УДК 517.535.4
Е. Д. Файнберг

ОЦЕНКИ ИНДИКАТОРОВ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ И НЕЦЕЛОГО КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПЛОСКОСТИ. I

Первые значительные результаты и постановка задачи об оценке индикаторов целых функций конечного порядка принадлежат Б. Я. Левину [1]. А. А. Гольдберг [2, с 310—323] получил оценки сверху индикатора целой функции конечного порядка через верхнюю угловую плотность ее корней. Позднее [3, 4, 5] им были получены значительно более общие оценки сверху и снизу для индикаторов целых функций. В настоящей работе получены оценки сверху индикатора функции, аналитической и нецелого конечного порядка в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ через аргументно-граничную (в смысле Н. В. Говорова [6]) плотность корней. Оценки записываются с помощью интеграла по полуаддитивной мере, введенного А. А. Гольдбергом [2]. Определение и свойства этого интеграла будем предполагать известными в объеме § 1 работы [2].

§ 1. Предварительные сведения и формулировка результата

Для описания роста и распределения корней функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, будем пользоваться понятиями, введенными Н. В. Говоровым [6]. Напомним эти понятия.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в угле $\alpha < \arg z < \beta$ и при некотором $\mu > 0$ удовлетворяет асимптотической оценке

$$\sup_{|z| < r,\ \alpha < \arg z < \beta} |f(z)| < \exp(r^{\mu}) \quad (r \to \infty),$$

множество всех таких μ обозначим через $\{\mu\}$. Пусть далее $\{\nu\}$ есть множество всех таких значений $\nu > 0$, при которых

$$\lim_{r \to \infty} r^{-\nu} \ln |f(re^{i\varphi})| \equiv 0 \quad (\alpha < \varphi < \beta).$$

Тогда число

$$\rho = \max\{\inf\{\mu\},\ \inf\{\nu\}\}$$

называется *порядком функции* $f(z)$ *внутри угла* $\alpha < \arg z < \beta$, а функция

$$h(\varphi, f) = \overline{\lim_{r \to \infty}} r^{-\rho} \ln |f(re^{i\varphi})| \quad (\alpha < \varphi < \beta)$$

называется ее *индикатором*.

Пусть в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ дано множество точек $\{z_n\}_1^\infty$, все предельные точки которого лежат на вещественной оси. Положим

$$C(r, \eta_1, \eta_2) = \sum_{\substack{\eta_1 < \arg z_n \leqslant \eta_2 \\ 1 \leqslant |z_n| \leqslant r}} \sin \arg z_n, \quad r \geqslant 1,$$

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < \pi,$$

$$\mu^*(\eta_1, \eta_2) = \overline{\lim_{r \to \infty}} r^{-\rho} C(r, \eta_1, \eta_2),$$

$$\mu_*(\eta_1, \eta_2) = \lim_{r \to \infty} r^{-\rho} C(r, \eta_1, \eta_2).$$

Функции $\mu^*(\eta_1, \eta_2)$ и $\mu_*(\eta_1, \eta_2)$ называются соответственно *верхней и нижней аргументными* ρ*-плотностями множества* $\{z_n\}_1^\infty$. Если для всех $\eta_1, \eta_2 \in [0, \pi] \setminus N$, где N не более чем счетно и не содержит $\eta = 0$ и $\eta = \pi$, выполняется $\mu^*(\eta_1, \eta_2) = \mu_*(\eta_1, \eta_2)$, то будем говорить, что множество $\{z_n\}_1^\infty$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ *аргументную* ρ*-плотность* $\mu(\eta_1, \eta_2)$.

Пусть функция $f(z)$ аналитическая и конечного порядка ρ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Положим

$$\psi(x) = \lim_{y \to +0} \int_0^x \ln |f(t + iy)| \, dt,$$

$$\tau(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{sign} t}^{t} \frac{d\psi(t)}{x}, \quad |t| \geqslant 1.$$

Тогда пределы

$$\lim_{r \to \infty} r^{-\rho} \tau(r) = l_1, \quad \lim_{r \to \infty} r^{-\rho} \tau(-r) = l_2,$$

если они существуют и конечны, называются соответственно *правосторонней и левосторонней граничной плотностью* множества корней функции $f(z)$. Величины

$$l_1^* = \overline{\lim_{r \to \infty}} r^{-\rho} \tau(r) \quad \text{и} \quad l_2^* = \overline{\lim_{r \to \infty}} r^{-\rho} \tau(-r)$$

называются *верхними граничными плотностями*, а величины

$$l_{1*} = \lim_{r \to \infty} r^{-\rho} \tau(r) \quad \text{и} \quad l_{2*} = \lim_{r \to \infty} r^{-\rho} \tau(-r)$$

называются *нижними граничными плотностями*.

Прежде чем перейти к формулировке результата, введем еще несколько обозначений. Пусть

$$E_q(u, v) = \frac{1-\frac{u}{v}}{1-\frac{u}{\bar{v}}} \exp\left\{\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k}\left(\frac{u}{v}\right)^k - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k}\left(\frac{u}{\bar{v}}\right)^k\right\}.$$

Определим функцию $k(u, \varphi, \theta, q)$ равенствами

$$k(u, \varphi, \theta, q) = -\frac{u^{q+1}}{\sin\theta}\frac{d}{du}\ln\left|E_q\left(\frac{e^{i\varphi}}{u}, e^{i\theta}\right)\right|, \quad \theta \in (0, \pi),$$

$$k(u, \varphi, 0, q) = \lim_{\theta\to+0} k(u, \varphi, \theta, q),$$

$$k(u, \varphi, \pi, q) = \lim_{\theta\to\pi-0} k(u, \varphi, \theta, q).$$

Легко проверить, что

$$k(-u, \varphi, 0, q) = (-1)^{q+1} k(u, \varphi, \pi, q). \tag{1}$$

Пусть G_q — множество точек (u, φ, θ) из $\{(0, \infty) \times (0, \pi) \times \times (0, \pi)\}$, для которых $\ln\left|E_q\left(\frac{e^{i\varphi}}{u}, e^{i\theta}\right)\right| \geqslant 0$, $\tilde{G}_q$ — подмножество G_q, на котором $k\left(u, \varphi, \theta, q\right) > 0$. Обозначим $\tilde{G}_q(r) = \{(u, \varphi, \theta) : (u, \varphi, \theta) \in \tilde{G}_q,\ u \geqslant 1/r\}$. Пусть B_q — множество тех $(u, \varphi) \in \{(0, \infty) \times (0, \pi)\}$, для которых $k(u, \varphi, 0, q) > 0$, а D_q — множество таких точек (u, φ) из $\{(0, \infty) \times (0, \pi)\}$, для которых $k(u, \varphi, \pi, q) > 0$. Обозначим $B_q(r) = \left\{(u, \varphi) : (u, \varphi) \in B_q,\ u \geqslant \frac{1}{r}\right\}$ и $D_q(r) = \left\{(u, \varphi) : (u, \varphi) \in D_q,\ u \geqslant \frac{1}{r}\right\}$.

Введем функцию

$$K(u, \varphi, \theta, q) = \begin{cases} k(u, \varphi, \theta, q), & (u, \varphi, \theta) \in \tilde{G}_q, \\ 0, & (u, \varphi, \theta) \,\overline{\in}\, \tilde{G}_q. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция $K(u, \varphi, \theta, q)$ неотрицательна, ограничена на множестве $\tilde{G}_q$ и имеет разрывы лишь в тех точках, где

$$\ln\left|E_q\left(\frac{e^{i\varphi}}{u}, e^{i\theta}\right)\right| = 0,$$

Пусть

$$K_1(u, q) = \sup_{\substack{0<\varphi<\pi \\ 0<\theta<\pi}} K(u, \varphi, \theta, q).$$

Очевидно, существует такая постоянная $C_q > 0$, что

$$K_1(u, q) \leqslant C_q (1+u)^{-1}, \quad u > 0. \tag{2}$$

Пусть D — некоторое счетное всюду плотное на $[0, \pi]$ множество, включающее 0 и π. Обозначим через U класс всех подмножеств из $[0, \pi]$, состоящих из конечного числа непересекающихся полуоткрытых интервалов I вида $(\alpha, \beta]$ или $[\alpha, \beta)$ с концами в точках множества D; при этом в I включается левый конец α или правый конец β в зависимости от того, выполнено или нет неравенство $\sin\alpha \leqslant \sin\beta$. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в верхней полуплоскости; обозначим через $\{z_n\}_1^\infty$ множество ее корней. Пусть для любого множества $\Theta \in U$ существует конечная верхняя аргументная ρ-плотность,

$$\mu_f^*(\Theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-\rho} C_f(r, \Theta).$$

Функция $\mu_f^*(\Theta)$ является полуаддитивной мерой, так как: 1) $\mu_f^*(\varnothing) = 0$; 2) если $\Theta_1 \subset \Theta_2$, то $\mu_f^*(\Theta_1) \leqslant \mu_f^*(\Theta_2)$; 3) $\mu_f^*(\Theta_1 \cup \Theta_2) \leqslant \mu_f^*(\Theta_1) + \mu_f^*(\Theta_2)$. Пусть $\tilde{\mu}(\Theta)$ — некоторая полуаддитивная U-мера, такая, что

$$\tilde{\mu}([0, \pi]) \geqslant \int_{[0,\pi]} d\mu^*(\Theta) > 0.$$

Обозначим через $B(\rho, \tilde{\mu})$ класс функций $f(z)$, аналитических нецелого конечного порядка ρ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, для которых: 1) $\mu^*(\Theta) \leqslant \tilde{\mu}(\Theta)$ при любом $\Theta \in U$; 2) существуют конечные верхние и нижние граничные плотности l_{1*}, l_1^*, l_{2*}, l_2^*.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Для всякой аналитической функции $f(z) \in B(\rho, \tilde{\mu})$ выполняется неравенство*

$$h(\varphi, f) \leqslant \frac{2\pi\rho}{\sin\rho\pi}\left[l_1^* \sin\rho(\pi-\varphi) + \right.$$

$$\left. + l_2^* \sin\rho\varphi\right] + (l_1^* - l_{1*})\int_0^\infty u^{\rho-q-1} K(u, \varphi, 0, q)\, du +$$

$$+ (l_2^* - l_{2*})\int_0^\infty u^{\rho-q-1} K(u, \varphi, \pi, q)\, du +$$

$$+ \int_0^\infty u^{\rho-q-1} du \int_{[0,\pi]} K(u, \varphi, \theta, q)\, d\tilde{\mu}(\theta).$$

Замечание. Если в определении класса $B(\rho, \tilde{\mu})$ не потребовать, чтобы существовали конечные нижние граничные плотности, то может оказаться, что $\sup\limits_{f\in B(\rho, \tilde{\mu})} h(\varphi, f) = \infty$.

Действительно, рассмотрим функцию $f_{\alpha n}(z) = e^{-n(1+i\alpha)z^{\rho}}$, где n — целое положительное число, α — произвольная вещественная величина, $1 < \rho < 2$. Для нее

$$\tau(t) = \begin{cases} -\frac{n}{2\pi\rho}(t^{\rho} - 1), & t \geqslant 1, \\ -\frac{n}{2\pi\rho}(\cos\rho\pi - \alpha\sin\rho\pi)[(-t)^{\rho} - 1], & t \leqslant -1. \end{cases}$$

Очевидно, при $\alpha = \operatorname{ctg}\rho\pi$ получим

$$l_{2^*} = l_2^* = l_1^* = 0.$$

Так как

$$h(\varphi, f_{\alpha n}) = n(\alpha\sin\rho\varphi - \cos\rho\varphi),$$

то

$$\sup_{f \in \widetilde{B(\rho, \mu)}} h(\varphi, f) = \infty.$$

§ 2. Доказательство теоремы

Н. В. Говоров [6] получил каноническое представление функций, регулярных и конечного порядка ρ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Для функции нецелого порядка это представление имеет вид

$$f(z) = \exp\left\{i\sum_{n=1}^{q} b_n z^n + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{d\psi(t)}{t - z}\right\}\prod_{|a_k|<1}\frac{z - a_k}{z - \bar{a}_k}\times$$
$$\times\exp\left\{-2iz^{q+1}\int_{|t|>1}\frac{d\tau(t)}{t^q(t - z)}\right\}\prod_{|a_k|>1}E_q(z, a_k), \tag{3}$$

где $q = [\rho]$, b_n — вещественные постоянные, $a_k = r_k e^{i\varphi_k}$ — нули функции $f(z)$, лежащие в $\operatorname{Im} z > 0$.

Для оценки индикатора функции $f(z)$ нужно получить оценки индикаторов множителей, входящих в правую часть (3). Эти оценки составляют содержание следующих лемм.

Положим

$$f_0(z) = \exp\left\{i\sum_{n=1}^{q} b_n z^n + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{d\psi(t)}{t - z}\right\}\prod_{|a_k|<1}\frac{z - a_k}{z - \bar{a}_k}.$$

Лемма 1. *Для индикатора функции $f_0(z)$ имеет место равенство*

$$h(\varphi, f_0) = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Доказательство очевидно, поскольку порядок функции $f_0(z)$ не превосходит $q < \rho$.

Рассмотрим далее функцию

$$f_1(z)=\exp\left\{-2iz^{q+1}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\frac{d\tau(t)}{t^q(t-z)}\right\}. \tag{4}$$

Лемма 2. *Для индикатора функции $f_1(z)$ справедливо неравенство*

$$h(\varphi, f_1)\leqslant\frac{2\pi\rho}{\sin\rho\pi}\left[l_1^*\sin\rho(\pi-\varphi)+l_2^*\sin\rho\varphi\right]+$$

$$+(l_1^*-l_{1*})\int\limits_0^\infty u^{\rho-q-1}K(u,\ \varphi,\ 0,\ q)\,du+$$

$$+(l_2^*-l_{2*})\int\limits_0^\infty u^{\rho-q-1}K(u,\ \varphi,\ \pi,\ q)\,du. \tag{5}$$

Доказательство. Интегрируя в (4) по частям, получим

$$f_1(z)=\exp\left\{-2iz^{q+1}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\tau(t)\frac{q(t-z)+t}{t^{q+1}(t-z)^2}\,dt\right\}.$$

Полагая $t=ur$ и пользуясь определением функции $k(u,\ \varphi,\ 0,\ q)$ и (2), получим, что

$$\ln|f_1(re^{i\varphi})|=-\int\limits_{|u|\geqslant\frac{1}{r}}\tau(ur)\,u^{-q-1}k(u,\ \varphi,\ 0,\ q)\,du=$$

$$=-\left\{\int\limits_{B_q(r)}\tau(ur)\,u^{-q-1}k(u,\ \varphi,\ 0,\ q)\,du+\right.$$

$$+\int\limits_{[1/r,\ \infty)\setminus B_q(r)}\tau(ur)\,u^{-q-1}k(u,\ \varphi,\ 0,\ q)\,du+$$

$$+\int\limits_{D_q(r)}\tau(-ur)\,u^{-q-1}k(u,\ \varphi,\ \pi,\ q)\,du+$$

$$\left.+\int\limits_{[1/r,\ \infty)\setminus D_q(r)}\tau(-ur)\,u^{-q-1}k(u,\ \varphi,\ \pi,\ q)\,du\right\}.$$

Из определения верхних и нижних граничных плотностей получаем

$$\ln|f_1(re^{i\varphi})|\leqslant-l_{1*}\int\limits_{B_q(r)}u^{-q-1}(ur)^\rho k(u,\ \varphi,\ 0,\ q)\,du-$$

$$-l_1^*\int\limits_{[1/r,\ \infty)\setminus B_q(r)}(ur)^\rho u^{-q-1}k(u,\ \varphi,\ 0,\ q)\,du-$$

$$-l_{2*}\int\limits_{D_q(r)}u^{-q-1}(ur)^\rho k(u,\ \varphi,\ \pi,\ q)\,du-$$

$$-l_2^*\int\limits_{[1/r,\ \infty)\setminus D_q(r)}(ur)^\rho u^{-q-1}k(u,\ \varphi,\ \pi,\ q)\,du+o(r^\rho)$$

или

$$\ln|f_1(re^{i\varphi})|\leqslant\left\{(l_1^*-l_{1*})\int\limits_{B_q(r)}u^{\rho-q-1}k(u,\ \varphi,\ 0,\ q)\,du+\right.$$

$$+\left(l_2^*-l_{2*}\right)\int\limits_{D_q(r)} u^{\rho-q-1}k(u,\ \varphi,\ \pi,\ q)\,du-$$

$$-l_1^*\int\limits_{1/r}^{\infty} u^{\rho-q-1}k(u,\ \varphi,\ 0,\ q)\,du-$$

$$\left.-l_2^*\int\limits_{1/r}^{\infty} u^{\rho-q-1}k(u,\ \varphi,\ \pi,\ q)\,du\right\}r^\rho+o\,(r^\rho). \tag{6}$$

Для вычисления последних двух интегралов используем формулы [8, с. 97] и [9, с. 1057]. На основании этих формул, определения функции $k(u,\ \varphi,\ 0,\ q)$ и соотношения (1) получаем, что

$$\int\limits_{1/r}^{\infty} u^{-q-1}(ur)^\rho k(u,\ \varphi,\ 0,\ q)\,du=-2\,\mathrm{Im}\left[z^{q+1}\int\limits_1^{\infty} t^{\rho-q-1}\frac{q(t-z)+t}{(t-z)^2}\,dt\right]=$$

$$=\frac{2}{\rho-q-1}\,\mathrm{Im}\{z^{q+1}[qF(1,\ q+1-\rho;\ q+2-\rho;\ z)+F(2,q+1-$$

$$-\rho;\ q+2-\rho;\ z)]\}=-r^\rho\frac{2\pi\rho}{\sin\rho\pi}\sin[\rho(\pi-\varphi)]+O(r^q)$$

и

$$\int\limits_{1/r}^{\infty} u^{-q-1}(ur)^\rho k(u,\ \varphi,\ \pi,\ q)\,du=$$

$$=(-1)^{q+1}2\,\mathrm{Im}\left[z^{q+1}\int\limits_1^{\infty} t^{\rho-q-1}\frac{q(t+z)+t}{(t+z)^2}\,dt\right]=$$

$$=-r^\rho\frac{2\pi\rho}{\sin\rho\pi}\sin\rho\varphi+O(r^q).$$

Подставляя в (6), имеем

$$\ln|f_1(re^{i\varphi})|\leqslant\frac{2\pi\rho r^\rho}{\sin\rho\pi}\{l_1^*\sin[\rho(\pi-\varphi)]+$$

$$+l_2^*\sin\rho\varphi\}+r^\rho\left[(l_1^*-l_{1*})\int\limits_{B_q(r)} u^{\rho-q-1}k(u,\ \varphi,\ 0,\ q)\,du+\right.$$

$$\left.+(l_2^*-l_{2*})\int\limits_{D_q(r)} u^{\rho-q-1}k(u,\ \varphi,\ \pi,\ q)\,du\right]+o\,(r^\rho),$$

Откуда следует (5). Лемма доказана.

Прежде чем формулировать следующие леммы, введем необходимые обозначения. Функцию

$$f_2(z)=\prod_{|a_k|>1}E_q(z,\ a_k)$$

представим следующим образом:

$$f_2(z)=F(z)\,F_1(z)\,F_2(z),$$

где

$$F(z)=\prod_{\delta\leqslant\arg a_k\leqslant\pi-\gamma}E_q(z,\ a_k),$$

$$F_1(z)=\prod_{0<\arg a_k<\delta} E_q(z,\ a_k),$$

$$F_2(z)=\prod_{\pi-\gamma<\arg a_k<\pi} E_q(z,\ a_k).$$

Введем (следуя А. А. Гольдбергу [2]) следующую величину:

$$L(z,\ F)=\sum_{k=1}^{\infty} \ln^+|E_q(z,\ a_k)|,$$

Обозначим

$$g(z)=\prod_{\delta\leqslant\arg a'_k\leqslant\pi-\gamma} E_q(z,\ a'_k),$$

где $|a'_k|=|a_k|>1$, а $\arg a'_k$ выбираются такими, что

$$\max(\delta,\ \arg a_k-\omega)<\arg a'_k\leqslant\arg a_k,$$

если

$$\arg a_k\leqslant\frac{\pi}{2},\ \arg a_k\leqslant\arg a'_k<\min(\pi-\gamma),\ \arg a_k+\omega),$$

если

$$\arg a_k>\frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что

$$|\arg a'_k-\arg a_k|<\omega$$

и

$$0<\sin(\arg a'_k)\leqslant\sin(\arg a_k). \tag{7}$$

Оценка индикатора функции $f_2(z)$ будет дана в лемме 4. Отметим, что в основе доказательства лемм 3 и 4 лежит идея Б. Я. Левина [1, с. 129—133].

Лемма 3. *При фиксированных* $\delta,\ \gamma>0$ *для всякого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $\omega>0$, *что*

$$|L(re^{i\varphi},\ F)-L(re^{i\varphi},\ g)|<\varepsilon r^{\rho},\quad r_0\leqslant r<\infty.$$

Доказательство. Из построения функции $g(z)$ следует, что

$$C_g(r,\ \delta,\ \pi-\gamma)\leqslant C_F(r,\ \delta,\ \pi-\gamma)\leqslant[\mu^*(\delta,\ \pi-\gamma)+1]r^{\rho} \tag{8}$$

для всех достаточно больших r.

В дальнейшем вместо $C_f(t,\ \delta,\ \pi-\gamma)$ будем писать $C(t;\ f)$ и считать, что

$$\delta\leqslant\arg a_k\leqslant\pi-\gamma.$$

Введем следующие функции:

$$L_1(z,\ F)=\sum_{|a_k|<\lambda r} \ln^+|E_q(z,\ a_k)|,$$

$$L_2(z, F) = \sum_{\lambda r \leqslant |a_k| \leqslant \lambda' r} \ln^+ |E_q(z, a_k)|,$$

$$L_3(z, F) = \sum_{|a_k| > \lambda' r} \ln^+ |F_q(z, a_k)|,$$

где $|z| = r$, λ и λ' — некоторые числа,

$$0 < \lambda < \frac{1}{2},\ 2 < \lambda' < \infty.$$

Очевидно, что

$$L(z, F) = \sum_{j=1}^{3} L_j(z, F)$$

и

$$L(z, g) = \sum_{j=1}^{3} L_j(z, g).$$

Оценим сначала $L_1(z, F)$ и $L_1(z, g)$.

Пусть $\varphi_k = \arg a_k$ и $\varphi_k' = \arg a_k'$. Предположим, что $q \geqslant 1$. Используя оценку модуля функции $E_q(z, a_k)$, полученную Р. Неванлинна [7, с. 38]:

$$\ln |E_q(z, a_k)| < A \frac{|z|^{q+1} \sin \varphi_k}{|a_k|^q (|a_k| + |z|)}, \tag{9}$$

имеем

$$L_1(re^{i\varphi}, F) \leqslant A \sum_{|a_k| < \lambda r} \left(\frac{r}{|a_k|}\right)^q \sin \varphi_k = Ar^q \int_1^{\lambda r} t^{-q} dC(t; F) \leqslant$$

$$\leqslant Ar^q [\mu^*(\delta, \pi - \gamma) + 1] \left\{(\lambda r)^{\rho - q} + q \int_1^{\lambda r} t^{\rho - q - 1} dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant A \frac{\rho}{\rho - q} \lambda^{\rho - q} [\mu^*(\delta, \pi - \gamma) + 1] r^\rho$$

(мы воспользовались (8)).

Так как $\rho - q > 0$, то, выбрав λ достаточно малым, можно сделать множитель перед r^ρ меньше любого $\varepsilon > 0$. Тогда для достаточно больших r имеем $L_1(re^{i\varphi}, F) \leqslant \varepsilon r^\rho$. С помощью (7) аналогичным образом получаем оценку $L_1(re^{i\varphi}, g) \leqslant \varepsilon r^\rho$. Эти неравенства верны и для $q = 0$, так как $\ln^+ |E_0(z, a_k)| \equiv 0$.

Перейдем к оценке $L_3(z, F)$ и $L_3(z, g)$. При $q > 0$ на основании неравенства (9) имеем

$$L_3(re^{i\varphi}, F) \leqslant A \sum_{|a_k| > \lambda' r} \left(\frac{r}{|a_k|}\right)^{q+1} \sin \varphi_k = Ar^{q+1} \int_{\lambda' r}^{\infty} t^{-q-1} dC(t; F) =$$

$$= Ar^{q+1}\left[(\lambda' r)^{-q-1} C(\lambda' r;\ F) + (q+1)\int\limits_{\lambda' r}^{\infty} t^{-q-2} C(t;\ F)\, dt\right] \leqslant$$

$$\leqslant A\,\frac{q+1}{q+1-\rho}(\lambda')^{\rho-q-1}\,[\mu^*\ \ (\delta,\ \pi-\gamma) + 1]\, r^{\rho}.$$

Если выбрать λ' достаточно большим, то, поскольку $\rho - q - 1 < 0$, получаем, что для достаточно больших r $L_3(re^{i\varphi}, F) \leqslant \varepsilon r^{\rho}$. Аналогично получим, что $L_3(re^{i\varphi}, g) \leqslant \varepsilon r^{\rho}$. Будем считать далее λ и λ' фиксированными, такими, что выполняется неравенство

$$L_1(re^{i\varphi},\ F) + L_1(re^{i\varphi}\ g) + L_3(re^{i\varphi},\ F) + L_3(re^{i\varphi},\ \ g) \leqslant 4\varepsilon r^{\rho}. \qquad (10)$$

Эта оценка равномерна относительно ω.

Функция

$$\ln^+ |E_q(z,\ a_k)| = F(u,\ \varphi_k,\ \varphi),$$

где

$$u = \left|\frac{z}{a_k}\right|,\ \varphi = \arg z,\ \ \varphi_k = \arg a_k,$$

равномерно относительно u, $1/\lambda' \leqslant u \leqslant 1/\lambda$, непрерывна по φ и φ_k. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ и фиксированных

$$\delta,\ \gamma\left(0 < \delta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$$

можно указать такое $\omega > 0$, что для всех φ_k и $\varphi_k' \in [\delta,\ \pi-\gamma]$ таких, что $|\varphi_k - \varphi_k'| < \omega$, имеем

$$|F(u,\ \varphi_k,\ \varphi) - F(u,\ \varphi_k',\ \varphi)| < \frac{\varepsilon \min(\sin\delta,\ \sin\gamma)}{1 + \mu^*(\delta,\ \pi-\gamma)}(\lambda')^{-\rho}.$$

Поскольку $\sin\varphi_k > \min(\sin\delta,\ \ \sin\gamma)$, то справедливо неравенство

$$|\ln^+|E_q(z,\ a_k) - \ln^+|E_q(z,\ a_k')|| \leqslant \frac{\varepsilon\sin\varphi_k}{1 + \mu^*(\delta,\ \pi-\gamma)}(\lambda')^{-\rho}.$$

Используя это неравенство и (8), оценим теперь разность между $L_2(z,\ F)$ и $L_2(z,\ g)$:

$$|L_2(z,\ F) - L_2(z,\ g)| \leqslant \sum_{\lambda r \leqslant |a_k| \leqslant \lambda' r} |\ln^+|E_q(z,\ a_k)| -$$

$$- \ln^+|E_q(z,\ a_k')|| \leqslant \frac{\varepsilon(\lambda')^{-\rho}}{1 + \mu^*(\delta, \pi-\gamma)} \sum_{\lambda r \leqslant |a_k| \leqslant \lambda' r} \sin\varphi_k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon(\lambda')^{-\rho'}}{1 + \mu^*(\delta, \pi-\gamma)} C(\lambda' r;\ F) \leqslant \varepsilon r^{\rho}.$$

Собирая оценки для функций L_j, получаем

$$|L\ z,\ F) - L(z,\ g)| \leqslant |L_1(z,\ F)| + |L_1(z,\ g)| + |L_2(z,\ F) -$$

$$- L_2(z,\ g)| + |L_3(z,\ F)| + |L_3(z,\ g)| \leqslant 5\varepsilon r^{\rho}.$$

Лемма доказана.

Для оценки функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ нам понадобится следующая теорема.

Теорема (Н. В. Говоров [6]). *Пусть даны произвольные комплексные числа* $z = re^{i\varphi} \neq 0$ *и* $a_k = r_k e^{i\varphi_k} \neq 0$, *удовлетворяющие условиям* $\eta \leqslant \varphi \leqslant \pi - \eta$, $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \sin\varphi_k < \delta$, *где*

$$0 < \delta < \min\left(\frac{1}{2^q\pi},\ \frac{1}{4}\sin^2\frac{\eta}{2}\right). \tag{11}$$

Тогда справедливо представление

$$\ln E_q(z,\ a_k) = \begin{cases} \dfrac{2iz^{q+1}}{r_k^q(r_k - z)}\sin\varphi_k\,[1 + \beta_q(z,\ a_k)], & 0 < \varphi_k < \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{(-1)^q 2iz^{q+1}}{r_k^q(r_k + z)}\sin\varphi_k\,[1 + \beta_q(z, a_k)], & \dfrac{3\pi}{4} < \varphi_k < \pi, \end{cases} \tag{12}$$

при этом равномерно относительно z *и* a_k

$$|\beta_q(z,\ a_k)| < \frac{2^{q+5}\delta}{\sin\frac{\eta}{2}}. \tag{13}$$

Лемма. 4. *Если функция* $f_2(z)$ *принадлежит классу* $B\left(\rho,\ \tilde{\mu}\right)$, *то справедливо неравенство*

$$h(\varphi,\ f_2) \leqslant \int_0^\infty u^{\rho-q-1}du \int_{[0,\,\pi]} K(u,\ \varphi,\ \theta,\ q)\,d\tilde{\mu}(\theta). \tag{14}$$

Доказательство. Выберем произвольное $0 < \eta < \frac{\pi}{3}$, а числа δ и γ будем считать столь малыми, чтобы выполнялось условие (11). Зафиксируем $\varphi \in [\eta,\ \pi - \eta]$. Оценим сначала функцию $F(z)$.

Рассмотрим введенный ранее класс U всех подмножеств из $[0,\ \pi]$, состоящих из конечного числа непересекающихся интервалов $<\alpha,\ \beta>$[1], где α и β принадлежат некоторому счетному всюду плотному на $[0,\ \pi]$ множеству D. Обозначим через U^* класс, состоящий из пересечений множеств класса U с интервалом $[\delta,\ \pi - \gamma]$. Пусть T — какое-то U^*-разбиение интервала $[\delta,\ \pi - \gamma]$, состоящее из множеств Θ_j $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$. Будем считать, что диаметр каждого множества Θ_j меньше ω, где ω — число, определенное в лемме 3. Пусть $\Theta_j = \bigcup_{k=1}^{s_j} <\alpha_{jk},\ \beta_{jk}>$. На каждом множестве Θ_j найдем $\inf\sin\theta = \sin\theta_j$. Число $\theta_j \in \Theta_j$ совпадает с одной из величин α_{jk}, β_{jk} $(k = 1,\ 2, \ldots,\ s_j)$. Все нули

[1] Под $<\alpha,\ \beta>$ понимаем $[\alpha,\ \beta)$ или $(\alpha,\ \beta]$, причем интервалу принадлежит тот конец, на котором синус имеет меньшее значение.

функции $F(z)$, аргументы которых принадлежат множеству Θ_j, сместим на луч $\theta = \theta_j$, т. е. в точки $a_k' = |a_k| e^{i\theta_j}$. Построим вспомогательную функцию $g(z) = \Pi E_q(z, a_k')$. Легко видеть, что $\mu_g^*(\Theta_j) \leqslant \mu_F^*(\Theta_j)$.

Так как $\mu_f^*(\Theta) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} r^{-\rho} C_f(r, \Theta)$, то можно считать, что для заданного фиксированного $\varepsilon > 0$ и всех $r > 0$

$$C_f(r, \Theta) \leqslant (1+\varepsilon)\mu_f^*(\Theta) r^\rho \leqslant (1+\varepsilon)\tilde{\mu}_f(\Theta) r^\rho,$$

где Θ — любое множество разбиения T такое, что $\tilde{\mu}_f(\Theta) > 0$. Для тех Θ, где $\tilde{\mu}_f(\Theta) = 0$, имеем равенство $C_f(r, \Theta) = o(r^\rho)$. Покажем, что для функции $\tilde{f}(z) = \Pi E_q(z, a_k)$, где a_k принадлежат такому множеству Θ, имеем $h\left(\varphi, \tilde{f}\right) \leqslant 0$.

Действительно, с помощью выкладок, аналогичных проведенным при доказательстве леммы 3, имеем

$$\ln|\tilde{f}(re^{i\varphi})| = \sum_{a_k \in \Theta} \ln|E_q(re^{i\varphi}, a_k)| < A \sum_{a_k \in \Theta} \frac{r^{q+1}\sin\varphi_k}{|a_k|^q (r + |a_k|)} =$$

$$= Ar^{q+1} \int_1^\infty \frac{dC_{\tilde{f}}(t, \Theta)}{t^q (t+r)} \leqslant Ar^q \int_1^r t^{-q} dC_{\tilde{f}}(t, \Theta) +$$

$$+ Ar^{q+1} \int_r^\infty t^{-q-1} dC_{\tilde{f}}(t, \Theta) \leqslant o(r^\rho).$$

Следовательно, $h(\varphi, \tilde{f}) \leqslant 0$. Если разделить функцию $f(z)$ на $\tilde{f}(z)$, то индикатор функции $f(z)/\tilde{f}(z)$ будет не меньше индикатора функции $f(z)$, но для $f(z)/\tilde{f}(z)$ неравенство $C(r, \Theta) \leqslant (1+\varepsilon)\tilde{\mu}(\Theta) r^\rho$ выполняется для любого Θ из разбиения T. На этом основании, не уменьшая общности, можно считать, что $C_F(r, \Theta) \leqslant (1+\varepsilon) \times \tilde{\mu}_F(\Theta) r^\rho$ для всех Θ из T-разбиения.

Обозначим через $g_j(z)$ произведение $E_q(z, a_k')$ с нулями в точках a_k', аргумент которых равен θ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда $g(z) = \prod\limits_{i=1}^{n} g_j(z)$ и $L(z, g) = \sum\limits_{|a_k'|>1} \ln^+|E_q(z, a_k')| = \sum\limits_{j=1}^{n} L(z, g_j)$. Оценим $L(z, g_j)$. Пусть $G_q(r) = \left\{(u, \varphi, \theta);\ (u, \varphi, \theta) \in G_q;\ u \geqslant \frac{1}{r}\right\}$, тогда

$$L(re^{i\varphi}, g_j) \sum_{\substack{|a_k'|>1 \\ \arg a_k \in \Theta_j}} \ln^+\left|E_q\left(\frac{r}{|a_k|}e^{i\varphi}, e^{i\theta_j}\right)\right| =$$

$$= -\int\limits_{t\in G_q(1)} n(t,\ \Theta_j)\frac{d}{dt}\ln\left|E_q\left(\frac{r}{t}e^{i\varphi},\ e^{i\theta_j}\right)\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant -\int\limits_{u\in \tilde{G}_q(r)} n(ur,\ \Theta_j)\frac{d}{du}\ln\left|E_q\left(\frac{e^{i\varphi}}{u},\ e^{i\theta_j}\right)\right|du =$$

$$= \int\limits_{1/r}^{\infty} n(ur,\ \Theta_j)\, u^{-q-1}K(u,\ \varphi,\ \theta_j,\ q)\sin\theta_j du =$$

$$= \int\limits_{1/r}^{\infty} u^{-q-1}C_g(ur,\ \Theta_j)\,K(u,\ \varphi,\ \theta_j,\ q)\,du.$$

Отсюда

$$L(re^{i\varphi},\ g) \leqslant \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{1/r}^{\infty} u^{-q-1}C_F(ur,\ \Theta_j)\,K(u,\ \varphi,\ \theta_j,\ q)\,du =$$

$$= r^{\rho}\int\limits_{1/r}^{\infty} u^{\rho-q-1}\left[\sum_{j=1}^{n} C_F(ur,\ \Theta_j)\,(ur)^{-\rho}K(u,\ \varphi,\ \theta_j,\ q)\right]du.$$

На основании леммы 3 для всех $r \geqslant r_0$ имеем

$$\ln|F(z)| \leqslant L(re^{i\varphi},\ F) \leqslant$$

$$\leqslant r^{\rho}\int\limits_{1/r}^{\infty} u^{\rho-q-1}\left[\sum_{j=1}^{n} C_F(ur,\ \Theta_j)\,(ur)^{-\rho}K(u,\ \varphi,\ \theta_j,\ q)\right]du + \varepsilon r^{\rho}. \quad (15)$$

Оценим теперь функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$. На основании теоремы Н. В. Говорова имеем

$$\ln F_1(z) = 2iz^{q+1}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dC(t,\ 0,\ \delta)}{t^q(t-z)} +$$

$$+ 2iz^{q+1}\sum_{a_k\in(0,\ \delta)}\frac{\sin\varphi_k}{r_k^q(r_k-z)}\beta_q(z,\ a_k) =$$

$$= 2iz^{q+1}\int\limits_{1}^{\infty} C(t,\ 0,\ \delta)\frac{q(t-z)+t}{t^{q+1}(t-z)^2}dt +$$

$$+ 2iz^{q+1}\sum_{a_k\in(0,\ \delta)}\frac{\sin\varphi_k}{r_k^q(r_k-z)}\beta_q(z,\ a_k).$$

Отсюда

$$\ln|F_1(z)| = -2\ \mathrm{Im}\left\{z^{q+1}\int\limits_{1}^{\infty} C(t,\ 0,\ \delta)\frac{q(t-z)+t}{t^{q+1}(t-z)^2}dt\right\} -$$

$$-2\,\mathrm{Im}\left\{z^{q+1}\sum_{a_k\in(0,\ \delta)}\frac{\sin\varphi_k}{r_k^q(r_k-z)}\beta_q(z,\ a_k)\right\} =$$

$$= \int_{\frac{1}{r}}^{\infty} u^{-q-1} k(u, \varphi, 0, q) C(ur, 0, \delta)\, du -$$

$$-2 \operatorname{Im} \left\{ z^{q+1} \sum_{a_k \in (0, \delta)} \frac{\sin \varphi_k}{r_k^q (r_k - z)} \beta_q(z, a_k) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\frac{1}{r}}^{\infty} u^{-q-1} K(u, \varphi, 0, q) C(ur, 0, \delta)\, du + I_1(z).$$

Оценим второе слагаемое. Используя соотношение (13), получаем

$$I_1(re^{i\varphi}) \leqslant r^{q+1} \frac{2^{q+6}\delta}{\sin \frac{\eta}{2}} \sum_{a_k \in (0, \delta)} \frac{\sin \varphi_k}{r_k^q |r_k - re^{i\eta}|} =$$

$$= r^{q+1} \frac{2^{q+6}\delta}{\sin \frac{\eta}{2}} \int_1^{\infty} \frac{dC(t, 0, \delta)}{t^q |t - re^{i\eta}|} =$$

$$= -r^{q+1} \frac{2^{q+6}\delta}{\sin \frac{\eta}{2}} \int_1^{\infty} C(t, 0, \delta) \left(\frac{t^{-q}}{|t - re^{i\eta}|} \right)' dt.$$

Так как

$$\left(\frac{t^{-q}}{|t - re^{i\eta}|} \right)' < 0,$$

при $t > Ar$, где

$$A = \frac{1}{2(q+1)} [(2q+1)\cos \eta], + \sqrt{1 - (2q+1)^2 \sin^2 \eta},$$

то

$$|I_1(re^{i\varphi})| \leqslant -r^{q+1} \frac{2^{q+6}\delta N}{\sin \frac{\eta}{2}} \int_{Ar}^{\infty} \left(\frac{t^{-q}}{|t - re^{i\eta}|} \right)' t^{\rho} dt =$$

$$= -r^{\rho} \frac{2^{q+6}\delta N}{\sin \frac{\eta}{2}} \int_A^{\infty} u^{\rho} \left(\frac{u^{-q}}{|u - e^{i\eta}|} \right)' du \leqslant -r^{\rho} 2^{q+5} N \sqrt{\delta} \int_A^{\infty} u^{\rho} (u^{-q} |u -$$

$$- e^{i\eta}|^{-1})' du \leqslant r^{\rho} \sqrt{\delta}\, V(\eta, q, \rho),$$

где $V(\eta, q, \rho)$ — постоянная, не зависящая от φ и δ. Следовательно,

$$\ln |F_1(re^{i\varphi})| \leqslant \int_{\frac{1}{r}}^{\infty} u^{-q-1} K(u, \varphi, 0, q) C(ur, 0, \delta)\, du +$$

$$+ r^{\rho} \sqrt{\delta}\, V(\eta, q, \rho). \tag{16}$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\ln|F_2(re^{i\varphi})| \leqslant \int_{\frac{1}{r}}^{\infty} u^{-q-1}K(u, \varphi, \pi, q)\, C(ur, \pi-\gamma, \pi)\, du +$$

$$+ r^{\rho}\sqrt{\gamma}\, V(\eta, q, \rho). \tag{17}$$

Обозначим через T^* U-разбиение интервала $[0, \pi]$, состоящее из рассмотренного разбиения T и интервалов $[0, \delta)$ и $(\pi-\gamma, \pi]$. Обозначим $[0, \delta) = \Theta_0$ и $(\pi-\gamma, \pi] = \Theta_{n+1}$, $\theta_0 = 0$, $\theta_{n+1} = \pi$. Тогда из соотношений (15), (16), (17) следует, что

$$\ln|f_2(re^{i\varphi})| \leqslant r^{\rho}\int_{\frac{1}{r}}^{\infty} u^{\rho-q-1}\left[\sum_{j=0}^{n+1} C_{f_2}(ur, \Theta_j)\,(ur)^{-\rho}K(u, \varphi, \theta_j, q)\right] du +$$

$$+ \varepsilon r^{\rho} + 2r^{\rho}\sqrt{\delta_1}\, V(\eta, q, \rho),$$

где $\delta_1 = \max(\delta, \gamma)$.

Обозначим $(ur)^{-\rho}C_{f_2}(ur, \Theta_j) = x_j$. Множество точек $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ удовлетворяет неравенствам

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_p} = (ur)^{-\rho}\left[C_{f_2}(ur, \Theta_{i_1}) + C_{f_2}(ur, \Theta_{i_2}) +\right.$$

$$\left.+ \ldots + C_{f_2}(ur, \Theta_{i_p})\right] = (ur)^{-\rho}C_{f_2}(ur, \Theta_{i_1}\cup\Theta_{i_2}\cup\ldots\cup\Theta_{i_p}) \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\,\mu^*\left(\Theta_{i_1}\dot\cup\Theta_{i_2}\dot\cup\ldots\dot\cup\Theta_{i_p}\right).$$

Следовательно, точки x принадлежат множеству $P(T^*, (1+\varepsilon)\mu^*)$ [2, с. 291]. Функция $K(u, \varphi, \theta, q)$ — ограниченная, неотрицательная. Тогда по теореме 2.1 из работы *А. А.* Гольдберга [2], § 1 существует *конечный*

$$\max_{x\in P(T^*, (1+\varepsilon)\mu^*)} \sum_{j=0}^{n+1} x_j \sup_{\theta\in\Theta_j} K(u, \varphi, \theta, q) =$$

$$= S(T^*, (1+\varepsilon)\mu^*(\Theta)\, K(u, \varphi, \theta, q)).$$

Получаем, что

$$\ln|f_2(re^{i\varphi})| \leqslant r^{\rho}\int_{\frac{1}{r}}^{\infty} u^{\rho-q-1}S(T^*, (1+\varepsilon)\mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \theta, q))\, du +$$

$$+ \varepsilon r^{\rho} + 2r^{\rho}\sqrt{\delta_1}\, V(\eta, q, \rho).$$

Так как $S(T, \lambda\mu, f) = \lambda S(T, \mu, f)$ (теорема 2.2, § 1, [2]), то

$$\frac{\ln f_2(re^{i\varphi})}{r^{\rho}} \leqslant (1+\varepsilon)\int_{\frac{1}{r}}^{\infty} u^{\rho-q-1}S(T^*, \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \theta, q))\, du +$$

$$+ \varepsilon + 2\sqrt{\delta_1}\, V(\eta, q, \rho).$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$, получим

$$h(\varphi, f_2) \leqslant (1+\varepsilon)\int_0^\infty u^{\rho-q-1} S(T^*, \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \theta, q))\,du + \\ + \varepsilon + 2\sqrt{\delta_1}\, V(\eta, q, \rho).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$h(\varphi, f_2) \leqslant \inf_{T^* \in Q(\omega)} \Big[(1+\varepsilon)\int_0^\infty u^{\rho-q-1} S(T^*, \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \theta, q))\,du + \\ + \varepsilon + 2\sqrt{\delta_1}\, V(\eta, q, \rho)\Big],$$

где $Q(\omega)$ — множество всех U-разбиений таких, что диаметр Θ для $T \in U^*$ не превышает ω.

Обозначим через Q совокупность всех U-разбиений с произвольным диаметром множеств Θ. Пусть T' — какое-то U-разбиение. Тогда на основании леммы 2.1, § 1, [2] и в силу произвольности ε и условия (11) имеем

$$h(\varphi, f_2) \leqslant \inf_{T' \in Q} \int_0^\infty u^{\rho-q-1} S(T', \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \Theta, q))\,du + \\ + V(\eta, q, \rho)\sin\frac{\eta}{2}. \tag{18}$$

Пусть $\eta \to 0$, тогда для $\varphi \in (0, \pi)$ получим, что

$$h(\varphi, f_2) \leqslant \inf_{T' \in Q} \int_0^\infty u^{\rho-q-1} S(T', \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \Theta, q))\,du. \tag{19}$$

Применим теперь теорему 5.5, § 1 [2]. Из нее следует, что для любых β и B $(0 < \beta < B < \infty)$

$$\inf_{T' \in Q} \int_\beta^B u^{\rho-q-1} S(T', \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \theta, q))\,du = \\ = \int_\beta^B u^{\rho-q-1}du \int_{[0, \pi]} K(u, \varphi, \theta, q)\,d\mu^*(\theta).$$

Нам нужно доказать, что

$$\inf_{T' \in Q} \int_0^\infty u^{\rho-q-1} S(T', \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \theta, q))\,du = \\ = \int_0^\infty u^{\rho-q-1}du \int_{[0, \pi]} K(u, \varphi, \theta, q)\,d\mu^*(\theta). \tag{20}$$

Очевидно, что

$$\inf_{T' \in Q} \int_0^\infty u^{\rho-q-1} S(T', \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \theta, q))\,du \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{T'\in Q} \int_{\beta}^{B} u^{\rho-q-1} S(T', \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \theta, q))\, du =$$

$$= \int_0^{\infty} u^{\rho-q-1} du \int_{[0,\pi]} K(u, \varphi, \theta, q)\, d\mu^*(\theta) -$$

$$- \int_0^{\beta} u^{\rho-q-1} du \int_{[0,\pi]} K(u, \varphi, \theta, q)\, d\mu^*(\theta) -$$

$$- \int_B^{\infty} u^{\rho-q-1} du \int_{[0,\pi]} K(u, \varphi, \theta, q)\, d\mu^*(\theta).$$

В силу оценки (2) два последних интеграла могут быть сделаны меньше любого $\varepsilon > 0$ за счет выбора β и B. Следовательно,

$$\inf_{T'\in Q} \int_0^{\infty} u^{\rho-q-1} S(T', \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \theta, q))\, du \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{\infty} u^{\rho-q-1} du \int_{[0,\pi]} K(u, \varphi, \theta, q)\, d\mu^*(\theta) - 2\varepsilon.$$

Для доказательства неравенства в другую сторону рассмотрим

$$\inf_{T'\in Q} \int_0^{\infty} u^{\rho-q-1} S(T', \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \theta, q))\, du \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{T'\in Q} \int_{\beta}^{B} u^{\rho-q-1} S(T', \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \theta, q))\, du +$$

$$+ \int_0^{\beta} u^{\rho-q-1} S(T', \mu^*(\Theta), K_1(u, q))\, du +$$

$$+ \int_B^{\infty} u^{\rho-q-1} S(T', \mu^*(\Theta), K_1(u, q))\, du.$$

За счет выбора β и B два последних интеграла могут быть сделаны меньше любого $\varepsilon > 0$. Окончательно получаем

$$\int_0^{\infty} u^{\rho-q-1} du \int_{[0,\pi]} K(u, \varphi, \theta, q)\, d\mu^*(\theta) -$$

$$- 2\varepsilon \leqslant \inf_{T'\in Q} \int_0^{\infty} u^{\rho-q-1} S(T', \mu^*(\Theta), K(u, \varphi, \theta, q))\, du \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\infty} u^{\rho-q-1} du \int_{[0,\pi]} K(u, \varphi, \theta, q)\, d\mu^*(\theta) + 2\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то, устремляя ε к нулю, получаем (20). Тогда из неравенства (19) следует, что для любого $\varphi \in (0, \pi)$

$$h(\varphi, f_2) \leqslant \int_0^{\infty} u^{\rho-q-1} du \int_{[0,\pi]} K(u, \varphi, \theta, q)\, d\mu^*(\theta).$$

Утверждение теоремы очевидно следует из представления (3) функции $f(z)$ и лемм 1, 2, 4.

Замечание. Оценка, сформулированная в теореме, является в известной мере точной. Соответствующие примеры мы приведем во второй части статьи.

Автор выражает глубокую благодарность И. В. Островскому за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956, с. 325—340.

2. Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. I — «Мат. сб.», 1962, т. 58 (100), с. 290—326.

3. Гольдберг А. А. II. — «Мат. сб.», 1963, т. 61 (103), с. 334—349.

4. Гольдберг. А. А. III. — «Мат. сб.», 1964, т. 65 (107), с. 414—453.

5. Гольдберг А. А. IV. — «Мат. сб.», 1965, т. 66 (108), с. 412—457.

6. Говоров Н. В. Об индикаторе функций нецелого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости. — Дан СССР, 1965, т. 162, № 3, с. 495—498.

7. Nevanlinna R. Über die Eigenschaften meromorphen Funktionen in einem Winkelraum. — «Acta Soc. Sci. Fenn.», 1925. Bd 50, H12, S. 1—45.

8. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. 1-я. М., Физматгиз, 1963, с. 97.

9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963 с. 1057.

Поступила 16 декабря 1972 г.