УДК 517. 55

С. Ю. Фаворов

О ФУНКЦИЯХ КЛАССА В И ИХ ПРИМЕНЕНИИ В ТЕОРИИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. II

Здесь будет доказан результат, сформулированный (теорема 1.5) и использованный нами в § 1,2 настоящей статьи.

Введем, следуя [1], необходимые определения.

1. Классом B* назовем класс функций $\Phi(z, t)$, определенных при $z \in C^n$, $t \geqslant 0$ и таких, что функции $\Phi(z, |w|)$, где $w \in C^1$, являются плюрисубгармоническими в C^{n+1}, а функции $\exp\{\Phi(z,t)\}$ непрерывны в $C^n \times R_+^1$**. При этом через $M_\Phi(r, t)$, где $r \in R_+^n$, обозначим величину

$$\sup\{\Phi(z, t) : |z_1| = r_1, \ldots, |z_n| = r_n\}.$$

2. Пусть $E \subset C^1$. Через $\underline{\mathrm{cap}}\, E$ обозначим внутреннюю логарифмическую емкость множества E.

3. Пусть $E \subset C^n$. Обозначим

$$\Delta(E, z_1', \ldots, z_{n-1}') = E \cap \{z : z_1 = z_1', \ldots, z_{n-1} = z_{n-1}'\},$$

$$\Gamma_n^{n-1}(E) = \{(z_1, \ldots, z_{n-1}) : \underline{\mathrm{cap}}\, \Delta(E; z_1, \ldots, z_{n-1}) > 0\},$$

$$\Gamma_n^{n-k}(E) = \Gamma_{n-k+1}^{n-k}(\Gamma_n^{n-k+1}(E)), \quad k = 2, \ldots, n-1.$$

При $E \subset C^1$ положим $\Gamma_1^1(E) = E$.

4. Г-емкостью множества $E \subset C^n$ назовем величину

$$\Gamma - \mathrm{cap}\, E = \sup_{\alpha \in T} \mathrm{cap}\, \Gamma_n^1(\alpha E),$$

где T — класс унитарных преобразований пространства C^n.

Напомним формулировку доказываемого результата.

Теорема. *Пусть функция* $\Phi(z, t) \in$ B, *а функция* $M_\Phi(r, t)$ *имеет по переменной* t *порядок* $\bar\rho > 0$ *и конечный порядок* ρ *по совокупности переменных. Тогда, если для всех* z *из некоторого множества* E *положительной* Г-*емкости интеграл*

$$\int^\infty \Phi(z, t)\, t^{-\bar\rho-1} dt$$

сходится, то

$$\int^\infty M_\Phi(r, t)\, t^{-\bar\rho-1} dt < \infty \ \forall r \in R_+^n.$$

Доказательство этой теоремы опирается на одно неравенство для субгармонических функций (лемма 1). Чтобы сформулировать это неравенство, введем некоторые обозначения.

Пусть $K \subset R^p$, $p \geqslant 2$ — компакт положительной емкости***, область G — неограниченная компонента связности множества $R^p \setminus K$. Потенциалом $U^\mu(x)$ некоторой меры μ с компактным носителем называется функция

$$\int_{R^p} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{p-2}}$$

---

* В [1] этот класс обозначен соответствующей готической буквой.

** $R_+^n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n : x_i \geqslant 0 \ \forall i\}$.

*** При $p \geqslant 3$ рассматривается винеровская емкость, при $p = 2$ — логарифмическая.

при $p>2$ и

$$\int\limits_{R^2} \ln \frac{1}{|x-y|}\, d\mu(y)$$

при $p=2$. Через $\gamma(E)$ будем обозначать постоянную Робэна компакта E, через $U(x;\ E)$ — равновесное распределение единичной массы на E (т. е. $U(x;\ E) \leqslant \gamma(E)$ в R^p и $U(x;\ E)=\gamma(E)$ квазивсюду* на E). Положим

$$G_t = \{x \in G : U(x;\ K) > \gamma(K) - t\}, \quad t>0,$$

$$L_t = \{\overline{x \in G : U(x;\ K) = \gamma(K) - t}\},\ t>0,$$

$$L_0 = \partial G,$$

$$\tau_0 = \sup\{t : L_t \cap K \neq \varnothing\}.$$

Символом $W(u;\ t)$ будем обозначать интеграл функции $u(x)$ по равновесной мере μ_t компакта L_t. При этом предполагается, что мера нормирована условием $\mu_t(L_t)=1$.

Лемма 1**. *Для любой субгармонической в G_τ $(\tau>\tau_0)$ и полунепрерывной сверху в $\overline{G}_\tau$ функции $u(x)$ справедливо неравенство*

$$W(u;\ \lambda t + (1-\lambda)s) \leqslant \lambda W(u;\ t) + (1-\lambda) W(u;\ s),$$

$$0 \leqslant t < \tau, \quad \tau_0 < s \leqslant \tau, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Доказательство. а) Предположим сначала, что множество ∂G не имеет иррегулярных точек (в этом случае $\tau_0=0$), а функция $u(x)$ — гармоническая в G_τ и непрерывна в $\overline{G_\tau}$. Положим

$T=\{t>0 : \operatorname{grad} U(x;\ K) \neq 0$ при $x \in L_t\}$.

Применяя формулу Грина к функциям $u(x)$ и 1 в области $G_s \diagdown \overline{G}_t$, $t<s<\tau$, $t,\ s \in T$, получаем, что $\int\limits_{L_t} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$*** не зависит от выбора $t \in T$ $t<\tau$. Применив формулу Грина к функциям $U(x;\ K)$ и $u(x)$ в той же области, получаем равенство

$$\int\limits_{L_t} u(x) \frac{\partial U(x;\ K)}{\partial n} d\sigma - \int\limits_{L_s} u(x) \frac{\partial U(x;\ K)}{\partial n} d\sigma = Q(t-s),$$

где константа Q не зависит от $t,\ s \in T$.

---

* Термины «квазивсюду на E», «для квазивсех $x \in E$» означают, что соответствующее утверждение справедливо для всех $x \in E$, кроме, быть может, множества нулевой емкости.

** Так как эта лемма может представлять самостоятельный интерес, она формулируется применительно к R^p, $p \geqslant 2$, хотя в дальнейшем используется только случай $p=2$.

*** Нормаль считается направленной в сторону возрастания значений $U(x;\ K)$; $d\sigma$ — элемент $p-1$-мерной площади поверхности L_t.

Множество L_t при $t \in T$ является гладкой гиперповерхностью. следовательно,

$$d\mu_t = \frac{1}{\sigma_{p-1}} \frac{\partial U(x;\ K)}{\partial n} d\sigma,$$

где σ_{p-1} — площадь поверхности единичной сферы в R^p. С другой стороны, как нетрудно видеть, $U(x;\ L_t) = \inf\{U(x;\ K);\ \gamma(K) - t\}$. Поэтому при $t,\ s \in T$

$$W(u;\ t) - W(u,\ s) = Q\sigma_{p-1}^{-1}(t - s). \tag{3.1}$$

Покажем, что равенство (3.1) справедливо при всех $t,\ s \in [0,\ \tau)$. Выберем $t' \in [0,\ \tau)\diagdown T,\ s \in T$. Из теоремы Сарда* следует, что найдется убывающая последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T$, сходящаяся к t'. Последовательность потенциалов $U(x;\ L_{t_n})$ монотонно возрастает к потенциалу $U(x;\ L_{t'})$ и, следовательно (см. [2, с. 142]), меры μ_{t_n} слабо сходятся к мере $\mu_{t'}$. Равенство (3.1) справедливо при $t = t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k,\ \ldots$, и в нем можно перейти к пределу при $n \to \infty$.

б) Пусть K — произвольный компакт положительной емкости, функция $u(x)$ гармонична в G_τ и непрерывна в $\overline{G}_\tau$. Построим убывающую последовательность компактов $K^{(n)}$ без иррегулярных точек такую, что $\bigcap\limits^{\infty} K^{(n)} = K$**. Выражения $L_s^{(n)}$, $G^{(n)}$, $\mu_s^{(n)}$, $W^{(n)}(u,\ s)$ будут означать для компактов $K^{(n)}$ то же, что и соответствующие выражения без верхнего индекса для компакта K.

Так как масса всех мер $\mu_s^{(n)}$ равна 1, то для каждого фиксированного s из последовательности мер $\mu_s^{(n)}$ можно выделить подпоследовательность $\mu_s^{(n')}$, слабо сходящуюся к некоторой мере ν_s. С другой стороны, последовательность $\gamma(K^{(n')})$ монотонно возрастает к $\gamma(K)$. Так как $U(x;\ K^{(n)}) - \gamma(K^{(n)}) \geqslant U(x;\ K) - \gamma(K)$ в R^p, то $L_s \subset \{x : U(x;\ K^{(n)}) \geqslant \gamma(k^{(n)}) - s\}$ и, следовательно, $U(x;\ L_s^{(n)}) \equiv \gamma(K^{(n)}) - s$ на L_s. Носители мер $\mu_s^{(n)}$ лежат в ограниченном множестве, поэтому (см. [2. с. 237])

$$\lim_{n' \to \infty} U(x;\ L_s^{(n')}) = U^{\nu_s}(x)$$

квазивсюду в R^p.

Таким образом, $U^{\nu_s}(x) = \gamma(K) - s$ квазивсюду на L_s и вследствие единственности равновесной меры на L_s $\nu^s = \mu_s$.

Рассмотрим невозрастающую последовательность непрерывных функций $f_n(x) = U(x;\ K^{(n)}) - \gamma(K^{(n)})$. Так как $\tau > \tau_0$, то при

---

* Теорема Сарда утверждает, что для отображения f класса C^∞ из открытого множества $\Omega \subset R^n$ в R^m множество $\{y \in R^m : f(x) = y;\ \operatorname{rg} \| f'(x) \| < \min\{m,\ n\}\}$ имеет лебегову меру нуль.

** В качестве $K^{(n)}$ можно взять замыкание конечного множества открытых шаров радиуса n^{-1}, покрывающих компакт K.

достаточно больших n $\partial G^{(n)} \subset G_\tau$, и поэтому слабая сходимость мер $\mu_0^{n'}$ к мере μ_0 влечет поточечную сходимость последовательности $f_{n'}(x)$ к функции $U(x;\ K) - \gamma(K)$ $(\equiv \tau)$ в каждой точке $x \in L_\tau$. По теореме Дини сходимость будет равномерной, так что для любого $s < \tau$ при достаточно больших n $U(x;\ K^{(n)}) < \gamma(K^{(n')}) - s$ при $x \in L_\tau$ и, следовательно, $L_s^{(n')} \subset G_\tau$. Таким образом, для любых $t,\ s < \tau$ и $\lambda \in [0, 1]$ равенство

$$W^{(n)}(u;\ \lambda t + (1-\lambda) s) = \lambda W^{(n)}(u;\ t) + (1-\lambda) W^{(n)}(u;\ s) \quad (3.2)$$

выполняется при достаточно больших n'. Выбирая теперь последовательность n' так, что меры $\mu_t^{(n')}$, $\mu_{\lambda t+(1-\lambda)s}^{(n')}$, $\mu_s^{(n')}$ слабо сходятся соответственно к мерам μ_t, $\mu_{\lambda t+(1-\lambda)s}$, μ_s и переходя к пределу в (3.2) при $n \to \infty$, получаем равенство

$$W(u;\ \lambda t + (1-\lambda) s) = \lambda W(u;\ t) + (1-\lambda) W(u;\ s), \qquad (3.3)$$
$$0 \leqslant t \leqslant s < \tau,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Это равенство сохраняется также при $s = \tau$. Действительно, рассмотрим возрастающую последовательность $s_n \to \tau$, Ей соответствует возрастающая последовательность потенциалов $U(x;\ L_{s_n})$, сходящаяся к потенциалу $U(x;\ L_\tau)$. Следовательно*, меры μ_{s_n} слабо сходятся к мере μ_τ. Положив в (3.3) $s = s_n$, $n = 1, 2 \ldots$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, получим (3.3) с $s = \tau$.

в) Пусть функция $u(x)$ является решением обобщенной задачи Дирихле с непрерывными граничными значениями в открытом множестве G_τ. Согласно одному результату Н. С. Ландкофа**, можно выбрать две последовательности $u_n^{(1)}(x)$, $u_n^{(2)}(x)$, $n = 1, 2 \ldots$ гармонических в G_τ и непрерывных в $\overline{G_\tau}$ функций таких, что $u_n^{(1)}(x) \leqslant u(x) \leqslant u_n^{(2)}(x)\ \forall n$ в G_τ и каждая из последовательностей равномерно сходится к функции $u(x)$ на любом компакте в G_τ. Для функций $u_n^{(1)}(x)$ равенство (3.3) справедливо. Предположим сначала, что $t = 0$, $s = \tau$ и $(1-\lambda)\tau > \tau_0$. Заменяя в правой части (3.3) функцию $u_n^{(1)}(x)$ на функцию $u(x)$ и переходя в левой части к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство

$$W(u;\ (1-\lambda)\tau) \leqslant \lambda W(u;\ 0) + (1-\lambda) W(u;\ \tau) \qquad (3.4)$$

при $(1-\lambda)\tau > \tau_0$.

Рассматривая вместо последовательности $u_n^{(1)}(x)$ последовательность $u_n^{(2)}(x)$, получим неравенство (3.4) с обратным знаком. Следовательно,

$$W(u;\ (1-\lambda)\tau) = \lambda W(u;\ 0) + (1-\lambda) W(u;\ \tau) \qquad (3.5)$$

при $\lambda < 1 - \tau_0\tau^{-1}$.

---

*См. [2, с. 142].
**См. [2, с. 313].

Для любого $s \in (0, \tau)$ можно выбрать монотонно убывающую последовательность непрерывных на L_s функций $f_n(x)$, сходящуюся квазивсюду к сужению на L_s функции $u(x)$*. Пусть $u_n(x)$ — решение обобщенной задачи Дирихле в $G_\tau \setminus G_s$ с граничными значениями, равными $u(x)$ на L_τ и $f_n(x)$ на L_s. Применяя (3.5) к компакту L_s и функции $u_n(x)$ и переходя к пределу при $n \to \infty$**, получаем равенство

$$W(u;\ \lambda s + (1-\lambda)\tau) = \lambda W(u;\ s) + (1-\lambda) W(u;\ \tau),$$

справедливое при $\lambda s + (1-\lambda)\tau > \tau_0$ и $s \in (0, \tau)$. Из (3.5) следует, что это неравенство справедливо и при $s \in [0, \tau)$, что, как нетрудно видеть, эквивалентно линейности $W(u;\ s)$ как функции от s на $[0, \tau]$.

г) Рассмотрим общий случай. Фиксируем t, s, $0 \leqslant t < s \leqslant \tau$, $s > \tau_0$. Представим сужение функции $u(x)$ на множество $L_t \cup L_s$ как предел монотонно убывающей последовательности непрерывных функций $f_n(x)$. Если $u_n(x)$ — решение обобщенной задачи Дирихле в $G_s \setminus G_t$ с граничными значениями $f_n(x)$, то, по доказанному,

$$W(u_n;\ \lambda t + (1-\lambda) s) = \lambda W(f_n;\ t) + (1-\lambda) W(f_n; s). \qquad (3.6)$$

Так как

$$\varlimsup_{x \to x' \in L_t \cup L_s} [u(x) - f_n(x)] \leqslant 0,$$

квазивсюду на $L_t \cup L_s$, то $u(x) \leqslant u_n(x)$ в $G_s / \overline{G}_t$. Поэтому из (3.6) следует утверждение леммы.

Из этой леммы следует

Лемма 2. (Ср. [1, лемма 2.7.1]). *В обозначениях леммы 1 для любой функции* $\Phi(z, t) \in \beta$, $z \in C^1$ *и любых* $t_1, t_2: 0 < t_2 \leqslant t_1$, $s > \tau_0$, $\lambda \in [0, 1]$ *выполняется неравенство*

$$W\left(\Phi\left(z,\ t_1^{\lambda} t_2^{1-\lambda}\right);\ (1-\lambda) s\right) \leqslant \lambda W(\Phi(z,\ t_1);\ 0) + \\ + (1-\lambda) W(\Phi(z,\ t_2);\ s). \qquad (3.7)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\left(t_2 t_1^{-1}\right)^{\frac{\gamma(K) - U(z;\ K)}{s}} = \left|\exp\left\{\left[1 + \frac{f(z) - \gamma(K)}{s}\right] \ln t_1 + \right.\right.$$

---

* Например, можно взять последовательность непрерывных функций, монотонно убывающих к полунепрерывной сверху на L_s функции

$$f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{если } x \in G, \\ \sup\{u(x):\ x \in \partial G\}, & \text{если } x \overline{\in} G. \end{cases}$$

** Применяя обобщенный принцип максимума, легко показать, что функции $u_n(x)$ монотонно убывают к функции $u(x)$ $\forall x \in G_\tau / G_s$.

$$+\left[\frac{\gamma(K)-f(Z)}{s}\right]\ln t_2\}|,$$

где $f(z)$ — аналитическая (но не однозначная) функция в G такая, что $\operatorname{Re} f(z) = U(z; K)$. Так как функция $\Phi(z, |w|)$ — плюрисубгармоническая в C^2, то функция

$$\varphi(z) = \Phi\left(z, \; t_1(t_2 t_1^{-1})^{\frac{\gamma(K)-U(z; K)}{s}}\right)$$

будет субгармонической в G. Далее, $U(z; K) \leqslant \gamma(K)$, поэтому

$$\varphi(z) = \Phi\left(z, \; t_1(t_2 t_1^{-1})^{\frac{\gamma(K)-U(z; K)}{z}}\right) \leqslant \Phi(z, \; t_1)$$

и, следовательно,

$$\varlimsup_{\zeta \to z \in \partial G} \varphi(\zeta) \leqslant \Phi(z, \; t_1).$$

Положим

$$\psi(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{при } z \in G, \\ \Phi(z, \; t_1) & \text{при } z \in \partial G. \end{cases}$$

Применив к функции $\psi(z)$ лемму 1 с $t = 0$ и тем же s, получим неравенство (3.7). Лемма доказана.

В доказательстве теоремы будет также использована

Лемма 3. *Предположим, что замкнутая аналитическая кривая L ограничивает некоторую область $G \subset C^1$. Обозначим через μ равновесное распределение единичной массы на L. Тогда для любого круга $\{z : | |z - a| < r\}$, содержащегося в G, и для любой неотрицательной субгармонической в G и полунепрерывной сверху в $\overline{G}$ функции $V(z)$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(a + re^{i\theta})\, d\theta \leqslant C \int_L V(z)\, d\mu \tag{3.8}$$

с некоторой константой $C = C(a, \; G,)$ не зависящей от функции $V(z)$.

Доказательство. Рассмотрим на L последовательность непрерывных функций $u_n(z)$, монотонно убывающих к сужению на L функции $V(z)$. Продолжим их непрерывно и гармонически в G. Так как L — аналитическая кривая, то плотность равновесной меры μ на L совпадает с функцией $\frac{1}{2\pi}\frac{\partial g(z, \infty)}{\partial n}$, где $g(z, \infty)$ — функция Грина области $C^1 / \overline{G}$ с полюсом на бесконечности. Функция $\frac{\partial g(z, \infty)}{\partial n}$ непрерывна и положительна на L. Следовательно, существует $\alpha > 0$ такое, что $\frac{\partial g(z, \infty)}{\partial n} \geqslant \alpha$ на L и поэтому

$$\int_L u_n(z)\, d\mu \geqslant \frac{\alpha}{2\pi}\int_L u_n(z)\, ds. \tag{3.9}$$

Пусть $f(\zeta)$ — функция, дающая конформное отображение единичного круга на область G, причем так, что $f(0) = a$. Так как

L — аналитическая кривая, то функция $f(\zeta)$ конформно продолжается на круг несколько большего радиуса, и поэтому $\beta = \inf\limits_{|\zeta|=1} |f'(\zeta)| > 0$. Следовательно,

$$\int\limits_L u_n(z)\,dz = \int\limits_{|\zeta|=1} u_n(f(\zeta))\,|f'(\zeta)|\,d\zeta \geqslant$$

$$\geqslant \beta \int\limits_0^{2\pi} u_n(f(e^{i\varphi}))\,d\varphi. \qquad (3.10)$$

Функция $u_n(f(\zeta))$ гармонична в круге $|\zeta| \leqslant 1$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_n(f(e^{i\varphi}))\,d\varphi = u_n(f(0)) = u_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_n(a + re^{i\theta})\,d\theta. \qquad (3.11)$$

Таким образом, из (3.9), (3.10) и (3.11) следует неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_n(a + re^{i\theta})\,d\theta \leqslant \frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_L u_n(z)\,d\mu.$$

По принципу мажорации $u_n(z) \geqslant V(z)$ в G. Заменяя в левом интеграле функцию $u_n(z)$ на $V(z)$ и переходя в правой части к пределу при $n \to \infty$, получаем (3.8). Лемма доказана.

Доказательство теоремы*. Пусть сначала $n = 1$. Положим

$$E_m = \left\{z : \int\limits_1^{\infty} \frac{\Phi^+(z\ t)}{t^{\bar{\rho}+1}}\,dt \leqslant m\right\},\quad m = 1,\ 2,\ \ldots$$

Легко видеть, что множества E_m — борелевские и $E \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Так как cap $E > 0$, то существует m' такое, что cap $E_{m'} > 0$ и такой компакт $K \subset E_{m'}$, что cap $K > 0$. По лемме 2 для любых

$$s > \tau_0,\ \lambda \in [0,\ 1] \text{ и } t_1,\ t_2 : t_1 \geqslant t_2 > 0$$

справедливо неравенство

$$W\left(\Phi^+\left(z,\ t_1^{\lambda} t_2^{1-\lambda}\right);\ (1-\lambda)\,s\right) \leqslant \lambda W(\Phi^+(z,\ t_1);\ 0) + $$
$$+ (1-\lambda)\,W(\Phi^+(z,\ t_2);\ s).$$

Выберем $\theta \in (0,\ \bar{\rho})$. Положим $t_1 = t^{\frac{1}{\lambda}}$, $t_2 = 1$ и оценим второе слагаемое, пользуясь конечностью порядка на совокупности переменных. Имеем

$$W(\Phi^+(z,\ t);\ (1-\lambda)\,s) \leqslant W\left(\Phi^+\left(z,\ t^{\frac{1}{\lambda}}\right);\ 0\right) +$$
$$+ C_1 + C_2 R_s^{\rho+\theta}. \qquad (3.12)$$

---

* Мы используем некоторые идеи доказательства теоремы Л. И. Ронкина, цитированной в конце § 1.

где $R_s = \sup\{|z| : z \in L_s\}$. Так как $U(z;\ K) = -\ln|z| + 0(1)$ при $|z| \to \infty$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших s

$$R_s \leqslant e^{s-\gamma(K)+\varepsilon}. \tag{3.13}$$

Для фиксированного $r \geqslant 0$ выберем s' такое, что при $s \geqslant s'$ выполняется неравенство (3.13) и все кривые L_s являются замкнутыми аналитическими кривыми*, содержащими круг $\{z : |z| < r\}$. Положим

$$s = \frac{\bar{\rho} - \theta}{\rho + \theta} \ln t,\ \lambda = 1 - \frac{s'}{s},\quad \alpha = 2s' \frac{\rho + \theta}{\bar{\rho} - \theta}.$$

При достаточно больших t $\lambda^{-1} < 1 + \frac{\alpha}{\ln t}$, поэтому, пользуясь монотонностью функции $\Phi(z,\ t)$ по переменной t, из (3.12) и (3.13) получаем неравенство

$$W(\Phi^+(z,\ t);\ s') \leqslant W\left(\Phi^+\left(z,\ t^{1+\frac{\alpha}{\ln t}}\right);\ 0\right) + C_3 t^{\bar{\rho}-\theta},$$

справедливое при больших t. Отсюда, воспользовавшись леммой 3, получаем неравенство, справедливое для всех $t \in [1,\ \infty)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi^+(re^{i\theta},\ t)\, d\theta \leqslant C_4 W(\Phi^+(z,\ te^{\alpha});\ 0) + C_5 t^{\bar{\rho}-\theta}. \tag{3.14}$$

Разделим обе части этого неравенства на $t^{\bar{\rho}+1}$ и проинтегрируем его по t от $t = 1$ до $t = \infty$. Для $z \in K \subset E_{m'}$

$$\int_1^{\infty} \frac{\Phi^+(z,\ te^{\alpha})}{t^{\bar{\rho}+1}}\, dt \leqslant e^{\alpha\bar{\rho}} m'.$$

Поэтому первое слагаемое в правой части (3.14) и, следовательно, левая часть этого неравенства после интегрирования по t останется конечной. Далее, для любой субгармонической в круге $|z| < R$ и функции $u(z)$ справедливо неравенство [1, с. 82]

$$\sup_{|z|=\frac{r}{2}} u(z) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})\, d\theta,\ r < R. \tag{3.15}$$

Поэтому

$$M_{\Phi^+}\left(\frac{r}{2},\ t\right) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi^+(re^{i\theta},\ t)\, d\theta$$

и интеграл $\int^{\infty} M_{\Phi^+}\left(\frac{r}{2},\ t\right) t^{-\bar{\rho}-1}\, dt$ сходится. Осталось заметить, что выбор $r > 0$ был произволен.

Предположим теперь, что теорема доказана при $n = l - 1$. Докажем ее при $n = l$.

Не нарушая общности, можно считать, что существует множество $E' \subset C^{l-1}$ такое, что $\Gamma - \operatorname{cap} E' > 0$ и для всех

$$'z = (z_1,\ \ldots,\ z_{l-1}) \in E' \quad \operatorname{cap}\Delta(E',\ 'z) > 0.$$

* Это всегда возможно; см. [3].

При фиксированном $'z \in E'$ функция $\Phi('z, z_l, t)$ принадлежит классу В по переменным z_l и t и удовлетворяет условию теоремы с $n = 1$. Следовательно, интеграл

$$\int^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi^+('z,\ r_l e^{i\theta},\ t)\,d\theta\right]\frac{dt}{t^{\bar\rho+1}}$$

сходится при каждом $'z \in E'$, $r_l \geqslant 0$. Таким образом, для каждого фиксированного $r_l \geqslant 0$ функция

$$\varphi('z,\ t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi^+('z,\ r_l e^{i\theta},\ t)\,d\theta$$

принадлежит классу В по переменным $'z \in C^{l-1}$ и $t \geqslant 0$ и удовлетворяет условию теоремы при $n = l - 1$. Согласно сделанным предположениям, интеграл $\int^{\infty} M_{\varphi}('r,\ t)\,t^{-\bar\rho-1}dt$ сходится при любых $'r \in R_+^{l-1}$. Заметим теперь, что из (3.15) следует неравенство $M_{\Phi^+}(r,t) \leqslant 2M_{\varphi}('r,t)$ с $r = \left('r,\ \frac{1}{2}r_l\right)$ и, следовательно, для любого $r \in R_+^l$ сходится интеграл $\int^{\infty} M_{\Phi^+}(r,\ t)\,t^{-\bar\rho-1}\,dt$. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве не была использована непрерывность функции $\exp\Phi(z,\ t)$.

Автор искренне признателен Л. И. Ронкину за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.

2. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М., «Наука», 1966. 331 с.

3. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М.—Л., Гостехиздат, 1941. 317 с.

Поступила 23 июня 1972 г.