Ю. И. Любиц, д-р. физ.-мат. наук

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Настоящая заметка примыкает к статье [1] и посвящена квадратичным отображениям n-мерного вещественного пространства $\mathbb{R}^n$ в себя,

$$V : x' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \ (1 \leq j \leq n),$$

сохраняющим гиперплоскость

$$\langle x \rangle \equiv \sum_{i}^{n} x_i = 1$$

и удовлетворяющим в этой гиперплоскости условию $V^2 = V$. 
Для этого класса отображений в [1] была получена следующая квазитреугольная форма:

\[ s' = s^2, \]
\[ u' = su + B(u, v) + Kv, \]
\[ v' = Qu, \]

где \( u, v \) — многомерные, вообще говоря*, координатные блоки, дополняющие линейную форму \( s \) до системы координат в \( \mathbb{R}^n \);
\( K, Q \) — квадратичные отображения; \( B \) — билинейное отображение, причем

\[ KQu = 0, \quad B(u, Qu) = 0, \quad B(Kv, Qu) = 0, \quad B(B(u, v), Qu) = 0 \]

и

\[ \hat{Q}(u, Kv) = 0, \quad \hat{Q}(u, B(u, v)) = 0, \quad Q(B(u, v)) = 0; \]

где \( \hat{Q} \) — поляра отображения \( Q \).

Далее, в [1, 2] было доказано, что размерности блоков \( u, v \) инвариантны относительно способа приведения к квазитреугольному виду, что позволяет назвать пару чисел \((m, \delta)\), где \( m = \dim u + 1, \delta = \dim v = n - m \), топом отображения \( V \).

Линейная форма \( f \) называется инвариантной (для отображения \( V \)), если \( f(Vx) = s(x)f(x) \) (т.е. \( f(Vx) = f(x) \) при \( s(x) = 1 \)). Инвариантные линейные формы образуют подпространство \( I_V \), размерность которого не превосходит \( m \), ибо, как нетрудно доказать (см. [1]), инвариантные линейные формы не зависят от \( v \). Если \( \dim I_V = m \), то отображение \( V \) называется правильным. В этом и только в этом случае \( K = 0, B = 0 \) (независимо от способа приведения к квазитреугольному виду). Правильные отображения представляют особый интерес в связи с их приложениями в математической генетике. Поэтому полезно иметь работающие признаки правильности. Известные нам признаки связаны с рассмотрением пространства \( N_V \) линейных форм, исчезающих под действием \( V \):

\[ N_V \{ g \mid g(Vx) = 0 \}. \]

Размерность этого пространства не превосходит \( \delta \), ибо, как нетрудно доказать (см. [1]), исчезающие линейные формы не зависят от \( s, u \). Точнее, \( \dim N_V = \delta = \dim (\text{Lin} \text{Im} Q) \).

В [1] были указаны некоторые случаи, когда из \( N_V = 0 \) следует правильность отображения, а именно: 1) \( m \geq 2, \delta = 1 \); 2) \( m = 3, \delta = 2 \); 3) \( m = 3, \delta = 3 \), и было далее сказано (с. 72), что «для остальных типов это неверно». К сожалению, последнее утверждение само неверно, что и побудило нас к дальнейшему исследованию. Результаты которого излагаются ниже.

* Не исключено, что \( u \) или \( v \) отсутствуют. При отсутствии \( u \) будет \( v' = 0 \), при отсутствии \( v \) \( u' = su \).
** Или отсутствует \( u \).
Теорема 1. Если

\[ \dim N_\nu < \delta - \frac{(m-1)(m-2)}{2} \]  \hspace{1cm} (1)

или \( \delta = 1, \dim N_\nu = 0, \) или, наконец, \( \delta = 0, \) то отображение \( V \) правильно.

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (1). Покажем, что подпространство

\[ \text{Ker} \ \hat{Q} = \{ \omega | \forall u : \hat{Q}(u, \omega) = 0 \} \]

равно нулю.

Пусть \( e_1 \in \text{Ker} \ \hat{Q}, \ e_1 \neq 0. \) Дополним \( e_1 \) в \( u \)-подпространстве до базиса \( e_1, \ldots, e_{m-1}. \) В этом базисе \( Q \) не зависит от первой координаты. Тем самым,

\[ \dim (\text{Lin Im} \ Q) \leq \frac{(m-1)(m-2)}{2}, \]  \hspace{1cm} (2)

а с другой стороны, эта размерность равна \( \delta - \dim N_\nu. \) Следовательно, вопреки (1),

\[ \dim N_\nu \geq \delta - \frac{1}{2} (m-1)(m-2). \]

Итак, \( \text{Ker} \ \hat{Q} = 0. \) Но \( \text{Im} \ K \subset \text{Ker} \ \hat{Q}. \) Поэтому \( K = 0. \) Остается показать, что \( B = 0. \)

Запишем \( B \) в виде

\[ B(u, v) = \sum_{i=1}^{\delta} v_i B_i u, \]

где \( B_i \) — линейные операторы. Так как \( \hat{Q}(u, B(u, v)) = 0, \) то

\[ \hat{Q}(u, B_i u) = 0 \ (i = 1, \ldots, \delta) \]  \hspace{1cm} (3)

и, так как \( Q(B(u, v)) = 0, \) то

\[ \hat{Q}(B_i u, B_k u) = 0 \ i, k = 1, \ldots, \delta. \]  \hspace{1cm} (4)

Введем в \( u \)-подпространстве евклидову метрику с тем, чтобы иметь представление \( \hat{Q}(u, \omega) = (Su, \omega), \) где \( S \) — система из \( \delta \) самосопряженных операторов. Тогда (3) и (4) запишутся в виде

\[ (B_i^* Su, u) = 0, \ (B_i^* SB_i u, u) = 0 \]

и, так как пространство вещественно, а \( S^* = S, \) то

\[ B_i^* Su + SB_i = 0, \ B_k^* SB_i + B_i^* SB_k = 0. \]

Отсюда следует

\[ B_i^* SB_k + SB_i B_k = 0, \ B_k^* SB_i + SB_k B_i = 0 \]
\[ S(B_iB_k + B_kB_i) = 0, \]

т. е.

\[ \text{Im} (B_iB_k + B_kB_i) \subset \text{Ker} S. \]

Но \( \text{Ker} S = \text{Ker} Q = 0. \) Поэтому \( B_iB_k + B_kB_i = 0. \)

В частности,

\[ B_i^2 = 0 \quad (i = 1, \ldots, \delta). \] (5)

Если \( B \neq 0, \) то, например, \( B_1 \neq 0, \) но, согласно (5), \( B_1^2 = 0. \)

Рассмотрим жорданов базис \( e_1, \ldots, e_{m-1} \) оператора \( B_1. \) Будем считать его ортонормированным в выбранной метрике. Тогда

\[ B_1e_1 = 0, \quad B_1e_2 = e_1, \quad (B_1e_k, e_i) = 0 \quad (k > 2). \]

Пусть \( X \) — самосопряженный оператор, удовлетворяющий уравнению

\[ B_1^*X + XB_1 = 0. \] (6)

Тогда

\[ Xe_1 = XB_1e_2 = -B_1^*Xe_2, \]

откуда

\[ (Xe_1, e_1) = -(Xe_2, B_1e_1) = 0 \]

и

\[ (Xe_1, e_2) = -(Xe_2, B_1e_2) = -(Xe_2, e_1) = -(Xe_1, e_2), \]

т. е. \( (Xe_1, e_2) = 0. \) Далее, при \( k > 2 \)

\[ (Xe_1, e_k) = -(Xe_2, B_1e_k) = -\sum_{i=2}^{m-1} (Xe_2, e_i) (e_i, B_1e_k). \]

Таким образом, действие оператора \( X \) определяется матричными элементами \( (Xe_j, e_i) \) \( (j, i \geq 2). \) Следовательно, размерность пространства самосопряженных решений уравнения (6) не превосходит \( \frac{1}{2} (m - 1) (m - 2). \) С другой стороны, этому уравнению удовлетворяют все операторы системы \( S, \) порождающие квадратичные отображения \( Q. \) Мы снова приходим к неравенству (2), противоречащему (1). Поэтому \( B = 0. \)

Рассмотрим теперь случай \( \delta = 1, \) \( \dim N_V = 0. \) Если при этом \( m < 2, \) то выполняется неравенство (1), т. е. мы имеем предыдущий случай. Пусть \( m > 2. \) Тогда

\[ s' = s^2, \quad u' = su + vBu + kv^2, \quad v' = q(u), \]

где \( q — \) квадратичная форма отличная от нуля в силу условия \( N_V = 0; \) \( k — \) вектор; \( B — \) линейный оператор. Так как \( KQ = 0, \)

то \( kq(u) = 0, \) следовательно, \( k = 0. \) Так как \( B(u, Qu) = 0, \) то \( q(u)Bu = 0, \) следовательно, \( B = 0. \)

Отображение оказывается правильным.

Случай \( \delta = 0 \) вполне трансивален.
Следствие 1. Если
\[ \delta > \frac{1}{2} (m - 1) (m - 2) \] (7)
или \( \delta = 1 \), или \( \delta = 0 \), то условие \( N_V = 0 \) влечет правильность отображения \( V \).

Следствие 2. Во всех размерностях \( n \leq 5 \) условие \( N_V = 0 \) влечет правильность отображения \( V \).

Действительно, если \( \delta \geq 2 \), то \( m \leq 3 \) и
\[ \frac{1}{2} (m - 1) (m - 2) \leq 1 < \delta. \]

Замечание. Если вместо (7) выполнено более сильное неравенство
\[ \delta > \frac{1}{2} m (m - 1), \] (8)
tо \( N_V \neq 0 \), ибо всегда
\[ \dim (\text{Lin Im } Q) \leq \frac{1}{2} m (m - 1). \]

Поскольку в случае (8) следствие 1 бессодержательно, хотя и верно. Однако при
\[ \delta \leq \frac{1}{2} m (m - 1) \]
oно уже содержательно, как показывает пример
\[ s' = s^2, \quad u_i = s u_i (1 \leq i \leq m - 1), \quad v_{ik} = u_{ik}, \]
где \( j < k \) и число различных пар \( (j, k) \) равно \( \delta \).

Теорема 1 неулучшаема в терминах размерностей \( m, \delta, \dim N_V \), ибо справедлива

Теорема 2. Если целые числа \( m, \delta, d (m \geq 1, \delta \geq 2, 0 \leq d \leq \delta - 2) \) удовлетворяют неравенству
\[ d \geq \delta - \frac{1}{2} (m - 1) (m - 2), \] (9)
tо существует неправильный оператор \( V \) типа \((m, \delta)\), для которого \( \dim N_V = d \).

Для доказательства нам понадобится Лемма. Пусть
\[ 2 \leq k \leq \frac{1}{2} p (p + 1). \] (10)

Тогда в \( R^p \) существует \( k \) линейно независимых квадратичных форм \( q_i (\omega) \) и \( k \) линейных форм \( \varphi_i (\omega) \) таких, что
\[ \sum_{i=1}^{k} q_i (\omega) \varphi_i (\omega) = 0. \]

Доказательство — индукция по \( k \). В \( R^2 \) берем любые линейно независимые формы \( \varphi_1, \varphi_2 \) и полагаем \( q_1 = - \varphi_2 \psi, q_2 = - \varphi_1 \psi \), где \( \psi \neq 0 \) — любая линейная форма.
Пусть для некоторого \( k < \frac{1}{2} p (p + 1) \) уже есть требуемые системы форм
\[
q_1, \ldots, q_k; \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_k.
\]
Возьмем любую квадратичную форму \( q \), не принадлежащую линейной оболочке форм \( q_1, \ldots, q_k \), что возможно благодаря неравенству \( k < \frac{1}{2} p (p + 1) \). Системы \( k + 1 \) форм
\[
q_1, \ldots, q_{k-1}, \quad \frac{1}{2} q_k - q, \quad \frac{1}{2} q_k + q;
\]
\[
\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \quad \varphi_k, \quad \varphi_k
\]
удовлетворяют всем требуемым условиям.

Теперь можно указать конструкцию отображения, требуемого в теореме 2. Выберем в \( (m + \delta) \)-мерном пространстве систему координат
\[
s, \quad u_1, \ldots, u_{m-1}, \quad v_1, \ldots, v_{\delta-d}, \quad v_{\delta-d+1}, \ldots, \quad v_{\delta}.
\]
Так как
\[
2 \leq \delta - d \leq \frac{1}{2} (m - 1) (m - 2),
\]
то существуют, согласно лемме, \( \delta - d \) линейно независимых квадратичных форм \( q_i (u_2, \ldots, u_{m-1}) \) и столько же линейных форм \( \varphi_i (u_2, \ldots, u_{m-1}) \), связанных тождеством
\[
\sum_{i=1}^{\delta-d} q_i (u) \varphi_i (u) = 0.
\]
Отображение \( V \), заданное формулами
\[
s' = s^2,
\]
\[
u_i' = s u_i + \sum_{i=1}^{\delta-d} v_i \varphi_i (u),
\]
\[
u_i = s u_i \quad (i = 2, \ldots, m - 1),
\]
\[
v_i = q_i (u) \quad (i = 1, \ldots, \delta - d),
\]
\[
v_i = 0 \quad (i = \delta - d + 1, \ldots, \delta),
\]
сохраняет гиперплоскость \( s (x) = 1 \), удовлетворяет условию \( V^2 = V \) при \( s = 1 \) (благодаря (11)), имеет, очевидно, тип \( (m, \delta) \), \( \dim N_V = d \) (благодаря линейной независимости форм \( q_i (u) \)) и, очевидно, \( V \) неправильно.

Следствие 3. Если
\[
2 \leq \delta \leq \frac{1}{2} (m - 1) (m - 2),
\]
то существует неправильный оператор \( V \), для которого \( \dim N_V = 0 \).
Этот результат исчерпывающее дополняет следствие 1.

Следствие 4. В размерности \( n = 6 \) существует неправильный оператор, \( V \), для которого \( N_V = 0 \).
Этот оператор имеет тип \( (4,2) \).

41
ЛИТЕРАТУРА


2. Любич Ю. И. Письмо в редакцию. — "Успехи мат. наук", 1971, т. XXVI, вып. 6, с. 2—265.

Поступила 24 ноября 1972 г.