УДК 517.3

М. Хуссайн, канд. физ.-мат. наук

О ДЕФЕКТАХ И ВЕЛИЧИНАХ ОТКЛОНЕНИЙ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ

§ 1. Введение

Пусть C^p — p-мерное комплексное унитарное пространство, $\vec{a}$ — векторы из C^p, A — фиксированная допустимая система векторов этого пространства (т. е. любые p — различные векторы из системы A — являются линейно независимыми) и

$$\vec{G}(z) = \{q_1(z),\ g_2(z),\ \ldots,\ g_P(z)\}$$

— P-мерная целая кривая* (см. [1—4]).

Напомним некоторые обозначения теории распределения значений целых кривых (см. [3—4]).

Неванлинновской характеристикой целой кривой $\vec{G}(z)$ называется

$$T(r,\ \vec{G}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \| G(re^{i\theta}) \| \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta + 0(1),$$

где $u(z) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} \ln | g_k(z) |$. Порядок ρ и нижний порядок λ целой кривой $\vec{G}(z)$ определяются обычным способом.

Неванлинновская функция приближения $m(r,\ \vec{a},\ \vec{G})$ и функция числа $N(r,\ \vec{a},\ \vec{G})$ определяются так

$$m(r,\ \vec{a},\ \vec{G}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{\| \vec{G}(re^{i\theta}) \| \, \| \vec{a} \|}{|(\vec{G}(re^{i\theta})\, \vec{a})|}\, d\theta;$$

$$N(r,\ \vec{a},\ \vec{G}) = \int_0^r [n(t,\ \vec{a},\ \vec{G}) - n(0,\ \vec{a},\ \vec{G})\, d\ln t + n(0,\ \vec{a},\ \vec{G}) \ln r,$$

где $n(t,\ \vec{a},\ \vec{G})$ — число корней скалярного произведения $(\vec{G}(z)\,\vec{a})$ в круге $|z| \leqslant t$ и $\vec{a} \in A$. Пусть

$$\delta(\vec{a},\ \vec{G}) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{m(r,\ \vec{a},\ \vec{G})}{T(r,\ G)}.$$

---

* Считаем, что все $q_k(z)$ не обращаются одновременно в нуль и $q_1(z), \ldots, q_p(z)$ линейно независимы.

Величина $\delta(\vec{a}, \vec{G})$ называется дефектом целой кривой $\vec{G}(z)$ в смысле Р. Неванлинны. Известно, что для любой фиксированной допустимой системы векторов A (см. [4])

$$\sum_{\vec{a} \in A} \delta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant P. \tag{1.1}$$

В работе [11] введена величина отклонения $\beta(\vec{a}, \vec{G})$ целой кривой $\vec{G}(z)$ от вектора $\vec{a}$. Оказалось, что свойства величины $\beta(\vec{a}, \vec{G})$ вполне аналогичны свойствам величин отклонений мероморфных функций.

Напомним это определение.

Положим для $\vec{a} \in A$

$$L(r, \vec{a}, \vec{G}) = \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \ln \frac{\|\vec{G}(re^{i\theta})\| \, \|\vec{a}\|}{|\vec{G}(re^{i\theta})\vec{a})|},$$

$$\beta(\vec{a}, \vec{G}) = \lim_{r \to \infty} \frac{L(r, \vec{a}, \vec{G})}{T(r, \vec{G})}.$$

В работах [10, 11] установлены некоторые свойства величин $\beta(\vec{a}, \vec{G})$. Приведем два результата в этом направлении.

Теорема А [11]. *Если целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, тогда:*

а) *для любого вектора $\vec{a} \in A$*

$$\beta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda} & \textit{при } \lambda < \dfrac{1}{2}, \\ \pi\lambda & \textit{при } \lambda \geqslant \dfrac{1}{2}; \end{cases} \tag{1.2}$$

б) *множество $\Omega_A(\vec{G}) = \{\vec{a}, \in A \,\&\, \beta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$ не более чем счетно.*

Оценки (1.2) точные. Занумеруем векторы $\vec{a} \in \Omega_A(\vec{G})$ в порядке невозрастания их величин отклонений:

$$\beta(\vec{a}_k, \vec{G}) \geqslant \beta(\vec{a}_{k+1}, \vec{G}), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

Теорема Б [10]. *Если нижний порядок целой кривой $\vec{G}(z)$ $\lambda \leqslant 1$, тогда*

$$\beta(\vec{a}_p, \vec{G}) \leqslant \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2} \left[P - \sum_{k=1}^{p} \delta(\vec{a}_k \vec{G})\right]. \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что множество $\Omega_A(\vec{G})$ для целой кривой нулевого порядка может содержать самое большее $P-1$ точку. Это аналог теоремы Ж. Валирона [12] для мероморфных функций.

Результаты этой работы характеризуют величины дефектов и величины отклонений целых кривых, а также множества положительных отклонений $\Omega_A(\vec{G})$. Эти результаты тесно связаны с соответствующими утверждениями для мероморфных функций.

Сформулируем теперь полученные нами результаты для целых кривых. Будем обозначать фиксированную допустимую систему векторов A через $A(\omega)$, если координаты векторов $\vec{a}$ из этой системы зависят от комплексного параметра ω. В этом случае векторы из допустимой системы $A(\omega)$ будем обозначать через $\vec{a}(\omega)$.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — произвольная мероморфная в $z \neq \infty$ функция. Можно указать такую p-мерную целую кривую $\vec{G}(z)$ ($P \geqslant 2$) и такую допустимую систему векторов $A(\omega)$, что* ($r > r_0$)

$$T(r, \vec{G}) = (p-1)\,T(r, f) + 0(1),$$
$$m(r, \vec{a}(\omega), \vec{G}) = (p-1)\,m(r, \omega, f) + 0(1),$$
$$\delta(\vec{a}(\omega), \vec{G}) = \delta(\omega, f),$$
$$\Delta(\vec{a}(\omega), \vec{G}) = \Delta(\omega, f),$$
$$\beta(\vec{a}(\omega), \vec{G}) = \beta(\omega f).$$

Эта теорема позволяет автоматически переносить на целые кривые со сколь угодно высокой размерностью многочисленные примеры мероморфных функций (т. е. двумерных целых кривых) с заданным ростом и распределением значений.

Приведем несколько следствий из этой теоремы. Выберем последовательность положительных чисел $\{\eta_k\}_1^\infty$, удовлетворяющую соотношению $\sum\limits_1^\infty \eta_k = 1$.

Следствие 1. *Для любого λ, $0 < \lambda < \infty$, $p \geqslant 2$ существует p-мерная целая кривая* $\vec{G}_\lambda(z)$ нижнего порядка λ и допустимая система векторов $A(\omega)$, содержащая последовательность различных векторов*

$$\vec{a}_k = \vec{a}(\omega_k) \in A(\omega) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

что

$$\delta(\vec{a}_k, \vec{G}) \geqslant \frac{\lambda^2}{9}\eta_k^3, \quad \beta(\vec{a}_k, \vec{G}) \geqslant \frac{\lambda^2}{3}\eta_k^2 \text{ при } \lambda < 1,$$
$$\delta(\vec{a}_k, \vec{G}) \geqslant \frac{\lambda^2}{9q^2}\eta_k^3, \quad \beta(\vec{a}_k, \vec{G}) \geqslant \frac{\lambda^2}{3q^2}\eta_k^2 \text{ при } \lambda \geqslant 1,$$

где $q = [\lambda] + 1$.

* Целая кривая $\vec{G}_\lambda(z)$ зависит от выбранной последовательности $\{\eta_k\}_1^\infty$.

Следствие 1 вытекает из теоремы 1, если в качестве $f(z)$ выбрать функцию, определенную в [5, с. 151; 6, с. 161].

Следствие 2. *Для любого* λ, $0<\lambda<\infty$, $p\geqslant 2$ *существует p-мерная целая кривая* $G_\lambda(z)$ *нижнего порядка* λ *и допустимая система векторов* $A(\omega)$, *что ряд*

$$\sum_{\vec{a}\in A(\omega)} \delta^\alpha(\vec{a}, \vec{G}_\lambda)$$

расходится при $\alpha<\frac{1}{3}$, *а ряд*

$$\sum_{\vec{a}\in A(\omega)} \beta^\alpha(\vec{a}, \vec{G}_\lambda)$$

расходится при $\alpha<\frac{1}{2}$.

Следствие 3. *Для любого* $p\geqslant 2$ *существует p-мерная целая кривая* $\vec{G}_\infty(z)$ *бесконечного нижнего порядка и допустимая система векторов* $A(\omega)$, *что множество* $\Omega_{A(\omega)}(\vec{G}_\infty)$ *имеет мощность континуума.*

Следствие 3 следует из теоремы 1, если в ней выбрать в качестве $f(z)$ целую функцию $\vec{G}(z)$, определенную в [8, с. 1336].

Следствие 4. *Для любого* $p\geqslant 2$ *существует p-мерная целая кривая* $\vec{G}_\infty(z)$ *бесконечного нижнего порядка и допустимая система векторов* $A(\omega)$ *такие, что ряд* $\sum_{\vec{a}\in A(\omega)} \delta^\alpha(\vec{a}, \vec{G}_\infty)$ *расходится при любом* α, $0<\alpha<1$.

Следствие 4 вытекает из теоремы 1, если в качестве $f(z)$ выбрать функцию, рассмотренную в [6, с. 166].

Полученные утверждения в следствиях 1—4 дополняют классические соотношения для дефектов целых кривых (1.1), а также тот факт, что множество $\Omega_A(\vec{G})$ не более чем счетно для целых кривых конечного нижнего порядка λ.

Доказательство теоремы 1 проведем в § 2.

Теорема 2. *Для любого* λ, $0<\lambda\leqslant 0{,}5$ *существует целая кривая* $\vec{G}_\lambda(z)$ *нижнего порядка* λ *и допустимая система векторов* A, *что для величин ее отклонений справедливы оценки*

$$\beta(\vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda)\geqslant \pi\lambda\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\lambda}{2}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\{1-\delta(\vec{a}_k, \vec{G}_\lambda)\}, \tag{1.5}$$

$$\beta(\vec{a}_{p}, \vec{G}_\lambda)\geqslant \pi\lambda\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\lambda}{2}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\{1-\delta(\vec{a}_k, \vec{G}_\lambda)\},$$

где векторы $\overrightarrow{a_k} \in A$ занумерованы в порядке невозрастания величин отклонений.

Оценка (1.5) показывает, что утверждение теоремы Б является близким к точному.

§ 2. Доказательство теоремы 1.

Пусть*

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)} \tag{2.1}$$

— мероморфная функция, где $g_1(z)$, $g_2(z)$ — целые функции, не имеющие общих нулей.

Заметим, что целые функции

$$h_k(z) = g_1^{p-k-1}(z)\, g_2^k(z), \quad k = 0, 1, \ldots, p-1 \tag{2.2}$$

являются линейно независимыми над полем комплексных чисел.

Рассмотрим целую кривую

$$\vec{G}(z) = \{h_0(z),\ h_1(z),\ \ldots,\ h_{p-1}(z)\} \tag{2.3}$$

и систему векторов A, $A = A(\omega) = \{\vec{a}(\omega)\}$, где при любом комплексном $\omega \neq \infty$

$$\vec{a}(\omega) = (1,\ \ldots,\ (-1)^k C_{p-1}^k \bar{\omega}^k,\ \ldots,\ (-1)^{p-1}\bar{\omega}^{p-1}).$$

Если $\{\vec{a}(\omega_k)\}_{k=1}^p$, P — различные векторы из системы A, тогда для определителя Δ этой системы имеем

$$|\Delta| = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \prod_{k=1}^{p-1} C_{p-1}^k \prod_{i \neq k} |\bar{\omega}_k - \bar{\omega}_i| \neq 0.$$

Таким образом, $A(\omega)$ — допустимая система векторов.

Будем исследовать дефекты и величины отклонений целой кривой $\vec{G}(z)$ для векторов $\vec{a}(\omega)$, принадлежащих этой допустимой системе $A(\omega)$.

Имеем

$$(\vec{G}(z)\vec{a}(\omega)) = \sum_{k=0}^{p-1} g_1^{p-k-1}(z)(-1)^k C_{p-1}^k g_2^k(z)\, \omega^k =$$

$$= (g_1(z) - \omega g_2(z))^{p-1} = g_2^{p-1}(z)\,(f(z) - \omega)^{p-1};$$

$$\|\vec{G}(z)\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{p-1} |g_1(z)|^{2(p-k-1)} \cdot |g_2(z)|^{2k}} =$$

$$= |g_1(z)|^{p-1} \sqrt{\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{|f(z)|^{2k}}} = |g_2(z)|^{p-1} \sqrt{\sum_{k=0}^{p-1} |f(z)|^{2(p-k-1)}}\,. \tag{2.4}$$

---

* Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $f(0) \neq 0, \infty$.

Поэтому

$$\frac{\|\vec{G}(z)\|}{|(\vec{G}(z)\vec{a}(\omega))|}=\frac{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{p-1}|f(z)|^{2(p-k-1)}}}{|f(z)-\omega|^{p-1}}\geqslant\frac{\max(|f(z)^{p-1},1)}{|f(z)-\omega|^{p-1}}. \tag{2.5}$$

Итак *,

$$(p-1)\ln^{+}\frac{1}{|f(re^{i\theta})-\omega|}=\ln^{+}\frac{1}{|f(re^{i\theta})-\omega|^{p-1}}\leqslant$$

$$\leqslant\ln^{+}\frac{\|\vec{a}(\omega)\|\max(1,|f|^{p-1})}{|f(re^{i\theta})-\omega)^{p-1}}\leqslant\ln\frac{\|\vec{G}(re^{i\theta})\|\,\|\vec{a}(\omega)\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta})\vec{a}(\omega))|}. \tag{2.6}$$

Из (2.4) и (2.5) следует также, что

$$\frac{\|\vec{G}(re^{i\theta})\|\,\|\vec{a}(\omega)\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta})\vec{a}(\omega))|}\leqslant\frac{\sqrt{p}\,(|f(re^{i\theta})|+1)^{p-1}}{|f(re^{i\theta})-\omega|^{p-1}}\|\vec{a}(\omega)\|. \tag{2.7}$$

Поэтому для целой кривой $\vec{G}(z)$, определенной соотношением (2.3), получаем в силу (2.6) и (2.7)

$$(p-1)\,m(r,\omega,f)\leqslant m(r,\vec{a}(\omega),\vec{G})\leqslant(p-1)\,m(r,\omega,f)+C,$$

$$(p-1)\,L(r,\omega,f)\leqslant L(r,\vec{a}(\omega),\vec{G})\leqslant(p-1)\,L(r,\omega,f)+C, \quad (2.8),$$

где $L(r,\omega,f)=\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}\ln^{+}\frac{1}{|f(re^{i\theta})-\omega|}$ и буквы C означают всюду далее, вообще говоря, различные положительные постоянные, не зависящие от r.

Оценим теперь $T(r,\vec{G})$ через $T(r,f)$.

Из (2.4) при $\omega=te^{i\varphi}$ получаем

$$(p-1)\ln|g_2(re^{i\theta})|+(p-1)\ln|f(re^{i\theta})-te^{i\varphi}|=\ln|(\vec{G}(re^{i\theta})\vec{a}(\omega)|.$$

Поэтому

$$(p-1)N(r,\infty,f)+(p-1)N(r,te^{i\varphi})-(p-1)N(r,\infty,f)=$$
$$=N(r,\vec{a}(\omega),\vec{G}),$$

т. е.

$$(p-1)N(r,te^{i\varphi})=N(r,\vec{a}(\omega),\vec{G})\leqslant T(r,\vec{G})+C. \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) следует, что

$$T(r,\vec{G})=m(r,\vec{a}(\omega),\vec{G})+N(r,\vec{a}(\omega),\vec{G})\leqslant$$
$$\leqslant(p-1)\,m(r,\omega,f)+C+(p-1)N(r,\omega,f)\leqslant$$
$$\leqslant(p-1)\,T(r,f)+C.$$

---

* $\|\vec{a}(\omega)\|\geqslant1$.

Если в (2.8) $f(z) = g(z)$ является целой функцией, тогда проводим аналогичные рассуждения, полагая в (2.1), (2.2) и (2.3) $g_1(z) = g(z)$ и $g_2(z) = 1$. В этом случае искомая целая кривая имеет вид

$$\vec{G}(z) = \{g^{p-1}(z),\ g^{p-2}(z),\ \ldots,\ 1\}.$$

Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим функцию Линделефа [7, 9]

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\nu^{\frac{1}{\lambda}}}\right),\quad 0 < \lambda < 1$$

и положим [7] при $\alpha > 0$ и $C \geqslant 0$

$$h_\alpha(z) = \varphi\left(\alpha^{\frac{1}{\lambda}}(z + C)\right),$$

$$H(z) = \frac{h_{\alpha_1}(z)\, h_{\alpha_2}(z)}{h_{\alpha_3}(z)\, h_{\alpha_4}(z)} = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}. \qquad (3.1)$$

Заметим, что в (3.1) числа α_n ($n = 1, 2, 3, 4$) выбираются зависящими от параметра θ, $0 < \theta < \pi$ и λ, $0 < \lambda < 1$. При этом $g_1(z)$ и $g_2(z)$ не имеют общих нулей. Из рассуждений А. Эндрея и В. Фукса [7] следует, что при $0 < \lambda \leqslant 0{,}5$ для функции $H(z)$ выполняются такие соотношения:

1) $|H(re^{i\varphi})| = |H(re^{-i\varphi})|$ $(0 < \varphi < \pi)$;

2) при $\eta \leqslant \varphi \leqslant \pi - \eta$ $\left(0 < \eta < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\ln|H(re^{i\varphi})| = \frac{\pi r^\lambda}{\sin \pi\lambda}\sin(\theta - \varphi)\lambda + \varepsilon(r, \varphi) r^\lambda,$$

где $\varepsilon(r, \varphi)$ равномерно стремится к нулю при $r \to \infty$.

3)

$$m(r, 0, H) = \frac{r^\lambda}{\lambda \sin \pi\lambda}[1 - \cos\lambda(\pi - \theta)] + \varepsilon(r) r^\lambda,$$

$$m(r, \infty, H) = \frac{r^\lambda}{\lambda \sin \pi\lambda}(1 - \cos\theta\lambda) + \varepsilon(r) r^\lambda, \qquad (3.2)$$

где $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty$;

$$T(r, H) \sim \frac{r^\lambda}{\lambda \sin \pi\lambda} \text{ при } r \to \infty,$$

$$\delta(0, H) = 1 - \cos(\pi - \theta)\lambda,\quad \delta(\infty, H) = 1 - \cos\theta\lambda. \qquad (3.3)$$

Рассмотрим p-мерную ($p \geqslant 2$) целую кривую

$$\vec{G}_\lambda(z) = (z^{p-2}, \ldots, z, g_1(z), g_2(z)),$$

где $g_1(z)$ и $g_2(z)$ определены соотношением (3.1), и допустимую систему векторов A, содержащую векторы $\vec{a}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 находится на k-м месте. Из определения $\vec{G}_\lambda(z)$ легко следует, что ($r > r_0$)

$$T(r, H) \leqslant T(r, \vec{G}_\lambda) \leqslant T(r, H) + p \ln r. \tag{3.4}$$

Кроме того

$$m(r, \vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{\sqrt{|g_1|^2 + |g_2|^2 + r^2 + \cdots + r^{2(p-2)}}}{|g_1(re^{i\varphi})}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{1}{|H(re^{i\varphi})|^2} + \frac{r^2}{|g_1|^2} + \cdots + \frac{r^{2(p-2)}}{|g_1|^2}}\, d\varphi \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2p}\int_0^{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{1}{|H(re^{i\varphi})|^2}}\, d\varphi \geqslant m(r, 0, H). \tag{3.5}$$

Аналогично

$$m(r, \vec{a}_p, \vec{G}_\lambda) \geqslant m(r, \infty, H), \tag{3.6}$$

а при $1 \leqslant k \leqslant p-2$

$$m(r, \vec{a}_k, \vec{G}_\lambda) = T(r, \vec{G}_\lambda) + 0(\ln r). \tag{3.7}$$

Из (3.2)—(3.7) получаем $\delta(\vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) \geqslant 1 - \cos(\pi - \theta)\lambda$, $\delta(\vec{a}_p, \vec{G}_\lambda) \geqslant 1 - \cos\theta\lambda$ и $\delta(\vec{a}_k, \vec{G}_\lambda) = 1$ при $1 \leqslant k \leqslant p-2$. В частности, при $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\delta(\vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) \geqslant 1 - \cos\frac{\pi}{2}\lambda$, $\delta(\vec{a}_p, \vec{G}_\lambda) \geqslant 1 - \cos\frac{\pi\lambda}{2}$ и $\delta(\vec{a}_k, \vec{G}_\lambda) = 1$ при $1 \leqslant k \leqslant p-2$.

Теперь оценим $m(r, \vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda)$ сверху. Для целой функции $g_1(z)$ при $z = re^{i\varphi}$, $\eta \leqslant \varphi \leqslant \pi - \eta$ (см. [6. с. 277; 9, с. 18]) имеем

$$\ln|g_1(re^{i\varphi})| = \frac{\pi r^\lambda}{\sin \pi\lambda}\{\alpha_1 \cos\lambda\varphi + \alpha_2 \cos\lambda(\theta - \varphi)\} + \varepsilon(r, \varphi) r^\lambda, \tag{3.8}$$

где $\varepsilon(r, \varphi)$ стремится к нулю равномерно при $r \to \infty$. Отсюда следует, что при $r \to \infty$ $|g_1(re^{i\varphi})| \to \infty$ при $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ и $\lambda < 0{,}5$. В силу соотношения (1.2) существует неограниченная последовательность $\{r_n\} \uparrow \infty$, для которой

$$L(r_n, \vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) \leqslant C(\lambda) T(r_n, \vec{G}_\lambda). \tag{3.9}$$

Из (3.5), (3.8) и (3.9) получаем для неограниченой последовательности $\{r_n\} \uparrow \infty$ $(r = r_n > r_0)$

$$m(r, \vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\eta}^{\pi-\eta} \ln \frac{\sqrt{r^2 + \cdots + r^{2(p-2)} + |g_1|^2 + |g_2|^2}}{|g_1(re^{i\varphi})|} d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\eta}^{-\eta} \ln \frac{\sqrt{r^2 + \cdots + r^{2(p-2)} + |g_1|^2 + |g_2|^2}}{|g_1(re^{i\varphi})|} d\varphi +$$

$$+ \eta C(\lambda) L(r, \vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{\pi-\eta} \ln^+ \frac{1}{|H(re^{i\varphi})|} d\varphi +$$

$$+ \eta C(\lambda) L(r, \vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) \leqslant m(r, 0, H) + \eta C(\lambda) T(r, \vec{G}_\lambda) + C, \quad (3.10)$$

где $\frac{\pi}{2} > \eta > 0$ — любое число. Аналогично при $r = \{r_\nu\}_\nu^\infty = 1$, $r_\nu > > r_0$

$$m(r, \vec{a}_p, \vec{G}_\lambda) \leqslant m(r, \infty, H) + \eta C(\lambda) T(r, \vec{G}_\lambda) + C. \quad (3.11)$$

Оценим теперь сверху $\delta(\vec{a}_k, \vec{G}_\lambda)$ при $k = p-1$, p. Из (3.8), (3.10) и (3.11) имеем $(r_n \to \infty)$

$$(1-\varepsilon)\,\delta(\vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) \leqslant \frac{m(r_n, \vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda)}{T(r_n, \vec{G}_\lambda)} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + 0(1)) \frac{m(r_n, 0, H)}{T(r_n, H)} + C(\lambda)\,\eta = \{1 - \cos(\pi - \theta)\lambda\} + C\varepsilon(r_n),$$

т. е. $\delta(\vec{a}_{p-1}) \vec{G}\lambda) \leqslant 1 - \cos\lambda(\pi - \theta)$; значит, $\delta(\vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) = 1 - - \cos\lambda(\pi - \theta)$. Аналогично $\delta(\vec{a}_p, \vec{G}_\lambda) = 1 - \cos\lambda\theta$.

Таким образом, при $\theta = \frac{\pi}{2}$ получаем

$$\sum_{k=1}^{p} \{1 - \delta(\vec{a}_k, \vec{G}_\lambda)\} = 2\cos\frac{\pi\lambda}{2}. \quad (3.12)$$

Найдем теперь оценки для $\beta(\vec{a}_k, \vec{G}_\lambda)$. При $1 \leqslant k \leqslant p-2$ и $r > r_0$

$$L(r, \vec{a}_k, \vec{G}_\lambda) = \max_{|z|=r} \ln \frac{\|\vec{G}_\lambda(re^{i\theta})\| \, \|\vec{a}_k\|}{|(\vec{G}_\lambda(re^{i\theta})\,\vec{a}_k)|} \geqslant$$

$$\geqslant \max \ln \|\vec{G}_\lambda(re^{i\theta})\| - p\ln r \geqslant T(r, \vec{G}_\lambda) - p\ln r,$$

т. е. при $1 \leqslant k \leqslant p-2$

$$\beta(\vec{a}_k, \vec{G}_\lambda) \geqslant 1.$$

Далее

$$L(r, \vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) \geqslant \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \ln \frac{\sqrt{|g_1|^2 + |g_2|^2}}{|g_1|} - C =$$

$$= \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{1}{|H(re^{i\varphi})|^2}} - C \geqslant L(r, 0, H) - C \geqslant \quad (3.13)$$

$$= \frac{\pi r \lambda}{\sin \pi\lambda} \sin(\theta - \eta)\, \lambda(r, \varphi) r^\lambda - C.$$

Из (3.3), (3.4) и (3.13) имеем в силу произвольного $\eta > 0$, $\eta <$ (l и $0 < \theta < \pi$

$$\beta(\vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) \geqslant \pi\lambda \sin\theta\lambda. \qquad (3.14)$$

Аналогично

$$\beta(\vec{a}_p, \vec{G}_\lambda) \geqslant \pi\lambda \sin(\pi - \theta)\,\lambda. \qquad (3.15)$$

В частности, при $\theta = \frac{\pi}{2}$ получаем

$$\beta(\vec{a}_k, \vec{G}_\lambda) \geqslant \pi\lambda \sin\frac{\pi\lambda}{2}, \quad k = p - 1, p. \qquad (3.16)$$

Из (3.12), (3.14)—(3.16) находим

$$\beta(\vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) \geqslant \pi\lambda \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \{1 - \delta(\vec{a}_k, \vec{G}_\lambda)\};$$

$$\beta(\vec{a}_p, \vec{G}_\lambda) \geqslant \pi\lambda \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \{1 - \delta(\vec{a}_k, \vec{G}_\lambda)\}.$$

Теорема 2 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность В. П. Петренко за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan H. Sur les Zeros des Combinaisson lincaives de P functions holomorphes donnes.— «Mathematica»,— 1933, t. 7, p. 15—19.
2. Ahlforc L. The theory of meromorphic curves.— «Acta Soc. Sci. fenn.», 1941, t. 3, N 4, p. 13—16.
3. Weyl H. Meromorphic functions and analytic curves. Princeton, 1943. 531p.
4. Гольдберг А. А. Некоторые вопросы теории распределения значений мероморфных функций. Дополнение к кн.: Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., «Наука», 1960. 630 с.
4. Хейман У. Мероморфные функции. 1966. 287 с.
6. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука». 1970. 591 с.

7. Edrei A., Fuchs W. H. T. The deficiencies of meromorphic funktions of order less than one.— «Duke Math. J.», 1960, vol. 27, N 2, p. 233—249.
8. Петренко В. П. Изучение структуры множества положительных отклонений мероморфных функций. I.— «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1969, т. 33, № 6. с. 16—23.
9. Nevanlinna R. Le theorème de Picard — Borel et la theorie des fonctions Meromorphes. Paris, 1930, p. 27—32.
10. Петренко В. П. О росте целых кривых нижнего порядка $\lambda < 1$.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 207, № 3, с. 30—32.
11. Петренко В. П., Хуссайн М., О росте целых кривых.— «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1972, т. 36, № 6, с. 15—19.
12. Valiron G. Sur les valeurs deficientes des fonctions meromorphes d'ordre nul.— *«C. R. Acad. Sci. Paris»*, *1950*, *t. 230*, *p. 40—42*.