УДК 517.53

А. С. Колокольников

О РОСТЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАСС

§ 1. Введение

Известен следующий результат А. А. Гольдберга [1, с. 338]. Если аргументы нулей и полюсов мероморфной функции удовлетворяют некоторым специальным ограничениям, то эта функция обладает известной регулярностью роста. Оказывается, что аналогичное явление имеет место для функций, представимых в виде разности субгармонических в R^m, $m \geqslant 2$. Установление этого и является целью настоящей работы. Попутно получаем многомерный аналог одной известной формулы Р. Неванлинны, часто используемой в теории целых и мероморфных функций.

Пусть $u(x)$ — функция, представимая в виде

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x), \tag{1.1}$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — субгармонические во всем пространстве R^m, $m \geqslant 2$, функции, гармонические в некоторой окрестности начала координат. Обозначим через μ_1 и μ_2 — меры, ассоциированные по Риссу функциям u_1 и u_2 соответственно. Будем предполагать, что μ_1 и μ_2 сосредоточены на непересекающихся множествах.

Будем обозначать через $x^0 = x/|x|$ единичный вектор в направлении точки x.

Пусть $\mathrm{Y}(x^0)$ — сферическая функция степени p, являющаяся решением уравнения $L\mathrm{Y} + p(p+m-2)\mathrm{Y} = 0$, где L — сферическая часть оператора Лапласа, p — натуральное число. В частности, при $m = 2$ функция Y имеет вид $\mathrm{Y}(x^0) = a\cos p\varphi + b\sin p\varphi$, $(x^0 = e^{i\varphi})$ и является решением уравнения $\mathrm{Y}'' + p^2\mathrm{Y} = 0$.

Рассмотрим множества B_1^p, B_2^p на единичной сфере $\{x : |x| = 1\}$, определенные равенствами $B_1^p = \{x^0 : \mathrm{Y}(x^0) > 0\}$, $B_2^p = \{x^0 : \mathrm{Y}(x^0) < 0\}$, и некоторые множества $A^p \subset\subset B^p_j$, $j = 1, 2$. Пусть $D^p_j = \{x : x^0 \in A^p_j\}$ — конусы, соответствующие областям A^p_j, $j = 1, 2$.

Определение. 1. *Если существуют* Y *и* A_1^p, A_2^p *такие, что*

$$\int\limits_{R^m\setminus D_1^p} \frac{d\mu_1}{|x|^{p+m-2}} + \int\limits_{R^m\setminus D_2^p} \frac{d\mu_2}{|x|^{p+m-2}} < \infty, \tag{1.2}$$

то будем говорить, что у функции $u(x)$ *массы* p*-разделены.*

В частности, у функции $u(x)$ массы p-разделены, если распределение масс μ_1 функции u_1 сосредоточено в D_1^p, а распределение масс μ_2 функции u_2 — bD_2^p.

Чтобы сформулировать полученные результаты, нам понадобятся некоторые величины, характеризующие рост и распределение масс функций, представимых в виде разности двух субгармонических.

Пусть $u(x)$ — функция, представимая в виде (1.1).

Обозначим

$$\sigma = \sigma_m r^{m-1}, \quad \sigma_m = (2\pi^{m/2})/\Gamma(m/2)$$

и положим [3]

$$m(r, u) = \sigma^{-1} \int\limits_{S_r(0)} u^+(y)\,dy, \quad u^+(y) = \max\{0, u(y)\}$$

(интегрирование проводим по поверхности сферы $S_r(0) = \{x: |x| = r\}$). Пусть $E_t(0) = \{x: |x| < t\}$ — шар радиуса t с центром в начале координат и $\mu(t) = \mu(\bar{E}_t(0))$. Положим

$$N(r, u) = (m-2)\int\limits_0^r \frac{\mu_2(t)\,dt}{t^{m-1}} \quad \text{при } m > 2,$$

и

$$N(r, u) = \int\limits_0^r \frac{\mu_2(t)\,dt}{t} \quad \text{при } m = 2$$

$$T(r, u) = m(r, u) + N(r, u). \tag{1.3}$$

Функция $T(r, u)$ называется характеристикой функции $u(x)$.

Теорема 1. *Если у функции* $u(x)$ *массы* p*-разделены, то существует предел* $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-p}T(r, u)$, *конечный или бесконечный.*

Порядок и нижний порядок функции $u(x)$, представимой в виде разности двух субгармонических, определяются соответственно равенствами

$$\rho(u) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\{\ln r\}^{-1} \ln T(r, u),$$

$$\lambda(u) = \underline{\lim_{r\to\infty}}\{\ln r\}^{-1} \ln T(r, u). \tag{1.4}$$

Заметим, что если функция $u(x)$ является субгармонической, то в соотн шениях (1.4) можно заменить $T(r, u)$ на $M(r, u) = \sup\limits_{x\in E_r(0)} u^+(x)$.

Теорема 1 показывает, что рост функции $u(x)$ не может быть сколь угодно нерегулярным. В частности, из нее непосредственно вытекает, что если $\lambda(u) < p$, то $\rho(u) \leqslant p$.

Эта теорема является обобщением теоремы А. А. Гольдберга [1, с. 338]. В самом деле, если $f(z)$ — мероморфная функция, то функция $u(z) = \ln|f(z)|$ является разностью двух субгармонических функций $u_1(z) = \ln|f_1(z)|$ и $u_2(z) = \ln|f_2(z)|$, где $f_1(z)$, $f_2(z)$ — целые функции без общих корней такие, что

$$f(z) = f_1(z)/f_2(z). \tag{1.5}$$

Мера $\mu_1 = \mu_1(E)$ равна числу корней функции $f(z)$ на множестве E, а $\mu_2 = \mu_2(E)$ — числу полюсов функции $f(z)$ на множестве E. Для такой функции $u(z)$ характеристика $T(r, u)$ в смысле определения (1. 3) совпадает с неванлинновской характеристикой $T(r, f)$ для функции $f(z)$, определенной равенством (1.5). Если нули и полюсы разделены по определению А. А. Гольдберга [1, с. 338], то это означает, что массы функции $u(z)$ p-разделены в смысле нашего определения при выборе $Y = \cos p\varphi$ и

$$A_1^p = \bigcup_{j=0}^{p-1}\left\{e^{i\varphi} : \left|\varphi - \pi\frac{2j}{p}\right| \leqslant \eta\right\}, \quad A_2^p = \bigcup_{j=0}^{p-1}\left\{e^{i\varphi} : \left|\varphi - \pi\frac{2j+1}{p}\right| \leqslant \eta\right\}$$

где η — число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \eta < \pi/(2p)$. Отсюда следует, что при $m = 2$ теорема 1 содержит теорему А. А. Гольдберга.

В вопросах теории целых и мероморфных функций находит применение следующая формула Р. Неванлинны [8, с. 37; 1, 2, 9—11]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|\cos p\varphi d\varphi = \frac{1}{2p}\sum_{|a_m|<r}\left(\frac{r^p}{|a_m|^p} - \frac{|a_m|^p}{r^p}\right) \times$$

$$\times \cos p\alpha_m - \frac{1}{2p}\sum_{|b_n|<r}\left(\frac{r^p}{|b_n|^p} - \frac{|b_n|^p}{r^p}\right)\cos p\beta_n + r^p \operatorname{Re}\frac{d^p}{dz^p}\ln f(z)\Big|_{z=0},$$

где $\alpha_m = \arg a_m$, $\beta_n = \arg b_n$. Для доказательства теоремы 1 понадобилось обобщение формулы (1.6) для функций вида (1.1), представимых в виде разности двух субгармонических. Пусть $A = 1 + 2p/(m-2)$ при $m > 2$ и $1/(2p)$ при $m = 2$, а $B = A$ при $m > 2$ и $1/2$ при $m = 2$. Пусть $K_0^2 = \int_{S_1(0)} Y^2(x^0)\,dx^0$, $\omega_1(t, p) = t^p - t^{-p}$.

Теорема 2. *Пусть функция $u(x)$ представима в виде (1.1). Справедливо соотношение*

$$\sigma^{-1}\int_{S_R(0)} u(y)\, Y(y^0)\, dy = AR^{\frac{2-m}{2}}\int_{E_R(0)} y^{\frac{2-m}{2}}\omega_1\left(\frac{R}{|y|}, p + \frac{m-2}{2}\right) \times$$

$$\times \mathrm{Y}(y^0)\,d\nu + \frac{BR^p}{K_0^2\,|x|^p} \int\limits_{S_1(0)} u(x)\,\mathrm{Y}(x^0)\,dx^0,$$

где $\nu = \mu_1 - \mu_2$, x, *— точка, принадлежащая окрестности начала координат, в которой* $u_1(x)$ *и* $u_2(x)$ *в представлении* (1. 1) *— гармонические.*

А. А. Гольдберг [1, с. 344] показал, что у мероморфной функции $f(z)$ достаточно большого роста с разделенными нулями и полюсами «мало» нулей и полюсов в том смысле, что величина $\varkappa(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\,(N(r,0) + N(r,\infty))/T(r,f)$ строго меньше 2.

Аналогичный результат верен для функций, представимых в виде (1,1), с разделенными массами. Обозначим $\varkappa(u) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\,(N(r, -u) + N(r,u))/T(r,u)$.

Теорема 3. *Пусть у функции* $u(x)$, *представимой в виде* (1,1) *массы р-разделены:* а) *если* $0 < \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-p}T(r,u) < \infty$, *то* $\varkappa(u) = 0$; б) *если* $\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-p}T(r,u) = \infty$, *то* $\varkappa(u) \leqslant 2/(1+K)$, *где постоянная* $K = K(\mathrm{Y}, A_1^p, A_2^p, m) > 0$.

В заключение этого пункта заметим, что в работе приводятся доказательства полученных результатов для случая $m > 2$, поскольку при $m = 2$ выкладки аналогичны.

§ 2. Вспомогательные определения и результаты

Нам потребуются некоторые факты теории сферических функций.

Многочлены Гегенбауэра $C_n^\nu(z)$ при целых значениях n определяются как коэффициенты при h^n в разложении функции $(1-2hz+h^2)^{-\nu}$ по степеням h (см., например, [6]):

$$(1-2hz+h^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(z)\,h^n, \quad |h| < |z + \sqrt{z^2-1}|.$$

Для наших целей достаточно рассмотреть это равенство при $\nu = (m-2)/2$ и $z = \cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Имеем

$$(1-2h\cos\theta+h^2)^{-\frac{m-2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta)\,h^n, \quad |h| < 1. \tag{2.1}$$

Этот ряд сходится при $|h| < 1$ равномерно по всем θ. Дифференцируя его по h, получим

$$\frac{(m-2)(\cos\theta - h)}{(1-2h\cos\theta+h^2)^{m/2}} = C_1^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta) + 2hC_2^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta) + \ldots +$$

$$+ nh^{n-1}C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta) + \ldots$$

Полученный ряд также сходится равномерно по всем θ при $|h| < 1$. Умножая обе части последнего равенства на $2h/(m-2)$ и складывая с равенством (2.1), приходим к соотношению

$$\frac{1-h^2}{(1-2h\cos\theta+h^2)^{m/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2n}{m-2}\right) C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta)\, h^n. \qquad (2.2)$$

Для многочленов Гегенбауэра справедлива следующая теорема сложения.

Теорема В [6]. *Пусть* T_n^l, $l = 1, 2, \ldots, h$, $h = (2n+m-2) \times \times \frac{(n+m-3)!}{(m-2)!\,n!}$ — *система, состоящая из* h *линейно-независимых вещественных сферических функций степени* n, *и пусть система* T_n^l *ортонормальна на* $S_1(0)$, *т. е. при* l, $k = 1, 2, \ldots, h$ *выполняются соотношения*

$$\int\limits_{S_1(0)} T_n^l(\xi)\, T_n^k(\xi)\, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq k, \\ 1 & \text{при } l = k. \end{cases}$$

Тогда для фиксированного единичного вектора ν *имеет место равенство*

$$C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta) = C_{m-2}^{\frac{m-2}{2}}(1)\, h^{-1}\sigma_m^{-1} \sum_{l=1}^{h} T_n^l(\upsilon)\, T_n^l(\xi),$$

где θ — *угол между векторами* υ *и* ξ.

Нам потребуются некоторые факты теории гармонических и субгармонических функций.

Пусть точка x принадлежит внутренности шара $E_R(0)$ и x^* — точка, полученная инверсией относительно $S_R(0)$ из точки x. Расстояния r и r^* произвольной точки y до точек x и x^* соответственно выражаются следующим образом:

$$r^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\theta,$$

$$r^{*2} = \left(\frac{R^2}{|x|}\right)^2 + |y|^2 - 2\frac{R^2}{|x|}|y|\cos\theta, \qquad (2.3)$$

где θ — угол между векторами x и y.

Для функции $u(x)$, представимой в виде разности двух субгармонических функций, хорошо известен [3] аналог формулы Пуассона — Иенсена. При дополнительном предположении, что функция $u(x)$ гармоническая в окрестности начала координат, этот аналог имеет вид

$$u(x) = \sigma_m^{-1}R^{-1}\int\limits_{S_R(0)} u(y)\frac{R^2-|x|^2}{(R^2+|x|^2-2R|x|\cos\theta)^{m/2}}\,dy +$$

$$+ \int\limits_{E_R(0)} Q(x, y)\, d_y\nu, \qquad (2.4)$$

где

$$Q(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{|x|\,r^*}{R}\right)^{2-m} - r^{2-m} & \text{при } m > 2, \\ \ln\frac{R}{|x|}\frac{r}{r^*} & \text{при } m = 2. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Для функции $u(x)$, представимой в виде разности двух субгармонических функций, справедливо соотношение [3]

$$T(r, u) = T(r, -u) + C, \tag{2.6}$$

где C — постоянная, не зависящая от r.

Определение 2. *Показателем сходимости меры μ, определенной в R^m, называется точная нижняя грань γ_μ тех чисел α, для которых сходится интеграл*

$$\int^{\infty} \frac{\mu(t)\,dt}{t^{\alpha+m-1}},$$

ли, что равносильно, интеграл

$$\int^{\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{\alpha+m-2}}.$$

Обозначим

$$h_*(r) = \begin{cases} \ln r & \text{при } m = 2, \\ -r^{2-m} & \text{при } m > 2 \end{cases}$$

и

$$h(x) = h_*(|x|).$$

Разложим функцию $h(x-y)$ в шаре $E_{|y|}(0)$ в ряд Тейлора по степеням координат точки x:

$$h(x-y) = h(y) + D_1(x, y) + D_2(x, y) + \ldots$$

Здесь через $D_n(x, y)$, $n = 1, 2, \ldots$, обозначены однородные (относительно x) слагаемые (многочлены степени n) ряда Тейлора.

Определение 3. *Каноническим ядром порядка q, $q = 0, 1, 2, \ldots$, называется функция $h_q(x, y) = h(x-y) - h(x) - D_1(x, y) - \ldots - D_q(x, y)$.*

Пусть мера μ равна нулю в некоторой окрестности начала координат и имеет конечный показатель сходимости γ_μ. Каноническим потенциалом этой меры называется функция

$$J[\mu] = J(\mu, x) = \int_{R^m} h_q(x, y)\, d_y\mu, \tag{2.7}$$

где q — наименьшее из тех целых чисел k, для которых сходится интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{k+m-1}}.$$

Канонический потенциал $J(\mu, x)$ удовлетворяет соотношению [2, с. 71, 80]

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-q-1} M(r, J[\mu]) = 0. \tag{2.8}$$

Лемма 1. Для канонического потенциала $J[\mu]$ *при* $r \to \infty$ *выполняются соотношения*

$m(r, J[\mu]) = o(r^{q+1})$, $m(r, -J[\mu]) = o(r^{q+1})$, $N(r, -J[\mu]) = o(r^{q+1})$.

Доказательство. Так как $m(r, J[\mu]) \leqslant M(r, J[\mu])$, то из соотношения (2.8) следует, что $m(r, J[\mu]) = o(r^{q+1})$ при $r \to \infty$.

По определению канонического потенциала $J(\mu, x)$ имеем

$$\int_0^\infty \frac{d\mu(t)}{t^{q+m-1}} < \infty,$$

т. е. $\mu(r) = o(r^{q+m-1})$ при $r \to \infty$ (см., например, [2, с. 71]). Поэтому в силу определения функции N следует, что $N(r, -J[\mu]) = o(r^{q+1})$ при $r \to \infty$.

Чтобы доказать второе соотношение, применим равенство (2. 6) к функции $J(\mu, x)$. Получим $m(r, J[\mu]) = m(r, -J[\mu]) + N(r, -J[\mu]) + C$. В силу уже полученных соотношений из этого равенства легко вытекает, что $m(r, -J[\mu]) = o(r^{q+1})$ при $r \to \infty$. Лемма 1 доказана.

Любая субгармоническая функция $u(x) \not\equiv -\infty$, гармоническая в окрестности начала координат, ассоциированная мера которой μ имеет конечный показатель сходимости, представляется в виде

$$u(x) = J(\mu, x) + \Phi(x), \tag{2.9}$$

где $\Phi(x)$ — функция, гармоническая всюду в R^m.

Если ассоциированные меры μ_1 и μ_2 субгармонических функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$ в представлении (1.1) имеют конечные показатели сходимости, то для функции $u(x)$ вида (1.1) имеем представление

$$u(x) = J(\mu_1, x) - J(\mu_2, x) + \Phi_1(x) - \Phi_2(x). \tag{2.10}$$

При некоторых предположениях относительно роста функции $u(x)$ и соответствующих ей распределений μ_1 и μ_2 функция $\Phi_1(x) - \Phi_2(x)$ — полином. Следующие леммы устанавливают факт такого рода.

Лемма 2. Если гармоническая функция $\Phi(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\varliminf_{r \to \infty} r^{-\rho} m(r, \Phi) < \infty, \tag{2.11}$$

то $\Phi(x)$ *— полином степени не выше* ρ.

Доказательство. Представим функцию $\Phi(x)$ в шаре $E_R(0)$ посредством интеграла Пуассона

$$\Phi(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_m R} \int_{S_R(0)} \frac{\Phi(y)\,dy}{(R^2 + |x|^2 - 2R|x|\cos\theta)^{m/2}} =$$

$$= \frac{1 - h^2}{\sigma} \int_{S_R(0)} \frac{\Phi(y)\,dy}{(1 + h^2 - 2h\cos\theta)^{m/2}}, \tag{2.12}$$

где θ — угол между векторами x и y, $h = |x|/R$.

В силу соотношения (2.2) из (2.12) получим разложение функции $\Phi(x)$ в шаре $E_R(0)$ в степенной ряд:

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2n/(m-2))\,h^n}{\sigma} \int\limits_{S_R(0)} \Phi(y)\, C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta)\, dy.$$

Каждый фигурирующий здесь интеграл является сферической функцией степени n. Поэтому однородные слагаемые ряда Тейлора функции $\Phi(x)$ имеют вид

$$\frac{1}{n!}\,\frac{\partial^n \Phi(tx)}{\partial t^n}\Bigg|_{t=0} = \frac{(1+2n/(m-2))\,h^n}{\sigma} \int\limits_{S_R(0)} \Phi(y)\, C_n^{\frac{m-2}{n}}(\cos\theta)\, dy.$$

В силу равенства (2.6) имеем

$$\max_{|x|=r} \left| \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^n \Phi(tx)}{\partial t^n}\Bigg|_{t=0} \right| \leqslant K\left(\frac{r}{R}\right)^n (m(R,\ \Phi) + m(R,\ -\Phi)) \leqslant$$

$$\leqslant K\left(\frac{r}{R}\right)^n (2m(R,\ \Phi) + C),$$

где постоянная K не зависит от r и R. В силу условия (2.11) из последнего неравенства следует утверждение доказываемой леммы.

Лемма 3. *Пусть функция $u(x)$ представима в виде (2.10) и удовлетворяет условию*

$$\varliminf_{r\to\infty} r^{-p} m(r,\ u) < \infty. \qquad (2.13)$$

Предположим также, что показатели сходимости мер μ_1 и μ_2 удовлетворяют неравенствам

$$\gamma[\mu_j] \leqslant p,\ \ j = 1,\ 2. \qquad (2.14)$$

Тогда $\Phi_1(x) - \Phi_2(x)$ в представлении (2.10) — гармонический полином степени не выше p.

Доказательство. Согласно (2.10), имеем $\Phi_1(x) - \Phi_2(x) = u(x) - J(\mu_1,\ x) + J(\mu_2,\ x)$ поэтому

$$m(r,\ \Phi_1 - \Phi_2) \leqslant m(r,\ u) + m(r,\ -J[\mu_1]) + m(r,\ J[\mu_2]). \qquad (2.15)$$

Из неравенств (2.14) следует, что числа q_j (см. (2.7)) удовлетворяют соотношениям $q_j + 1 \leqslant p$, $j = 1,\ 2$. Теперь, используя лемму 1, получаем, что $m(r,\ -J[\mu_1])$, $m(r,\ J[\mu_2])$ есть $o(r^p)$ при $r \to \infty$. Используя полученный факт и предположение (2.13) леммы, имеем из (2.15) $\varliminf_{r\to\infty} r^{-p} m(r,\ \Phi_1 - \Phi_2) < \infty$. В силу полученного соотношения из леммы 2 вытекает справедливость доказываемой леммы.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Обе части равенства (2.4) умножим на $K_0^{-2}Y(x^0)$ и проинтегрируем по сфере $S_1(0)$. Меняя порядок интегрирования в интегралах правой части, получим

$$K_0^{-2}\int\limits_{S_1(0)} u(x)\,Y(x^0)\,dx^0 = \sigma_m^{-1}R^{-1}\int\limits_{S_R(0)} u(y)\ \times$$

$$\times\left\{K_0^{-2}\int\limits_{S_1(0)} \frac{R^2-|x|^2}{(R^2+|x|^2-2R|x|\cos\theta)^{\frac{m}{2}}}\times Y(x^0)\,dx^0\right\}dy+$$

$$+\int\limits_{E_R(0)}\left\{K_0^{-2}\int\limits_{S_1(0)} Q(x,\ y)\,Y(x^0)\,dx^0\right\}d_y\nu. \qquad (3.1)$$

Используя соотношения (2.1), (2.2) и условие $\frac{|x|}{|y|}<1$, имеем

$$\frac{R^2-|x|^2}{(R^2+|x|^2-2R|x|\cos\theta)^{m/2}} = R^{2-m}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2n}{m-2}\right)C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta)\,\frac{|x|^n}{R^n}, \qquad (3.2)$$

$$Q(x,\ y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[R^{2-m}\left(\frac{|x|\,|y|}{R^2}\right)^n-|y|^{2-m}\frac{|x|^n}{|y|^n}\right]C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta). \qquad (3.3)$$

Подставляя выражения (3.2), (3.3) в равенство (3.1) и пользуясь тем фактом, что интегралы

$$\int\limits_{S_1(0)} C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta)\,Y(x^0)\,dx^0=0 \quad \text{при } n\neq p,$$

получим

$$K_0^{-2}\int\limits_{S_1(0)} u(x)\,Y(x^0)\,dx^0=\frac{\left(1+\frac{2p}{m-2}\right)|x|^p}{\sigma_m R^{p+m-1}}\int\limits_{S_R(0)} u(y)\left\{K_0^{-2}\ \times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{S_1(0)} C_p^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta)\,Y(x^0)\,dx^0\right\}dy+\int\limits_{E_{R(0)}}\left\{\frac{R^{2-m}\left(\frac{|x|\,|y|}{R^2}\right)^p-|y|^{2-m}\frac{|x|^p}{|y|^p}}{K_0^2}\ \times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{S_1(0)} C_p^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta)\,Y(x^0)\,dx^0\right\}d_y\nu. \qquad (3.4)$$

Теперь $K_0^{-2}Y(x^0)$ возьмем в качестве одной из функций некоторой полной ортонормированной системы вещественных сферических функций степени p. Применяя теорему B, из равенства (3.4) имеем

$$K_0^{-2}\int\limits_{S_1(0)} u(x)\,\Upsilon(x^0)\,dx^0=\frac{\left(1+\frac{2p}{m-2}\right)|x|^p}{\sigma R^p}\int\limits_{S_R(0)} u(y)\,\Upsilon(y^0)\,dy+$$

$$+\int\limits_{E_R(0)}\left\{R^{2-m}\left(\frac{|x||y|}{R^2}\right)^p-|y|^{2-m}\frac{|x|^p}{|y|^p}\right\}\Upsilon(y^0)\,d_y\nu.$$

Из последнего равенства непосредственно следует соотношение (1.6)

Теорема 2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Для доказательства необходимо установить одно вспомогательное предложение. Прежде чем формулировать его, заметим, что существует число $\eta>0$ такое, что

$$\Upsilon(x^0)\geqslant\eta \quad \text{при } x^0\in A_1^p, \tag{4.1}$$

$$\Upsilon(x^0)\leqslant-\eta \quad \text{при } x^0\in A_2^p.$$

Пусть $w_2(t,\ p)=t^p+t^{-p}\nu_0$. Имеет место

Лемма 4. *Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда справедливо неравенство*

$$\sigma^{-1}\int\limits_{S_R(0)} u(y)\,\Upsilon(y^\circ)\,dy\geqslant\frac{\eta(p+m-2)}{\left(1+\frac{2p}{m-2}\right)R^{\frac{m-2}{2}}}\times$$

$$\times\int\limits_0^R t^{-\frac{m}{2}}w_2\left(\frac{R}{t},\ p+\frac{m-2}{2}\right)\nu_0(t)\,dt+O(R^p). \tag{4.2}$$

Доказательство. По теореме 2 имеем

$$\sigma^{-1}\int\limits_{S_R(0)} u(y)\,\Upsilon(y^\circ)\,dy=\frac{R^{\frac{2-m}{2}}}{1+\frac{2p}{m-2}}\int\limits_{E_R(0)}|y|^{\frac{2-m}{2}}w_1\left(\frac{R}{|y|},\ p+\right.$$

$$\left.+\frac{m-2}{2}\right)\Upsilon(y^\circ)\,d_y\nu+O(R^p). \tag{4.3}$$

Используя первое неравенство из (4.1), получим

$$\int\limits_{E_R(0)}|y|^{\frac{2-m}{2}}w_1\left(\frac{R}{|y|},\ p+\frac{m-2}{2}\right)\Upsilon(y^\circ)\,d_y\mu_1=$$

$$=\int\limits_{E_R(0)\cap D_1^p}|y|^{\frac{2-m}{2}}w_1\left(\frac{R}{|y|},\ p+\frac{m-2}{2}\right)\Upsilon(y^\circ)\,d_y\mu_1+$$

$$+\int\limits_{E_R(0)\setminus D_1^p}|y|^{\frac{2-m}{2}}\omega_1\left(\frac{R}{|y|},\ p+\frac{m-2}{2}\right)\mathrm{Y}(y^\circ)\,d_y\mu_1\geqslant$$

$$\geqslant\eta\int\limits_{E_R(0)\cap D_1^p}|y|^{\frac{2-m}{2}}\omega_1\left(\frac{R}{|y|},\ p+\frac{m-2}{2}\right)d_y\mu_1-\max_{y^0\in A_1^p}|\mathrm{Y}(y^\circ)|\times$$

$$\times\int\limits_{E_R(0)\setminus D_1^p}|y|^{\frac{2-m}{2}}\omega_1\left(\frac{R}{|y|},\ p+\frac{m-2}{2}\right)d_y\mu_1=\eta\int\limits_{E_R(0)}|y|^{\frac{2-m}{2}}\times$$

$$\times\,\omega_1\left(\frac{R}{|y|},\ p+\frac{m-2}{2}\right)d_y\mu_1-(\eta+\max_{y^0\in A_1^p}|\mathrm{Y}(y^\circ))\int\limits_{E_R(0)\setminus D_1^p}|y|^{\frac{2-m}{2}}\times$$

$$\times\,\omega_1\left(\frac{R}{|y|},\ p+\frac{m-2}{2}\right)d_y\mu_1=\eta\int\limits_0^{R-0}t^{\frac{2-m}{2}}\omega_1\left(\frac{R}{t},\ p+\frac{m-2}{2}\right)d\mu_1(t)-$$

$$-(\eta+\max_{y^0\in A_1^p}|\mathrm{Y}(y^\circ)|)\int\limits_{E_R(0)\setminus D_1^p}|y|^{\frac{2-m}{2}}\omega_1\left(\frac{R}{|y|},\ p+\frac{m-2}{2}\right)d_y\mu_1.\qquad(4.4)$$

В силу условия (1.2) имеем

$$\int\limits_{E_R(0)\setminus D_1^p}|y|^{\frac{2-m}{2}}\omega_1\left(\frac{R}{|y|},\ p+\frac{m-2}{2}\right)d_y\mu_1\leqslant\int\limits_{E_R(0)\setminus D_1^p}\frac{R^p}{|y|^p}d_y\mu_1\leqslant$$

$$\leqslant R^p\int\limits_{R^m\setminus D_1^p}\frac{1}{|y|^p}d_y\mu_1=O(R^p).$$

Поэтому

$$\int\limits_{E_R(0)}|y|^{\frac{2-m}{2}}\omega_1\left(\frac{R}{|y|},\ p+\frac{m-2}{2}\right)\mathrm{Y}(y^\circ)\,d_y\mu_1\geqslant$$

$$\geqslant\eta\int\limits_0^{R-0}t^{\frac{2-m}{2}}\omega_1\left(\frac{R}{t},\ p+\frac{m-2}{2}\right)d\mu_1(t)+O(R^p)=$$

$$=\eta(p+m-2)\int\limits_0^R t^{-\frac{m}{2}}\omega_2\left(\frac{R}{t},\ p+\frac{m-2}{2}\right)\mu_1(t)\,dt+O(R^p).\qquad(4.5)$$

Проводя аналогичные рассуждения, имеем также

$$-\int\limits_{E_R(0)}|y|^{\frac{2-m}{2}}\omega_1\left(\frac{R}{|y|},\ p+\frac{m-2}{2}\right)\mathrm{Y}(y^\circ)\,d_y\mu_2\geqslant\eta(p+m-2)\times$$

$$\times\int\limits_0^R t^{-\frac{m}{2}}\omega_2\left(\frac{R}{t},\ p+\frac{m-2}{2}\right)\mu_2(t)\,dt+O(R^p).\qquad(4.6)$$

В силу неравенств (4.5), (4.6) из (4.3) получаем неравенство (4.2). Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Чтобы установить теорему, достаточно рассмотреть случай, когда $\varliminf\limits_{r\to\infty} r^{-p}T(r, u) < \infty$. Поскольку

$$\sigma^{-1}\int\limits_{S_R(0)} u(y)\,\Upsilon(y^\circ)\,dy \leqslant K\{m(R, u) + m(R, -u)\} \leqslant 2KT(R, u),$$

где постоянная K не зависит от R, из леммы 4 следует

$$T(R, u) \geqslant \frac{\eta(p+m-2)\,R^{\frac{2-m}{2}}}{2K\left(1+\frac{2p}{m-2}\right)}\int\limits_0^R t^{-\frac{m}{2}} \omega_2\left(\frac{R}{t}\quad p+\frac{m-2}{2}\right)\nu(t)\,dt +$$

$$+ O(R^p) \geqslant \frac{\eta(p+m-2)\,R^p}{2K\left(1+\frac{2p}{m-2}\right)}\int\limits_0^R \frac{\nu(t)\,dt}{t^{p+m-1}} + O(R^p). \qquad (4.7)$$

Деля обе части этого неравенства на R^p и устремляя затем R к ∞ по последовательности $R_k \uparrow \infty$ такой, что $T(R_k, u) = O(R_k^p)$, получаем сходимость интегралов

$$\int\limits_0^\infty \frac{\mu_1(t)\,dt}{t^{p+m-1}} < \infty, \qquad \int\limits_0^\infty \frac{\mu_2(t)\,dt}{t^{p+m-1}} < \infty. \qquad (4.8)$$

Таким образом, меры μ_1 и μ_2 удовлетворяют соотношениям

$$\gamma[\mu_j] \leqslant p, \quad j = 1, 2. \qquad (4.9)$$

Следовательно, для функции $u(x)$ справедливо представление (2.10)

$$u(x) = J(\mu_1, x) - J(\mu_2, x) + \Phi_1(x) - \Phi_2(x). \qquad (4.10)$$

Так как $m(r, u) \leqslant T(r, u)$, то, в силу (4.9) и леммы 3, функция $\Phi_1(x) - \Phi_2(x)$ в представлении (4.10) — гармонический полином степени не выше p.

Используя представление (4.10), имеем

$$T(r, u) = m(r, u) + N(r, u) = m(r, u) + N(r, -J[\mu_2]) \leqslant$$

$$\leqslant m(r, J[\mu_1]) + m(r, -J[\mu_2]) + m(r, \Phi_1 - \Phi_2) + N(r, -J[\mu_2]).$$

Из соотношений (4.9) следует, что числа q_j (см. (2.7)) удовлетворяют неравенствам $q_j + 1 \leqslant p$, $j = 1, 2$. Поэтому в силу леммы 1 $m(r, J[\mu_1])$, $m(r, -J[\mu_2])$ и $N(r, -J[\mu_2])$ есть $o(r^p)$ при $r \to \infty$. Используя этот результат, получаем, что

$$T(r, u) = m(r, \Phi_1 - \Phi_2) + O(r^p)$$

при $r \to \infty$.

Отсюда следует равенство

$$\lim_{r\to\infty} r^{-p}T(r, u) = \lim_{r\to\infty} r^{-p}m(r, \Phi_1 - \Phi_2).$$

Последний предел, очевидно, существует. Теорема 1 доказана. При доказательстве теоремы 1 установлен такой факт.

Замечание. Если у функции $u(x)$, представимой в виде (1.1), массы p-разделены и $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} r^{-p}T(r\ \ u) < \infty$, то

$$\int\limits_0^\infty \frac{\mu_1(t)\,dt}{t^{p+m-1}} < \infty, \quad \int\limits_0^\infty \frac{\mu_2(t)\,dt}{t^{p+m-1}} < \infty.$$

§ 5. Доказательство теоремы 3

Для доказательства нам потребуется

Лемма 5. *Пусть $u(x)$ — функция, представимая в виде* (1.1, *с p-разделенными массами. Справедливо следующее неравенство:*

$$\sigma^{-1}\int\limits_{S_R(0)} u(y)\,\Upsilon(y^\circ)\,dy \geqslant \frac{\eta(p+m-2)}{2p+m-2}\Bigg\{2N(R;\ -u,\ u) + R^{\frac{2-m}{2}} \times$$
$$\times\int\limits_0^R N(t;\ -u,\ u)\,t^{\frac{m}{2}-2}\Bigg[p\omega_1\left(\frac{R}{t},\ p+\frac{m-2}{2}\right) -$$
$$-(m-2)\left(\frac{t}{R}\right)^{p+\frac{m-2}{2}}\Bigg]dt\Bigg\} + O(R^p), \qquad (5.1)$$

где

$$N(t;\ -u,\ u) = N(t,\ -u) + N(t,\ u).$$

Доказательство. В силу леммы 4 имеем неравенство

$$\sigma^{-1}\int\limits_{S_R(0)} u(y)\,\Upsilon(y^\circ)\,dy \geqslant \frac{\eta(p+m-2)R^{\frac{2-m}{2}}}{1+\dfrac{2p}{m-2}} \times$$
$$\times\int\limits_0^R t^{-\frac{m}{2}}\omega_2\left(\frac{R}{t},\ p+\frac{m-2}{2}\right)\nu_0(t)\,dt + O(R^p). \qquad (5.2)$$

В силу определения (1.3) функции N имеем

$$\int\limits_0^R t^{-\frac{m}{2}}\omega_2\left(\frac{R}{t},\ p+\frac{m-2}{2}\right)\mu_1(t)\,dt = \frac{2R^{\frac{m-2}{2}}}{m-2}N(R,\ -u) +$$
$$+\frac{1}{m-2}\int\limits_0^R t^{\frac{m}{2}-2}N(t,\ -u)\Bigg\{p\omega_1\left(\frac{R}{t},\ p+\frac{m-2}{2}\right) -$$
$$-(m-2)\left(\frac{t}{R}\right)^{p+\frac{m-2}{2}}\Bigg\}dt, \qquad (5.3)$$

$$\int\limits_0^R t^{-\frac{m}{2}}\omega_2\left(\frac{R}{t},\ p+\frac{m-2}{2}\right)\mu_2(t)\,dt =$$

$$= \frac{2R^{\frac{m-2}{2}}}{m-2} N(R, u) + \frac{1}{m-2}\int_0^R t^{\frac{m}{2}-2} N(t, u) \times$$

$$\left[p\omega_1\left(\frac{R}{t}, p+\frac{m-2}{2}\right) - (m-2)\left(\frac{t}{R}\right)^{p+\frac{m-2}{1}}\right]dt\Big\} + O(R^p), \quad (5.4)$$

Поэтому, в силу выражений (5.3), (5.4), имеем

$$\frac{\eta(p+m-2)R^{\frac{2-m}{2}}}{1+\frac{2p}{m-2}}\int_0^R t^{-\frac{m}{2}}\omega_2\left(\frac{R}{t}, p+\frac{m-2}{2}\right)\nu_0(t)\,dt =$$

$$= \frac{\eta(p+m-2)}{2p+m-2}\Big\{2N(R; -u, u) + R^{\frac{2-m}{2}}\int_0^R N(t; -u, u)\, t^{\frac{m}{2}-2} \times$$

$$\times\left[p\omega_1\left(\frac{R}{t}, p+\frac{m-2}{2}\right) - (m-2)\left(\frac{t}{R}\right)^{p+\frac{m-2}{2}}\right]dt\Big\}.$$

Используя полученное равенство приходим к соотношению (5.1). Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 3. В случае а) по теореме 1 имеем $\varliminf\limits_{r\to\infty} r^{-p}T(r, u) > 0$, т. е. $r^p = O(T(r, u))$ при $r\to\infty$. В силу замечания к теореме 1 $\mu_i(r) = o(r^{p+m-2})$, $i = 1, 2$, при $r\to\infty$. Используя выражение для функции N, выводим, что $N(r, u) = o(r^p)$, $N(r, -u) = o(r^p)$ при $r\to\infty$. Отсюда следует, что $\varkappa(u) = 0$.

В случае б) по теореме 1 имеем

$$\lim_{r\to\infty} r^{-p}T(r, u) = \infty.$$

т. е.

$$r^p = o(T(r, u)).$$

В силу (4.8) и леммы 5 имеем

$$K\{m(R, u) + m(R, -u)\} \geqslant \frac{\eta(p+m-2)}{2p+m-2}\Big\{2N(R; -u, u) + R^{\frac{2-m}{2}} \times$$

$$\times\left\{2N(R; -u, u) - \frac{N(R; -u, u)}{R^{p+m-2}}\int_0^R t^{p+m-3}dt\right\}\Big\} + O(R^p) =$$

$$= \frac{\eta(p+m-2)}{2p+m-2}\left(2 - \frac{1}{p+m-2}\right)N(R; -u, u) + O(R^p).$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства величину $KN(R;\ -u;\ u)$ и используя соотношение (2.6), имеем

$$K\{2T(R,\ u)+C\}\geqslant\left[\frac{\eta(2(p+m)-5)}{2p+m-2}+K\right]N(R;\ -u,u)+O(R^p)=$$
$$=\left[\frac{\eta(2(p+m)-5)}{2p+m-2}+K\right]N(R;\ -u,\ u)+o(T(R,\ u)).$$

Деля обе части последнего неравенства на $KT(R,\ u)$ и полагая $R\to\infty$, получаем требуемое. Теорема 3 доказана.

Автор благодарит В. С. Азарина и И. В. Островского за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 592 с.
2. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.
3. Привалов И. И. Субгармонические функции. М.—Л., ГИТТЛ, 1937. 199 с.
4. Тиман. А. Ф., Трофимов В. Н. Введение в теорию гармонических функций. М., «Наука», 1968. 207 с.
5. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1952. 476 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., «Наука», 1966. 295 с.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972. 735 с.
8. Nevanlinna R. Le theorème de Picard—Borel et la thèorie des fonctions meromorphes. Paris, 1929. 174 p.
9. Ахиезер Н. И. Новий вивід необхідних умов приналежності цілої функції цілого порядку до певного типу.— «Зап фіз.-мат. від. АН УРСР», 1927, т. 2, № 3, с. 29—33.
10. Kneser H. Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher.— «Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung», 1938, Bd. 48, S. 1—28.
11. Rubel L. A., Taylor B. A.—«Bull. Soc. Math. Fr.», 1968, a. 96, N 1, p. 53—96.

Поступила 7 декабря 1972 г.