УДК 517

А. И. Милославский

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОПЕРАТОРОВ КЛАССА K

Класс K линейных операторов в банаховом пространстве был введен и изучался Ю. И. Любичем в работах [1—3]. По определению, оператор T принадлежит классу K, если для любых натуральных n, m $(n > m)$ выполняются неравенства

$$\| T^m x \| \leqslant C_{n,m} \| T^n x \|^{\frac{m}{n}} \| x \|^{\frac{n-m}{n}} \quad (x \in D_{T^n}) \tag{1}$$

с некоторыми константами $C_{n,m} \geqslant 0$. В работе [2] было показано, что простейшее из неравенств (1)

$$\| Tx \| \leqslant C_{2,1} \| T^2 x \|^{\frac{1}{2}} \| x \|^{\frac{1}{2}} \quad (x \in D_{T^2}) \tag{2}$$

влечет остальные с константами

$$C_{n,m} \leqslant C_{2,1}^{m(n-m)}. \tag{3}$$

Поэтому, если $C_{2,1} \leqslant 1$, т. е.

$$\| Tx \| \leqslant \| T^2 x \|^{\frac{1}{2}} \| x \|^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

то все $C_{n,m} \leqslant 1$. С другой стороны, как показано в [2], $C_{n,m} \geqslant 1$ для ограниченных операторов. Поэтому для ограниченных операторов, удовлетворяющих условию (4), точное значение $C_{n,m}=1$. В работе [3] был рассмотрен ограниченный оператор класса K в гильбертовом пространстве и было доказано, что если для него $C_{n,m}=C_{n,n-m}=1$ при некоторых n и m, если, далее, спектр оператора имеет лишь конечное множество предельных точек, то оператор $T^{d(n,m)}$, где $d(n,m)$ — наибольший общий делитель чисел n и m, нормален. Позднее В. Истратеску опубликовал [4] более слабый результат: если выполняется неравенство (4) и оператор T вполне непрерывен, то T — нормален. Очевидно, какие-то ограничения на спектр необходимы, так как неравенство (4) выполняется для всех изометрий, в том числе для неунитарных. По-видимому, спектр должен быть достаточно редким множеством. Например, если оператор гипонормален, т. е. $\|T^*x\| \leqslant \|Tx\|$ (это свойство сильнее неравенства (4)), то, как доказал К. Путнам [5], оператор T будет нормальным при условии, что плоская мера его спектра равна нулю.

В настоящей заметке доказана следующая

Теорема. *Если для ограниченного оператора T класса K в гильбертовом пространстве H выполняются равенства*

$$C_{n,m}=1,\ C_{n,n-m}=1 \tag{5}$$

при некоторых n, m и если спектр оператора лежит на счетном множестве окружностей с центром в точке $\lambda=0$ (в частности, если он счетен), то оператор $T^{d(n,m)}$ нормален.

Доказательство этой теоремы является уточнением доказательства сформулированного выше результата [3].

Лемма 1. *Пусть T — ограниченный оператор класса K в банаховом пространстве. Если для* него $C_{n,m}=1,\ C_{n,n-m}=1$

при некоторых $n>m>0$, то

$$C_{n+pqm,\,pm}=1,\ C_{n+pq(n-m),\,p(n-m)}=1\ \ (p\geqslant 1,\ q\geqslant 0). \tag{6}$$

Доказательство. В силу (5) для всех x имеет место неравенство

$$\|T^{n-m}x\| \leqslant \|T^n x\|^{\frac{n-m}{n}}\|x\|^{\frac{m}{n}}.$$

Заменяя здесь x на $T^m x$, получаем

$$\|T^n x\| \leqslant \|T^{n+m}x\|^{\frac{n-m}{n}}\|T^m x\|^{\frac{m}{n}},$$

откуда в силу неравенства

$$\|T^m x\| \leqslant \|T^n x\|^{\frac{m}{n}}\|x\|^{\frac{n-m}{n}}, \tag{7}$$

также вытекающего из (5),

$$\|T^n x\| \leqslant \|T^{n+m}x\|^{\frac{n}{n+m}}\|x\|^{\frac{m}{n+m}}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует

$$\| T^m x \| \leqslant \| T^{n+m} x \|^{\frac{m}{n+m}} \| x \|^{\frac{n}{n+m}}. \tag{9}$$

Неравенства (8) и (9) означают, что $C_{n+m,\,m} = C_{n+m,\,n} = 1$. По индукции $C_{n+qm,\,m} = 1$ $(q \geqslant 0)$. Из этого равенства и из (9) легко показать, что $C_{n+pm,\,pm} = 1$ $(p \geqslant 1)$. Последние два соотношения доказывают первое из равенств (6). Второе из этих равенств доказывается аналогично.

Лемма 2. *Если оператор T удовлетворяет условиям леммы 1, то*

$$\| T^m \| = r(T^m), \quad \| T^{n-m} \| = r(T^{n-m}),$$

где $r(T)$ — спектральный радиус оператора T.

Доказательство. Лемма 2 следует из леммы 1 [3].

Лемма 3. *Если оператор T удовлетворяет условиям леммы 1 и спектр оператора T лежит на окружности $|\lambda| = R$, то при $R \neq 0$ оператор $(R^{-1}T)^{d(n,\,m)}$ является унитарным, т. е. обратимой изометрией. В случае $R = 0$ оператор T нулевой.*

Доказательство. Если $R = 0$, то из леммы 2 следует, что $T^m = 0$. Оператор T принадлежит классу K, следовательно, для всех векторов x из банахова пространства

$$\| Tx \| \leqslant C_{m,\,1} \| T^m x \|^{\frac{1}{m}} \| x \|^{\frac{m-1}{m}},$$

откуда $T = 0$.

Если $R \neq 0$, то существует ограниченный оператор T^{-1}, причем он принадлежит классу K и

$$C_{n,\,m}(T^{-1}) = C_{n,\,n-m}(T), \quad C_{n,\,n-m}(T^{-1}) = C_{n,\,m}(T)$$

(см. [2]). Следовательно, T^{-1} тоже удовлетворяет условиям леммы 2, поэтому

$$\| T^{\pm m} \| = r(T^{\pm m}) = R^{\pm m}$$

и

$$\| T^{\pm(n-m)} \| = r(T^{\pm(n-m)}) = R^{\pm(n-m)}.$$

Отсюда следует, что операторы $(R^{-1}T)^m$, $(R^{-1}T)^{n-m}$ унитарны. Так как $d(n,\,m) = km + ln$ для некоторых целых k и l, то и $(R^{-1}T)^{d(n,\,m)}$ унитарен.

Лемма 4. *Пусть оператор T в гильбертовом пространстве H удовлетворяет условиям леммы 1 и спектр его принадлежит объединению окружности $|\lambda| = 1$ и компакта, находящегося в круге $|\lambda| < 1$. Тогда $T = U \oplus T_1$, где $U^{d(n,\,m)}$ унитарен, а оператор T_1 удовлетворяет условиям леммы 1.*

Доказательство. По теореме Рисса $H = L \dotplus M$, где L и M — инвариантные относительно оператора T подпространства, причем в L действует часть U оператора T, отвечающая пересечению спектра оператора T с окружностью, а в M — часть T_1 оператора T, отвечающая пересечению спектра оператора T с внутренним компактом. По лемме 3 оператор $U^{d(n,\,m)}$

является унитарным оператором. Ясно также, что оператор T_1 удовлетворяет условиям леммы 1. Остается доказать ортогональность L и M. С этой целью рассмотрим аналогично [3] функцию

$$f(re^{i\theta}) = \frac{\| T^{pm}(x + re^{i\theta} y) \|}{\| x + re^{i\theta} y \|^{\frac{n+(q-1)pm}{n+pqm}} \| T^{n+pqm}(x + re^{i\theta} y) \|^{\frac{pm}{n+pqm}}},$$

где $x \in L$ ($\|x\| = 1$), $y \in M$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, p, q — целые ($p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$). В силу леммы 1 $f(re^{i\theta}) \leqslant 1$ при $r > 0$ и $f(0) = 1$. Следовательно,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \tag{10}$$

После элементарных вычислений равенство (10) приобретает вид

$$\operatorname{Re} e^{i\theta} \left[(T^{pm} y, \ T^{pm} x) - \frac{n + (q-1)pm}{n + pqm} (y, \ x) - \right.$$

$$\left. - \frac{pm}{n + pqm} (T^{n+pqm} y, \quad T^{n+pqm} x) \right] = 0.$$

Варьируя θ, можно добиться чтобы

$$(T^{pm} y, \ T^{pm} x) = \frac{n + (q-1)pm}{n + pqm} (y, \ x) + \frac{pm}{n + pqm} (T^{n+pqm} y, \quad T^{n+pqm} x). \tag{11}$$

Устремляя q к бесконечности и учитывая, что

$$\| T^{n+pqm} y \| \leqslant \| y \|, \ \| T^{n+pqm} x \| = 1,$$

получим

$$(T^{pm} y, \ T^{pm} x) = (y, \ x). \tag{12}$$

Заметим, что

$$T^{pm} y = T_1^{pm} y, \ \| T_1^{pm} \| = r(T_1^{pm}) = r(T_1^m)^p,$$

и так как спектр оператора T_1 находится внутри единичного круга, то $r(T_1^m) < 1$. Оценив левую часть (12) по неравенству Шварца и устремив p к бесконечности, получим $L \perp M$.

Следствие 1. *Если оператор T в гильбертовом пространстве H удовлетворяет условиям леммы 1 и спектр его находится в объединении окружности $|\lambda| = 1$ и компакта, находящегося в области $|\lambda| > 1$, то $T = U \oplus T_1$, где $U^{d(n,m)}$ унитарен, а T_1 удовлетворяет условиям леммы 4.*

Для доказательства достаточно применить лемму 4 к оператору T^{-1}.

Лемма 5. *Пусть оператор T в гильбертовом пространстве удовлетворяет условиям леммы 1 и в инвариантном подпространстве L_1 оператор $T^{d(n,m)}$ имеет вид $r_1 U_1$, где U_1 — унитарный оператор в L_1, а в инвариантном подпространстве L_2 оператор $T^{d(n,m)}$ имеет вид $r_2 U_2$, где U_2 — унитарный оператор в L_2, причем $r_1 \neq r_2$. Тогда $L_1 \perp L_2$.*

Доказательство. Эта лемма доказывается тем же способом, что и лемма 4, и мы ее доказательства приводить не будем.

Лемма 6. Пусть оператор T в гильбертовом пространств H удовлетворяет условиям леммы 1 и в инвариантном подпр странстве L оператор $T^{d(n,m)}$ индуцирует унитарный операто U, а в инвариантном подпространстве M — унитарный операто V. Тогда в инвариантном подпространстве $L+M$ операто $T^{d(n,m)}$ индуцирует также унитарный оператор.

Доказательство. Рассмотрим функцию f, введенную лемме 4, где $x \in L$, $\|x\|=1$, $y \in M$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $p=1$ $q \geqslant 0$ — целое. При малых r знаменатель этой функции отличе от нуля. Легко видеть, что $f(0)=1$, $f(re^{i\theta}) \leqslant 1$ при малых положительных r. Продифференцировав функцию $f(re^{i\theta})$ и положив $r=0$, после преобразований получим равенство (11), в котором $p=1$. Устремляя в этом равенстве q к бесконечност и учитывая, что

$$\|T^{d(n,m)}x\| = \|Ux\| = \|x\|, \ \|T^{d(n,m)}y\| = \|Vy\| = \|y\|,$$

получим

$$(T^m y,\ T^m x) = (y,\ x).$$

Отсюда следует, что $\|T^m(x+y)\| = \|x+y\|$.

Те же рассуждения, примененные к оператору T^{n-m}, дают

$$\|T^{n-m}(x+y)\| = \|x+y\|.$$

Так как множество векторов

$$N = \{x+y : x \in L,\ y \in M\}$$

является плотным в $L+M$, то в силу ограниченности оператора T следует, что операторы T^m и T^{n-m} изометричны в $L+M$. Покажем, что операторы T^m и T^{n-m} отображают N на себя. Пусть $f=x+y$, где $x \in L$, $y \in M$,

$$x = U^{\overline{d(m,n)}^{\,m}} x_1, \quad y = V^{\overline{d(n,m)}^{\,m}} y_1.$$

Положим $g = x_1 + y_1$, Тогда

$$T^m g = T^m x_1 + T^m y_1 = U^{\overline{d(m,n)}^{\,m}} x_1 + V^{\overline{d(n,m)}^{\,m}} y_1 = R.$$

Те же рассуждения показывают, что T^{n-m} отображает N на себя. Так как у изометрии область значений замкнута, то операторы T^m и T^{n-m}, а следовательно, и $T^{d(n,m)}$ являются унитарными операторами.

Следствие 2. *Если у оператора $T^{d(n,m)}$ имеется набор инвариантных подпространств $\{H^\alpha\}$, в каждом из которых оператор $T^{d(n,m)}$ индуцирует унитарный оператор, то в подпространстве $\sum\limits_\alpha H^\alpha$ оператор $T^{d(n,m)}$ также индуцирует унитарный оператор.*

Доказательство. Применение леммы 6 к конечному числу подпространств $\{H^{\alpha_i}\}_{i=1}^k$ показывает, что оператор $T^{d(h,m)}$

изометрически отображает на себя плотное в подпространстве $\sum_\alpha H^\alpha$ множество векторов

$$\left\{f=\sum_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}: f_{\alpha_i}\in H^{\alpha i},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k\right\}.$$

Так же, как и при доказательстве леммы 6, это обеспечивает унитарность оператора $T^{d(n,m)}$ на подпространстве $\sum_\alpha H^\alpha$.

Перейдем к доказательству теоремы. В счетном множестве окружностей, пересекающихся со спектром оператора T, есть изолированные и отличные от точки $\lambda=0$. Пусть C — одна из таких окружностей. По теореме Рисса

$$H=H_+\dotplus H_c\dotplus H_-,$$

где H_+ — инвариантное подпространство оператора T, отвечающее части спектра, лежащей внутри C; H_c — инвариантное подпространство оператора T, отвечающее части спектра, лежащей на C; H_- — инвариантное подпространство оператора T, отвечающее части спектра, лежащей вне C. По лемме 4 $H_+\perp H_c$, а по ее следствию $H_c\perp H_-$. Отсюда следует, что $H_c\perp H_+\dotplus H_-$. Кроме того, из леммы 4 следует, что H_c ортогонально приводит оператор $T^{d(n,m)}$ и оператор $T^{d(n,m)}$ на подпространстве H_c пропорционален унитарному.

Каждому $r>0$ поставим в соответствие набор ортогонально приводящих оператор $T^{d(n,m)}$ подпространств $\{H_r^\alpha\}$, в каждом из которых оператор $r^{-1}T^{d(n,m)}$ индуцирует унитарный оператор. Положим

$$H_r=\sum_\alpha H_r^\alpha.$$

По следствию леммы 6 оператор $T^{d(n,m)}$ на ортогонально приводящем подпространстве H_r имеет вид rU_r, где U_r — унитарный оператор, действующий в подпространстве H_r. Из леммы 5 следует, что если $r'\neq r''$, то $H_{r'}\perp H_{r''}$. Пусть H' — ортогональная сумма подпространств $\{H_r\}$. Очевидно, H', инвариантное относительно $T^{d(n,m)}$, ортогонально приводит $T^{d(n,m)}$ и на подпространстве H' оператор $T^{d(n,m)}$ индуцирует нормальный оператор. Так как спектр прямой суммы двух операторов равен объединению спектров слагаемых, то в подпространстве $H\ominus H'$ спектр оператора $T^{d(n,m)}$ содержится в объединении счетного числа окружностей с центром в точке $\lambda=0$. Если в подпространстве $H\ominus H'$ спектр оператора $T^{d(n,m)}$ состоит из точки $\lambda=0$, то, применяя лемму 3, получим, что оператор $T=0$ в подпространстве $H\ominus H'$. Если в подпространстве $H\ominus H'$ спектр оператора $T^{d(n,m)}$ содержит точки, отличные от точки $\lambda=0$, то на основании леммы 4 получим, что к подпространству H' можно еще добавить подпространство H'', на котором оператор

$T^{d(n,m)}$ имеет вид $r''U''$, где U'' — унитарный оператор в пространстве H''. В том случае, когда этому же коэффициен у пропорциональности r'' в подпространстве $H' = \sum_r H_r$ соответствует нулевое подпространство $H_{r''}$, на котором оператор $r''^{-1}T^{d(n,m)}$ индуцирует унитарный оператор, то подпространство H'' должно входить в H'. Если же коэффициенту пропорциональности r'' соответствует ненулевое подпространство $H_{r''}$, входящее в H', на котором $r''^{-1}T^{d(n,m)}$ индуцирует унитарный оператор, то на подпространстве $H'' \oplus H_{r''}$ оператор $r''^{-1}T^{d(n,m)}$ также индуцирует унитарный оператор. Оба случая приводят к противоречию. Теорема доказана.

Автор благодарит Ю. И. Любича за постановку задачи и внимание к работе, В. Э. Кацнельсона — за полезную критику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любич Ю. И. О принадлежности степеней оператора над данным вектором к некоторому линейному классу. — «Докл. АН СССР», 1955, т. 102, № 5, с. 881—884.

2. Любич Ю. И. О неравенствах между степенями линейного оператора. — «Изв. АН СССР. Сер. мат.,» 1960, т. 24, № 6, с. 825—864.

3. Любич Ю. И. Одна теорема об операторах класса K. — В сб.: «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 1. Харьков, 1965, с. 212—219.

4. Istratescu V. On some hyponormal operators. — «Pas. J. Math.», 1967, vol. 22, N 3, p. 413—418.

5. Putnam C. R. An inequality for the area of hyponormal stectra. — «Math. Z.», 1970, Bd 116, H4, S. 323—330.

Поступила 21 ноября 1972 г.