УДК 517. 535. 4

А. З. Мохонько

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ КРИВЫХ. I.

§ 1. Введение

При определении аналитической кривой $z = \lambda(t), a \leqslant t \leqslant b$ обычно требуют, чтобы производная $\lambda'(t)$ не равнялась нулю, т. е. чтобы аналитическая кривая была правильной, в то время как для приложений важно не исключать возможности обращения производной в нуль. Например, пусть в области D задана аналитическая функция $f(z)$ и задана правильная аналитическая кривая, которая проходит через нули производной этой аналитической функции. Тогда образ аналитической кривой при отображении $f(z)$ будет аналитической кривой, но, вообще говоря, неправильной.

Между тем в литературе (см. например, [1, гл. 5]) часто без доказательства используются свойства аналитических кривых, которые, насколько нам известно, были до сих пор доказаны лишь для правильных аналитических кривых. Например, утверждается, что если $f(z)$ — целая функция, то образ окружности $|z| = r$ при отображении, осуществляемом этой функцией, является замкнутой аналитической кривой с конечным числом точек самопересечения, хотя это, как будет следовать из результатов статьи, и верно, но из известных теорем это не следует, так как если окружность проходит через нуль $f'(z)$, то образ окружности, вообще говоря, правильной аналитической кривой не будет.

Известна теорема (см. [2, т. 2, с. 463]).

Теорема А. Пусть $L_1 : z = \lambda_1(t'),\ \alpha' \leqslant t' \leqslant \beta'$; $L_2 : z = \lambda_2(t''),\ \alpha'' \leqslant t'' \leqslant \beta''$, — *две правильные аналитические кривые. Если множества значений параметров* t' *и* t'', *для которых* L_1 *и* L_2 *имеют общие точки, не являются одновременно конечными множествами (например, если само множество общих точек бесконечно), то* L_1 *и* L_2 *имеют общие дуги (одну или две), началом и концом которых служат начальные и конечные точки кривых* L_1 *и* L_2.

Рассмотрим такой пример. Возьмем правильные аналитические кривые: $L_1 : z = e^{it}, t \in [0, 6\pi]$; $L_2 : z = e^{it}, t \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Множество точек кривой L_2 принадлежит L_1. Однако применение к этим кривым теоремы А показывает возможность неоднозначного толкования понятия общих дуг, концов дуг и количества общих дуг. Мы хотим избавиться в теореме А от требования правильности аналитических кривых и уточнить ее формулировку.

В этой статье мы исследуем свойства аналитических кривых. Ввиду того, что разные авторы придерживаются различной терминологии, а нам важно избежать возможности недоразумений, для удобства читателя приведем все необходимые определения

§ 2. Основные определения и вспомогательные результаты

Определение 1. *Назовем кривой комплекснозначную непрерывную функцию $z = \lambda(t)$ действительного аргумента $t \in [a, b]$. Обозначим кривую через $\{\lambda(t)\,[a, b]\}$. Значения функции $\lambda(t)$ называются при этом точками кривой. Действительное переменное t называется параметром кривой. Точки $z_0 = \lambda(a)$ и $z^0 = \lambda(b)$ называются начальной и конечной точками кривой.*

Определение 2. *Кривая $\{\lambda(t), [a, b]\}$ называется аналитической кривой (а. к.), если функция $z = \lambda(t), a \leqslant t \leqslant b, \lambda(t) \not\equiv$ const — аналитическая функция параметра $t \in [a, b]$, т. е. представима в некоторой окрестности каждой точки $t_0 \in [a, b]$ в виде*

$$\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)(t - t_0)^n.$$

Определение 3. *Проекцией кривой $\{\lambda(t), [a, b]\}$ называется образ сегмента $[a, b]$ при отображении $z = \lambda(t)$, т. е. множество точек кривой. Обозначим проекцию кривой через $\lambda([a, b])$.*

Определение 4. *Назовем а. к. $\{\lambda(t), [a, b]\}$ правильной, если $\lambda'(t) \neq 0$ на $[a, b]$. В противном случае а. к. назовем неправильной.*

Определение 5. *Дугой кривой $\{\lambda(t), [a, b]\}$ назовем кривую $\{\lambda(t), [\alpha, \beta]\}$, где $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Аналогично проекции кривой определяется проекция дуги.*

Определение 6. *Кривые $\{\lambda_1(t'), [a', b']\}$ и $\{\lambda_2(t''), [a'', b'']\}$ имеют общие точки, если существуют такие t_0', t_0'', что $\lambda_1(t_0') = \lambda_2(t_0'') = z_0$. Точку z_0 назовем общей точкой этих кривых.*

Определение 7. *Кривые $\{\lambda_1(t'), [a', b']\}$ и $\{\lambda_2(t''), [a'', b'']\}$ совпадают, если $\lambda_1([a', b']) = \lambda_2([a'', b''])$, т.е. совпадают их проекции.*

Определение 8. *Кривые $\{\lambda_1(t'), [a', b']\}$ и $\{\lambda_2(t''), [a'', b'']\}$ имеют общую дугу, если существуют такие $[\alpha', \beta'] \subset [a', b']$ и $[\alpha'', \beta''] \subset [a'', b'']$, что $\lambda_1([\alpha', \beta']) = \lambda_2([\alpha'', \beta''])$, при этом дуги $\{\lambda_1(t'), [\alpha', \beta']\}$ и $\{\lambda_2(t''), [\alpha'', \beta'']\}$ называются общими. Общие дуги назовем максимальными общими дугами, если дополнительно выполняется условие: для всяких $\alpha_1', \beta_1', \alpha_1'', \beta_1''; \alpha_1' \leqslant \alpha', \beta' \leqslant \beta_1'; \alpha_1'' \leqslant \alpha'', \beta'' \leqslant \beta_1''$, где хотя бы в одном месте выполняется строгое неравенство, $\lambda_1([\alpha_1', \beta_1']) \neq \lambda_2([\alpha_1'', \beta_1''])$.*

Определение 9. *Кривая $\{\lambda(t), [a, b]\}$ называется кусочно-аналитической (к.-а.к.), если сегмент $[a, b]$ может быть подразделен на конечное число сегментов $[t_j, t_{j+1}]$, $(a = t' < t_1 < \ldots < t_n = b)$, на каждом из которых $\lambda(t)$ — аналитическая функция.*

Определение 10. *Кривая $\{\lambda(t), [a, b]\}$ имеет точки самопересечения, если существуют такие $t_1 t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$, что $\lambda(t_1) = \lambda(t_2)$. Образы t_1, t_2 при отображении $z = \lambda(t)$, а если это не будет вызывать недоразумений, то и сами значения параметров t_1, t_2 назовем точками самопересечения.*

Замечание 1. Пусть $\{\lambda(t), [a, b]\}$ — а.к. Известно, что если $\lambda'(t_0) \neq 0, t_0 \in [a, b]$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что в окрестности

$[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]\cap[a, b]$ (все такие окрестности дальше обозначим просто через $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$), функция $z=\lambda(t)$ взаимно-однозначна. Если $\lambda'(t_0)=0$, $t_0\in[a, b]$, то существует окрестность $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ такая, что в ней

$$\lambda(t)=z_0+(t-t_0)^p[A_p+A_{p+1}(t-t_0)+\ldots]=z_0+$$
$$+[(t-t_0)\sqrt[p]{R(t)}]^p=z_0+[(t-t_0)\varphi(t)]^p,$$

где $p\geqslant 2$, $A_p\neq 0$, $R(t)=A_p+A_{p+1}(t-t_0)+\ldots$, $R(t_0)\neq 0$, $\varphi(t)=$ $=\sqrt[p]{R(t)}$ — какая-нибудь однозначная ветвь корня. Обозначим $w=(t-t_0)\varphi(t)=\psi(t)$, $\psi'(t_0)\neq 0$. Поэтому существует окрестность $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, в которой отображение $w=\psi(t)$ взаимно-однозначно. При $t=t_0$ проекция дуги $\{\psi(t), [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]\}$ проходит через начало координат. В точке, соответствующей $t=t_0$, она имеет касательную, угол которой с действительной осью равен $\alpha=$ $=\operatorname{Arg}\varphi(t_0)$. Для всякого ε, $\pi/2>\varepsilon>0$ можно найти $\varepsilon_1>0$ такое, что проекция дуги $\{\psi(t), [t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_1]\}$ лежит внутри вертикальных углов $\{|\arg w-\alpha|<\varepsilon\}\cup\{|\arg w-\alpha-\pi|<\varepsilon\}\cup\{0\}$, причем точки, соответствующие $t>t_0$, лежат в одном из этих углов, а при $t<t_0$ — в противоположном. Угол между касательными к проекциям дуг $\{\psi(t), [t_0-\varepsilon_1, t_0]\}$ и $\{\psi(t), [t_0, t_0+\varepsilon_1]\}$ в точке $w=0$ равен π.

Согласно нашим обозначениям $\lambda(t)=z_0+[\psi(t)]^p$, $t\in[t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_1]$. Поэтому дуги $\{\lambda(t), [t_0-\varepsilon_1, t_0]\}$ и $\{\lambda(t), [t_0, t_0+\varepsilon_1]\}$ тоже являются взаимно-однозначными отображениями на соответствующих сегментов. Их проекции имеют касательные в точке $z=z_0$ (см. [2, т. 1, с. 98]), причем угол между ними в этой точке равен $p\pi+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$ Следовательно, если p — нечетно, то отображение $z=\lambda(t)$ взаимно-однозначно на сегменте $[t_0-\varepsilon', t_0+\varepsilon_1]$. Если p — четно, то могут быть две возможности: 1) существует $\varepsilon'>0$ такое, что $z=\lambda(t)$ взаимно-однозначно на сегменте $[t_0-\varepsilon', t_0+\varepsilon']$; 2) в любой окрестности t_0 дуга $\{\lambda(t), [t_0-\varepsilon', t_0+\varepsilon']\}$ имеет точки самопересечения, хотя отображение $z=\lambda(t)$ взаимно-однозначно на $[t_0-\varepsilon', t_0]$ и $[t_0, t_0+\varepsilon']$.

Определение 11. *Точка $t_0\in(a, b)$ называется точкой складки для а. к. $\{\lambda(t), [a, b]\}$, если в любой окрестности t_0 имеются точки самопересечения этой а. к. Точка $t_0\in[a, b]$ называется регулярной, если отображение $\lambda(t)$ взаимно-однозначно в некоторой окрестности t_0.*

Из замечания 1 следует, что точками складки могут быть только нули производной $\lambda'(t)$. К регулярным относятся все точки, в которых $\lambda'(t)\neq 0$, и, может быть, некоторые нули производной $\lambda'(t)$.

Замечание 2. Мы несколько раз встретимся с ситуацией, когда для бесконечного множества E значений t' точки а. к. (или к.-а. к.) $\{\lambda_1(t'), [a', b']\}$ являются общими и для а. к. (или к.-а. к.) $\{\lambda_2(t''), [a'', b'']\}$. Пусть t_0' — предельная точка множества E и $\{t_n'\}$ —

последовательность точек из E, сходящаяся к t_0', причем такая, что все значения $z_n = \lambda_1(t_n')$ различны. Такую последовательность можно выбрать, так как согласно определению а. к. $\lambda_1(t') \neq \mathrm{const}$. По определению множества E точки z_n являются одновременно точками а. к. $\{\lambda_2(t''), [a'', b'']\}$. Фиксируем для каждой из них по одному значению параметра $t'' : z_n = \lambda_2(t_n'')$ и, переходя в случае необходимости к подпоследовательностям, можем считать, что $\{t_n''\}$ сходятся к некоторой точке t_0''. Очевидно,

$$\lambda_2(t_0'') = \lim_{n\to\infty} \lambda_2(t_n'') = \lim_{n\to\infty} \lambda_1(t_n') = \lambda_1(t_0') = z_0.$$

Значения t_0' и t_0'' будем называть предельными точками значений параметров а. к., соответствующих общим точкам.

Замечание 3. Пусть $\{\lambda(t), [a, b]\}$ — а. к. и пусть сегменты $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $[t_0 - \varepsilon, t_0]$ $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ принадлежат $[a, b]$. Если это не оговаривается особо, будем считать $\varepsilon > 0$ настолько малым, что указанные сегменты функция $\lambda(t)$ отображает взаимно-однозначно.

§ 3. Основные результаты

Теорема 1. *Если $t_0 \in (a, b)$ — точка складки а. к. $\{\lambda(t), [a, b]\}$, т. е. если в любой окрестности t_0 а. к. имеет точки самопересечения, то существуют такие $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, что совпадают проекции дуг*

$$\lambda([t_0 - \varepsilon_1, t_0]) = \lambda([t_0, t_0 + \varepsilon_2]). \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda(t), [a, в]\}$ — а. к. Существует а. к. $\{\mu(s), [\alpha, \beta]\}$ такая, что*

$$\text{а)}\quad \lambda([a, b]) = \mu([\alpha, \beta]), \tag{2}$$

б) *а. к. $\{\mu(s), [\alpha, \beta]\}$ имеет не более конечного числа точек самопересечения.*

Определение 12. *А. к. $\{\mu(s), [\alpha, \beta]\}$, обладающая свойствами* а), б) *теоремы 2, называется соответствующей а. к. $\{\lambda(t), [a, b]\}$.*

Пример 1. Рассмотрим а. к. $\{z = \lambda(t) = \exp(it^2), [-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi}]\}$. Эта а. к. — неправильная, так как $\lambda'(0) = 0$. Точка $t = 0$ — точка складки. Дуга $\{\lambda(t), [0, \sqrt{\pi/2}]\}$ совпадает с $\{\lambda(t), [-\sqrt{\pi/2}, 0]\}$. В качестве а. к., соответствующей $\{\lambda(t), [-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi}]\}$, можно взять $z = \exp(i\pi s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.

Теорема 3. *Пусть а. к. $\{\lambda_1(t'), [a', b']\}$ и а. к. $\{\lambda_2(t''), [a'', b'']\}$ имеют бесконечно много общих точек. Пусть этим кривым соответствует а. к. $\{\mu_1(s'), [c', d']\}$ и а. к. $\{\mu_2(s''), [c'', d'']\}$. Тогда $\{\mu_1(s'), [c', d']\}$ и $\{\mu_2(s''), [c'', d'']\}$ имеют общие максимальные дуги (только одну или две), началом и концом которых служат начальные и конечные точки этих кривых. Других общих точек, за исключением, быть может, конечного числа точек, нет.*

Теорема 4. *Пусть* $L_1 = \{\mu_1(t_1), [a_1, b_1]\}, \ldots, L_n = \{\mu_n(t_n), [a_n, b_n]\}$ — *а. к., причем* L_{j+1} *и* L_j, $j = 1, \ldots, n-1$ *имеют бесконечно много общих точек. Тогда*

а) *существует а. к.* $\{\nu(s), [\alpha, \beta]\}$, *имеющая не более конечного числа точек самопересечения, такая, что*

$$\nu([\alpha, \beta]) = \bigcup_{j=1}^{n} \mu_j([a_j, b_j]); \tag{3}$$

б) *если* L_j, $j = 1, \ldots, n$ — *правильные а. к., то и* $\{\nu(s), [\alpha, \beta]\}$ — правильная.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Нам будут нужны следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть кривые* $\{\lambda_1(t'), [\tau_1', \tau_2']\}$ *и* $\{\lambda_2(t''), [\tau_1'', \tau_2'']\}$ *такие, что отображения* $\lambda_1(t')$ *и* $\lambda_2(t'')$ *взаимно-однозначны на сегментах* $[\tau_1', \tau_2']$ *и* $[\tau_1'', \tau_2'']$ *соответственно. Предположим, что*

$$\lambda_1([\tau_1', \tau_2']) \supset \lambda_2([\tau_1'', \tau_2'']). \tag{4}$$

Пусть

$$\lambda_1(\alpha_1) = \lambda_2(\alpha_2); \ \lambda_1(\beta_1) = \lambda_2(\beta_2), \tag{5}$$

$$\text{где } \tau_1' \leqslant \alpha_1 < \beta_1 \leqslant \tau_2'; \ \tau_1'' \leqslant \alpha_2 < \beta_2 \leqslant \tau_2''.$$

Тогда $\lambda_1([\alpha_1, \beta_1]) = \lambda_2([\alpha_2, \beta_2])$.

Доказательство. Легко видеть, что $\{\lambda_1[\lambda_1^{-1}\lambda_2(t'')], [\alpha_2, \beta_2]\} = \{\lambda_2(t''), [\alpha_2, \beta_2]\}$ и в то же время имеет ту же проекцию, что и $\{\lambda_1(t'), [\alpha_1, \beta_1]\}$.

Следующая лемма является основной в данной статье.

Лемма 2. *Пусть а. к.* $\{\lambda_1(t'), [a', b']\}$ *и* $\{\lambda_2(t''), [a'', b'']\}$ *имеют бесконечно много общих точек. Тогда:*

1) если предельные точки t_0' *и* t_0'' *значений параметров этих а. к., соответствующих общим точкам, обе регулярные или обе точки складки, то существуют такие* $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_1'', \varepsilon_2'' > 0$, *что*

$$\lambda_1([t_0' - \varepsilon_1', t_0' + \varepsilon_2']) = \lambda_2([t_0'' - \varepsilon_1'', t_0'' + \varepsilon_2'']); \tag{6}$$

2) *если предельная точка* t_0' — *регулярная, а* t_0'' — *точка складки, то существуют такие* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$, *что либо*

$$\lambda_1([t_0' - \varepsilon_1, t_0']) = \lambda_2([t_0'' - \varepsilon_2, t_0'' + \varepsilon_3]), \tag{7}$$

либо

$$\lambda_1([t_0', t_0' + \varepsilon_1]) = \lambda_2([t_0 - \varepsilon_2, t_0'' + \varepsilon_3]). \tag{8}$$

Доказательство. 1. Допустим, что в точке t_0' производная $\lambda_1(t_0') \neq 0$.

Относительно t_0'' возможны предположения: а) t_0 — регулярная точка, б) t_0 — точка складки.

Функция $z=\lambda_1(t')$ осуществляет конформное, однолистное отображение некоторой круговой ε'-окрестности t_0' на область g, содержащую точку $z_0=\lambda_1(t_0')=\lambda_2(t_0'')$. Рассмотрим столь малую ε''-окрестность точки t_0'', чтобы проекция дуги $\{\lambda_2(t''), [t_0''-\varepsilon'', t_0''+\varepsilon'']\}$ содержалась в области g. Согласно условию, дуги $\{\lambda_1(t'), [t_0'-\varepsilon', t_0'+\varepsilon']\}$ и $\{\lambda_2(t''), [t_0''-\varepsilon'', t_0''+\varepsilon'']\}$ имеют бесконечно много общих точек. При конформном отображении $t'=\lambda_1^{-1}(z)$ области g на окрестность точки t_0' проекция дуги $\{\lambda_1(t'), [t_0'-\varepsilon', t_0'+\varepsilon']\}$ перейдет в сегмент действительной оси, содержащий точку t_0', а проекция $\lambda_2([t_0''-\varepsilon'', t_0''+\varepsilon''])$ — в проекцию а. к. $\{\lambda_1^{-1}\lambda_2(t''), [t_0''-\varepsilon'', t_0''+\varepsilon'']\}$, пересекающую действительную ось в бесконечном множестве различных точек, имеющих t_0' своей предельной точкой. Ордината точек этой кривой $\operatorname{Im}\lambda_1^{-1}\lambda_2(t'')$ является аналитической функцией от t'', $|t_0''-t''|<\varepsilon''$, обращающаяся в нуль на бесконечном множестве различных точек t_n'' с предельной точкой t_0''. Отсюда следует, что она тождественно равна нулю, т. е. проекция а. к. $\{\lambda_1^{-1}\lambda_2(t''), [t_0''-\varepsilon'', t_0''+\varepsilon'']\}$ принадлежит сегменту $[t_0'-\varepsilon', t_0'+\varepsilon']$ действительной оси. Так как отображение $t'=\lambda_1^{-1}(z)$ конформно и однолистно в области g, то отсюда следует, что

$$\lambda_2([t_0''-\varepsilon'', t_0''+\varepsilon''])\subset\lambda_1([t_0'-\varepsilon', t_0'+\varepsilon']). \tag{9}$$

Пусть $z=\lambda_2(t'')$ имеет в окрестности t_0'' разложение

$$\lambda_2(t'')=z_0+(t''-t_0'')^p\,[A_p+A_{p+1}(t''-t_0'')+\ldots]; \tag{10}$$

согласно замечанию 1, для всякого ε, $\pi>\varepsilon>0$ можно найти такое $\varepsilon'>0$, что проекция $\lambda_1([t_0'-\varepsilon', t_0'+\varepsilon'])$ лежит внутри вертикальных углов с вершиной z_0:

$$\{z_0\}\cup\{|\arg(z-z_0)-\arg\lambda_1'(t_0')|<\varepsilon/2\}\cup\{|\arg(z-z_0)-\\ -\arg\lambda_1'(t_0')-\pi|<\varepsilon/2\}, \tag{11}$$

причем $\lambda_1([t_0'-\varepsilon', t_0'])$ лежит в одном из этих углов, а $\lambda_1([t_0', t_0'+\varepsilon'])$ — в противоположном (здесь мы учитываем, что $\lambda_1'(t_0')\neq 0$). Кроме того, проекции $\lambda_2([t_0''-\varepsilon'', t_0''])$ и $\lambda_2([t_0'', t_0''+\varepsilon''])$ имеют касательные в точке $z=z_0$, и для всякого $\varepsilon>0$ можно подобрать такие ε_1'', $\varepsilon_2''>0$; ε_1'', $\varepsilon_2''<\varepsilon''$, что эти проекции содержатся внутри некоторых углов раствора ε с вершиной в $z=z_0$. Учитывая (9), получаем, что каждая из этих проекций принадлежит либо $\lambda_1([t_0'-\varepsilon', t_0'])$, либо $\lambda_1([t_0', t_0'+\varepsilon'])$.

а). Пусть в разложении (10) p — нечетно. Согласно замечанию 1, точка t_0'' — регулярная. Угол между касательными к проекциям $\lambda_2([t_0''-\varepsilon_1'', t_0''])$ и $\lambda_2([t_0'', t_0''+\varepsilon_2''])$ в точке z_0 равен $p\pi+2k\pi$,

$k=0, \pm 1, \ldots$ Поэтому эти проекции лежат в противоположных углах вертикальных углов (11) и принадлежат разным проекциям $\lambda_1([t_0'-\varepsilon', t_0'])$, $\lambda_1([t_0', t_0'+\varepsilon'])$. Используя лемму 1 и подбирая подходящим образом $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_1'', \varepsilon_2''>0$, убеждаемся, что в данном случае выполняется первый пункт утверждения леммы 2.

б). Предположим, что в разложении (10) p — четно. Угол между касательными к проекциям $\lambda_2([t_0''-\varepsilon_1'', t_0''])$ и $\lambda_2([t_0'', t_0''+\varepsilon_2''])$ в точке $z_0=\lambda_2(t_0'')$ равен целому кратному 2π. Учитывая (9), получаем, что эти проекции принадлежат одновременно одной и той же проекции $\lambda_1([t_0'-\varepsilon', t_0'])$ или $\lambda_1([t_0', t_0'+\varepsilon'])$. Следовательно, t_0'' — точка складки. Взяв подходящие $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3>0$ и используя лемму 1, убедимся, что в данном случае справедлив второй пункт утверждения леммы 2.

II. Предположим, что в обеих предельных точках t_0' и t_0'' производные $\lambda_1'(t_0')=0$, $\lambda_2'(t_0'')=0$. Тогда в окрестностях точек t_0' и t_0'' а. к. $\{\lambda_1(t'), [a', b']\}$ и $\{\lambda_2(t''), [a'', b'']\}$ имеют разложения

$$\lambda_1(t')=z_0+(t'-t_0')^{p_1}\varphi_1(t'), \tag{12}$$

$$\lambda_2(t'')=z_0+(t''-t_0'')^{p_2}\varphi_2(t''), \tag{13}$$

где $p_1, p_2 \geqslant 2$; $\varphi_1(t'), \varphi_2(t'')$ — однозначные аналитические функции в окрестности точек t_0' и t_0'', $\varphi_1(t_0')\neq 0$, $\varphi_2(t_0'')\neq 0$. Согласно условию леммы 2 и замечанию 2, для некоторых последовательностей $\{t_n'\}\to t_0'$ и $\{t_n''\}\to t_0''$ выполняются равенства

$$(t_n'-t_0')^{p_1}\varphi_1(t_n')=(t_n''-t_0'')^{p_2}\varphi_2(t_n''). \tag{14}$$

а). Пусть p_1 — нечетно. Обозначим $(t''-t_0'')^{p_2}=\tau^{p_1p_2}$, $\tau^{p_1}+t_0''=t''$, где τ — действительное число. Если $t_0''-\varepsilon_1''\leqslant t''\leqslant t_0''+\varepsilon_2''$, то $-\sqrt[p_1]{\varepsilon_1''}\leqslant\tau\leqslant\sqrt[p_1]{\varepsilon_2''}$. Тогда

$$(t''-t_0'')^{p_2}\varphi_2(t'')=\tau^{p_1p_2}\varphi_2(\tau^{p_1}+t_0''), \tag{15}$$

Обозначив $\tau_n=(t_n''-t_0'')^{1/p_1}$, перепишем (14) в виде

$$(t_n-t_0')^{p_1}\varphi_1(t_n')=\tau_n^{p_2p_1}\varphi_2(\tau_n^{p_1}+t_0''). \tag{16}$$

Из обеих частей (16) возьмем корень степени p_1:

$$(t_n'-t_0')[\varphi_1(t_n')]^{1/p_1}=\tau_n^{p_2}[\varphi_2(\tau_n^{p_1}+t_0'')]^{1/p_1}, \tag{17}$$

причем для каждого n подбираем подходящие значения $\sqrt[p_1]{\varphi_1(t_n')}$ и $\sqrt[p_1]{\varphi_2(\tau_n^{p_1}+t_0'')}$. Далее будем считать, что для всех n значения $\sqrt[p_1]{\varphi_1(t_n')}$ $\left(\text{значения}\sqrt[p_1]{\varphi_2(t_0''+\tau_n^{p_1})}\right)$ принадлежат одной и той же ветви $\sqrt[p_1]{\varphi_1(t')}$ $\left(\text{соответственно ветви } \sqrt[p_1]{\varphi_2(\tau^{p_1}+t_0'')}\right)$ — однозначной аналитической функции в окрестности точки t_0' (в окрестности $\tau = 0$). В противном случае снова переходим к подпоследовательностям. Ясно, что

$$\frac{d}{dt'}\left[(t'-t_0')\sqrt[p_1]{\varphi_1(t')}\right]\Big|_{t'=t_0'} = \sqrt[p_1]{\varphi_1(t_0')} \neq 0.$$

Равенство (17) показывает, что а. к. $\left\{(t'-t_0')\sqrt[p_1]{\varphi_1(t')},\ [t_0'-\varepsilon_1',\ t_0'+\varepsilon_2']\right\}$ и а. к. $\left\{\tau^{p_2}\sqrt[p_1]{\varphi_2(\tau^{p_1}+t_0'')},\left[-\sqrt[p_1]{\varepsilon_1''},\ \sqrt[p_1]{\varepsilon_2''}\right]\right\}$ имеют бесконечно много общих точек, а предельные точки соответствующих значений параметров равны t_0' и $\tau=0$, причем t_0' — регулярная точка. Если p_2 нечетно, то, согласно сказанному в пункте I а) доказательства леммы 2, точка $\tau = 0$ — регулярная точка для а. к. $\left\{\tau^{p_2}\sqrt[p_1]{\varphi_2(\tau^{p_1}+t_0'')},\left[-\sqrt[p_1]{\varepsilon_1''},\sqrt[p_1]{\varepsilon_2''}\right]\right\}$. Поэтому, выбирая подходящие $\varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \varepsilon_1'',\ \varepsilon_2''>0$, будем иметь, что проекция а. к. $\left\{(t'-t_0')\sqrt[p_1]{\varphi_1(t')}\ [t_0'-\varepsilon_1',\ t_0'+\varepsilon_2']\right\}$ равна проекции а. к. $\left\{\tau^{p_2}\sqrt[p_1]{\varphi_2(\tau^{p_1}+t_0'')},\left[-\sqrt[p_1]{\varepsilon_1''},\sqrt[p_1]{\varepsilon_2''}\right]\right\}$. Учитывая (12), (13), (15) и обозначение $t''-t_0''=\tau^{p_1}$, отсюда получаем

$$\lambda_1([t_0-\varepsilon_1',\ t_0'+\varepsilon_2']) = \lambda_2([t_0''-\varepsilon_1'',\ t_0''+\varepsilon_2'']),$$

т. е. справедлив первый пункт утверждения леммы 2. Если же p_2 — четно, то, согласно сказанному в пункте I б) доказательства леммы 2, точка $\tau = 0$ — точка складки для а. к. $\left\{\tau^{p_2}\sqrt[p_1]{\varphi_2(\tau^{p_1}+t_0'')},\left[-\sqrt[p_1]{\varepsilon_1''},\sqrt[p_1]{\varepsilon_2''}\right]\right\}$. Выбирая подходящие $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3>0$, учитывая, что, $t''-t_0''=\tau^{p_1}$, а также (12), (13), (15), получим либо равенство (7), либо (8).

б). Предпсложим, что p_1 и p_2 — четные числа, $p_1 = 2^s r_1$, $p_2 = 2^t r_2$, где r_1 и r_2 — нечетные (r_1 и r_2 могут равняться единице). Пусть $t \geqslant s$, тогда (14) запишется так:

$$(t_n'-t_0')^{2^s r_1}\varphi_1(t_n') = (t_n''-t_0'')^{2^t r_2}\varphi_2(t_n''). \tag{18}$$

Из обеих частей (18) извлечем корень степени 2^s:

$$(t_n-t_0')^{r_1}[\varphi_1(t_n')]^{2^{-s}} = (t_n''-t_0'')^{2^{t-s}r_2}[\varphi_2(t_n'')]^{2^{-s}}. \tag{19}$$

Заменой $(t''_n - t''_0)^{2^{t-s} r_2} = \tau_n^{2^{t-s} r_2 r_1}$, $t''_n - t''_0 = \tau_n^{r_1}$ сведем этот случай к рассмотренному выше.

Мы доказали лемму 2, когда $a' < t'_0 < b'$; $a'' < t''_0 < b''$. Доказательство аналогично, если $t'_0 = a'$ или $t'_0 = b'$, причем формулировку леммы 2 в этом случае можно несколько упростить.

Доказательство теоремы 1. Пусть у а. к. $\{\lambda(t), [a, b]\}$ имеется точка складки $t_0 \in (a, b)$. Рассмотрим дуги $\{\lambda(t), [a, t_0]\}$ и $\{\lambda(t), [t_0, b]\}$. По определению точки складки эти дуги имеют бесконечно много общих точек с предельной точкой $t = t_0$ соответствующих значений параметров. Согласно лемме 2 можно так подобрать $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, что $\lambda([t_0 - \varepsilon_1, t_0]) = \lambda([t_0, t_0 + \varepsilon_2])$.

Определение 13. *Пусть* $\{\mu(t), [a', b']\}$ *и* $\{\lambda(r), [a'', b'']\}$ — *а. к. такие, что* $\mu([\tau_1, \tau_2]) \subset \lambda([r_1, r_2])$, $[\tau_1, \tau_2] \subset [a', b']$, $[r_1, r_2] \subset \subset [a'', b'']$. Тогда, согласно замечанию 2 и лемме 2, для каждого $t_0 \in \in [\tau_1, \tau_2]$ существует точка $r_0 \in [r_1, r_2]$ такая, что при некоторых $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon''_1, \varepsilon''_2 > 0$ выполняется $\mu([t_0 - \varepsilon'_1, t_0 + \varepsilon'_2]) = \lambda([r_0 - \varepsilon''_1, r_0 + \varepsilon''_2])$, $\mu(t_0) = \lambda(r_0)$. Скажем, что точка r_0 соответствует t_0, и будем записывать $r_0 \sim t_0$.

§ 5. Несколько лемм

Лемма 3. *Пусть а. к.* $L = \{\mu(t), [a, b]\}$ *такая что*

$$\mu([a, a + \varepsilon_1]) = \mu([b - \varepsilon_2, b]), \ a \sim b, \ a + \varepsilon_1 \sim b - \varepsilon_2. \tag{20}$$

Тогда L *имеет точки складки.*

Пусть $t_0 = \sup\{t : \mu([a, t]) = \mu([r, b]);\ t < r;\ t \sim r;\ t, r$ — регулярные точки$\}$. Если t монотонно возрастает и $t \to t_0$, то из леммы 2 следует, что r, $(t \sim r)$ монотонно убывает, стремясь к некоторому r_0. Из определения t_0 и условия (20) следует, что

$$\mu([a, t_0]) = \mu([r_0, b]), \ t_0 \sim r_0, \ a < t_0 \leqslant r_0 < b. \tag{21}$$

Если $t_0 = r_0$, то из (21) следует, что t_0 — точка складки. Если $t_0 < r_0$; t_0, r_0 — регулярные точки, то из определения соответствующих точек и леммы 2 следует, что $\mu([a, t_0 + \varepsilon_1]) = \mu([r_0 - \varepsilon_2, b])$, $t_0 + \varepsilon_1 \sim r_0 - \varepsilon_2$, а это противоречит определению точки t_0. Следовательно, либо t_0, либо r_0 — точка складки,

Лемма 4. *Пусть а. к.* $L_1 = \{\mu(t), [a', b']\}$ *и* $L_2 = \{\lambda(r), [a'', b'']\}$ *такие, что все точки* $t \in [a', b']$, $r \in [a'', b'']$ — *регулярные. Предположим, что эти а. к. имеют бесконечно много общих точек. Существуют такие* t_0, r_0, *что*

$$a' < t_0 < b'; \ a'' < r_0 < b''; \ \mu'(t_0) \neq 0; \ \lambda'(r_0) \neq 0; \ t_0 \sim r_0, \tag{22}$$

и выполняется одно из соотношений: либо

$$\mu([t_0, b']) \subset \lambda([r_0, b'']), \tag{23}$$

либо

$$\mu([t_0, b']) \supset \lambda([r_0, b'']). \tag{24}$$

В силу замечания 2 существуют точки t_0, r_0 — предельные точки значений параметров, соответствующих общим точкам а. к. L_1 и L_2. Применяя лемму 2, можем считать, что $a' < t_0 < b'$; $a'' < r_0 < b''$; $\mu'(t_0) \neq 0$, $\lambda'(r_0) \neq 0$. Согласно лемме 2, существуют такие $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_1'', \varepsilon_2'' > 0$, что

$$\mu([t_0 - \varepsilon_1', t_0]) = \lambda([r_0 - \varepsilon_1'', r_0]), \tag{25}$$

$$\mu([t_0, t_0 + \varepsilon_2']) = \lambda([r_0, r_0 + \varepsilon_2'']), \ \mu(t_0) = \lambda(r_0). \tag{26}$$

Положим

$$t^* = \max\{t : \mu([t_0, t]) \subset \lambda([r_0, b''])\}. \tag{27}$$

Из (26) следует, что $t_0 < t^*$. Если $t^* = b'$, то выполняется соотношение (23). Пусть $t_0 < t^* < b'$. Положим

$$r^{**} = \max\{r : \lambda([r_0, r]) \subset \mu([t_0, t^*])\}. \tag{28}$$

Покажем, что $r^{**} = b''$, т. е. справедливо соотношение (24). Действительно, если $r^{**} < b''$, то из (26) следует, что $r_0 < r^{**} < b''$. Ясно, что $\lambda([r_0, r^{**}]) \subset \mu([t_0, t^*])$. Поэтому точке r^{**} соответствует некоторая точка $t^{**} \in [t_0, t^*]$ — промежутка определения дуги $\{\mu(t), [t_0, t^*]\}$, $r^{**} \sim t^{**}$. Предположим, что $t^{**} = t_0$, т. е. $r^{**} \sim t_0$. Из определения соответствующей точки и из определения r^{**} следует, что

$$\mu([t_0, t_0 + \varepsilon_1]) = \lambda([r^{**} - \varepsilon_2, r^{**}]), \ \mu(t_0) = \lambda(r^{**}). \tag{29}$$

Учитывая (29) и (26), получаем $\lambda([r^{**} - \varepsilon'', r^{**}]) = \lambda([r_0, r_0 + \varepsilon'])$, $\lambda(r_0) = \lambda(r^{**})$. Из леммы 3 следует, что на промежутке $[r_0, r^{**}]$ а. к. L_2 имеет точки складки, что противоречит условию. Пусть $t_0 < t^{**} < t^*$. Так как $r_0 < r^{**} < b''$ и $r^{**} \sim t^{**}$, то из леммы 2 следует, что выполняется равенство

$\lambda([r^{**} - \varepsilon_1', r^{**} + \varepsilon_2']) = \mu([t^{**} - \varepsilon_1'', t^{**} + \varepsilon_2''])$. Следовательно, $\lambda([r_0, r^{**} + \varepsilon_2']) \subset \mu([t_0, t^*])$, что противоречит определению r^{**}.

Предположим, что $t^{**} = t^*$. Так как $t_0 < t^* < b'$, $r_0 < r^{**} < b''$, то из условия, что $r^{**} \sim t^*$, следует $\lambda([r^{**} - \varepsilon_1', r^{**} + \varepsilon_2']) = \mu([t^* - \varepsilon_1'', t^* + \varepsilon_2''])$, т. е. получаем, что $\mu([t_0, t^* + \varepsilon_2'']) \subset \lambda([r_0, b''])$, что противоречит определению точки t^*. Следовательно, наше предположение о том, что $r^{**} < b''$, не верно. Лемма доказана. Аналогично можно показать, что наряду с (23) или (24) выполняется либо

$$\mu([a', t_0]) \subset \lambda([a'', r_0]), \tag{30}$$

либо

$$\mu([a', t_0]) \supset \lambda([a'', r_0]). \tag{31}$$

Выражаю глубокую благодарность А. А. Гольдбергу за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейман У. Мероморфные функции. М., «Мир», 1966. 287 с.
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М., «Наука», 1968. 486 с., 624 с.
3. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., «Наука», 1966. 628 с.

Поступила 1 ноября 1972 г.