрь области D_2 при отображении $z = \varphi_2(w)$. В силу леммы 2, когда $s \in C$, выполнено $\ln|F_2(s)| > -C_9 R$. Соединим концы t_1 и t_2 кривой C

отрезком вещественной оси и внутренность полученного контура назовем областью G. Построим для нее функцию Грина $g(w_1, w_2)$ и гармоническую меру $\omega(w, \gamma)$. Согласно [10, с. 33], гармоническая в области G функция

$$\ln|F_2(w)| + \sum_{b_k \in G} g(w, b_k) - \sum_{c_k \in G} g(w, c_k),$$

где b_k — корни функции $F_2(w)$, c_k — ее полюсы, допускает следующее представление:

$$\ln|F_2(w)| + \sum_{b_k \in G} g(w, b_k) - \sum_{c_k \in G} g(w, c_k) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \ln|F_2(t)|\, d\omega + \int_C \ln|F_2(s)|\, d\omega.$$

Положим в этом равенстве $w = i$ и перепишем его в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \ln^+|F_2(t)|\, d\omega(i) = \int_{t_1}^{t_2} \ln^-|F_2(t)|\, d\omega(i) + \ln|F_2(i)| -$$

$$- \int_C \ln|F_2(s)|\, d\omega(i) + \sum_{b_k \in G} g(i, b_k) - \sum_{c_k \in G} g(i, c_k). \tag{70}$$

Так как $\varphi_2(w) \sim w$, то кривая C при достаточно больших R лежит в кольце $R(1-\varepsilon) < |w| < R(1+\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$. Примем $R_1 = R(1-\varepsilon)$, $R_2 = R(1+\varepsilon)$ и используем для оценок правой части (70) соотношения (66)—(69). Получим

$$\frac{3}{16\pi} \int_{-\frac{R_1}{2}}^{\frac{R_1}{2}} \ln^+|F_2(t)| \frac{dt}{1+t^2} + \sum_{c_k \in G} g(i, c_k) \leqslant$$

$$\leqslant C_9 R \frac{8}{\pi R(1-\varepsilon)} + |\ln|F_2(i)|| +$$

$$+ \ln \prod_{b_k \in G} \left| \frac{i - \bar{b}_k}{i - b_k} \right| + \frac{1}{\pi} \int_{-R_2}^{R_2} \ln^-|F_2(t)| \frac{dt}{1+t^2}.$$

Используя тот факт, что произведение Бляшке, составленное по числам b_k, удовлетворяющим условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} b_k}{1 + |b_k|^2} < \infty,$$

сходится при $w = i$, а также учитывая соотношение (49), имеем

$$\int_{-\frac{R_1}{2}}^{\frac{R_1}{2}} \ln^+|F_2(t)| \frac{dt}{1+t^2} + \sum_{c_k \in G} g(i, c_k) < C_{13}. \tag{71}$$

Очевидно

$$\sum_{c_k \in G} g(i, c_k) > \sum_{|c_k| < R_1} g_1(i, c_k).$$

а, как легко показать, при $|c_k| < \frac{R_1}{2}$

$$g_1(i, c_k) \geqslant C_{14} \frac{\operatorname{Im} c_k}{1 + |c_k|^2}.$$

Поэтому из (71), устремляя R к бесконечности по последовательности R_k, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln^+ |F_2(t)| \frac{dt}{1+t^2} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} c_k}{1 + |c_k|^2} < \infty. \tag{72}$$

Согласно [2, с. 38—39], функция $F_2(w)$ является функцией с ограниченной характеристикой $S(r, F_2)$ и поэтому [2, с. 382] допускает следующее представление:

$$\ln|F_2(w)| - \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|\frac{w - \bar{c}_n}{w - c_n}\right| =$$

$$= \frac{v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|F_2(t)|}{t^2 + \rho^2 - 2ut} dt - \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|\frac{w - \bar{b}_n}{w - b_n}\right| + \eta v. \tag{73}$$

Из (73), очевидно, имеем

$$\ln|F_2(w)| - \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|\frac{w - \bar{c}_n}{w - c_n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|F_2(t)|}{t^2 + \rho^2 - 2ut} dt + \eta v. \tag{74}$$

Стоящая в правой части неравенства (74) функция является гармонической при $\operatorname{Im} w > 0$ и непрерывной при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$; обозначим ее через $q(w)$. Из (74) следует, что

$$\ln|f(z)| - \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|\frac{\psi_2(t) - \bar{c}_n}{\psi_2(t) - c_n}\right| \leqslant q[\psi_2(z)].$$

Функция $r(z)=q[\psi_2(z)]$ гармонична при $\operatorname{Im} z>0$, неотрицательна и непрерывна при $\operatorname{Im} z\geqslant 0$. Поэтому в силу теоремы М. Г. Крейна

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\ln|f(t)|-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\frac{\psi_2(t)-\bar{c}_n}{\psi_2(t)-c_n}\right|\right]^{+}\frac{dt}{1+t^2}<\infty.$$

Обозначим через $u_n(z)$ функцию $\dfrac{\psi_2(z)-\bar{c}_n}{\psi_2(z)-c_n}$. Легко показать, что характеристика $S(r)$ функции $u_n(z)$ есть ограниченная величина. Поэтому [2, с. 382] выполняется при $z=i$

$$\ln|u_n(i)|=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|u_n(t)|}{1+t^2}dt+\ln\left|\frac{i-\bar{c}_n}{i-c_n}\right|.$$

Складывая эти равенства, получим в силу (72), что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\frac{\psi_2(t)-\bar{c}_n}{\psi_2(t)-c_n}\right|\right]\frac{dt}{1+t^2}<\infty.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ln^{+}|f(t)|\frac{dt}{1+t^2}<\infty. \qquad (75)$$

Пусть d_n — полюсы функции $f(z)$, $\operatorname{Im} d_n\geqslant 0$. Тогда $d_n=\varphi_2(c_n)$, где c_n — полюсы функции $F_2(w)$. Легко видеть, что

$$|d_n|^2=|c_n|^2[1+o(1)],$$

а

$$\operatorname{Im} d_n=\operatorname{Im} c_n+|c_n|^{\alpha}\cos\left[\frac{\pi\alpha}{2}-\theta_n\right]+o(c_n^{\alpha}),$$

где $\theta_n=\arg c_n$.
Отсюда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} d_n}{|d_n|^2}\leqslant C_{15}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} c_n}{|c_n|^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c_n|^{\alpha}}{|c_n|^2}\right\}. \qquad (76)$$

Сходимость первого ряда в правой части (76) следует из (72), а сходимость второго доказывается так же, как в лемме 3.

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} d_n}{|d_n|^2}<\infty. \qquad (77)$$

Из (75), (77) и (62)следует, что $S(r, f)=O(1)$ в верхней полуплоскости. Используем теперь теорему [2, с. 373]. Пусть $f(z)$ —

функция, мероморфная в угле $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, такая, что $S(r, f) = O(1)$. Когда $r \to \infty$, пропуская, возможно, некоторое множеств конечной логарифмической меры, равномерно относительно φ, $0 < \varphi < \pi$, выполняется соотношение

$$\ln |f(re^{i\varphi})| = K_3 r \sin \varphi + o(r),$$

K_3 — постоянная.

Применяя эту теорему отдельно при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ обозначая исключительное множество через A, получаем теорему 3

Очевидно, теорему 3 можно дополнить.

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, удовлетворяющая условию* (1) *теоремы* 3. *Пусть, кроме того, $z = \infty$ является борелевским исключительным значением функции $f(z)$. Тогда имеют место все утверждения теоремы* 3.

Автор выражает благодарность И. В. Островскому за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мацаев В. И. О росте целых функций, допускающих специальную оценку снизу. — «Доклады АН СССР», 1960, т. 132, № 2, с. 283—286.

2. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.

3. Nevanlinna R. Über die Eigeschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum. — «Acta Soc. Sci. Fenn.», 1925, Bd50, H12, S. 1—45.

4. Edrei A., Fuchs W. H. J. Bounds for the number of deficient values of certain classes of meromorphic functions. — «Proc. London Math. Soc.», 1962, vol. 12, p. 315—344.

5. Мацаев В. И. О вольтерровых операторах, получаемых возмущением самосопряженных. — «Доклады АН СССР», 1961, т. 139, № 4, с. 810—814.

6. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956. 632 с.

7. Nevanlinna R. Le théoreme de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris, 1929. 235 p.

8. Мацаев В. И. Некоторые применения теории целых функций в теории операторов. Автореф. докт. дис. Харьков, 1962. 32 с.

9. Крейн М. Г. К теории целых функций экспоненциального типа. — «Известия АН СССР. Сер. мат.», 1947, т. 11, с. 309—326.

10. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М., ГИТТЛ, 1941. 385 с.

Поступила 17 марта 1973