УДК 517.55

С. Ю. Фаворов

О ФУНКЦИЯХ КЛАССА $\mathfrak{B}$ И ИХ ПРИМЕНЕНИИ В ТЕОРИИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В работах О. Сира [1], П. Лелона [2], Л. И. Ронкина [3, 4], М. Ш. Ставского [5] показано, что рост целой функции $f(z)$, $z \in C^n$ или, что то же самое, функции $\ln|f(z)|$ по одной из переменных в некотором смысле не зависит от остальных переменных. Как следует из результатов Л. И. Ронкина [6, 7], это свойство не является специфическим для целых функций, а имеет место и в более общем случае: для некоторого класса функций, плюрисубгармонических в C^n.

Используя метод, развитый в [6, 7], а также методы П. Лелона [8], У. Хенгартнера [9], получим результаты, обобщающие некоторые утверждения из [6, 7]. Эти результаты далее используются нами для изучения распределения значений мероморфных функций многих переменных.

§ 1. Введем следующие определения и обозначения.

1. Классом B назовем* класс функций $\Phi(z, t)$, определенных при $z \in C^n$, $t \geqslant 0$ и таких, что функции $\Phi(z, |w|)$, где $w \in C^1$, являются плюрисубгармоническими в C^{n+1}, а функции $\exp\{\Phi(z, t)\}$ непрерывны в $C^n \times R^1_+$ **.

Через $M_\Phi(E, t)$ будем обозначать $\sup\limits_{z \in E} \Phi(z, t)$. В случае, когда $E = \{z : |z_1| = r_1, \ldots, |z_n| = r_n\}$, полагаем $M_\Phi(E, t) = M_\Phi(r, t)$.

Отметим, что если функция $g(z, w)$, $z \in C^n$, $w \in C^1$ целая в C^{n+1}, то функция $\ln M_g(z, t) = \ln \max\limits_{|w|=t} |g(z, w)|$ принадлежит классу B.

2. Условимся говорить, что какое-либо утверждение справедливо Г-всюду в C^n, если оно справедливо для всех $z \in C^n$, кроме, быть может, множества нулевой Г-емкости ***.

3. Пусть $\varphi(t)$, $0 < t < \infty$ — непрерывная монотонно растущая функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty; \tag{1.1}$$

---

* В [7] этот класс обозначен соответствующей готической буквой.

** $R^n_+ \overset{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$.

*** Г-емкостью называется некоторая специальная характеристика массивности множества в C^n, введенная Л. И. Ронкиным. Ее определение и свойства см. в [7]. Здесь только отметим, что C^n-полярные множества являются множествами нулевой Г-емкости. Однако обратное утверждение, как показал Кизельман, неверно.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t+A)}{\varphi(t)}=1\ \forall A\in(-\infty,\ \infty)^*. \qquad (1.2)$$

Обобщенным φ-порядком функции $\Phi(z,t)\in B$ по переменной t назовем величину

$$\rho(z,\ \Phi;\ \varphi)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\varphi[\Phi^+(z,\ t)]}{\ln t}.$$

Вообще для любой функции $f(t)$, $0<t<\infty$ обобщенным φ-порядком назовем величину

$$\rho(f;\ \varphi)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\varphi[f^+(t)]}{\ln t}.$$

Обобщенным нижним φ порядком назовем величину

$$\lambda(f;\ \varphi)=\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\varphi[f^+(t)]}{\ln t}.$$

Теорема 1.1. *Пусть функция* $\Phi(z,t)\in B$. *Если для каждого* z *из некоторого множества* $E\subset C^n$, *не являющегося* C^n-*полярным*. $\rho(z,\Phi;\ \varphi)<\infty$, *то* $\sup\limits_{z\in C^n}\rho(z,\Phi.\ \varphi)<\infty$, *и* $\rho(z,\Phi;\ \varphi)=\sup\limits_{z\in C^n}\rho(z,\Phi;\varphi)$ *для всех* $z\in C^n$, *кроме, быть может, некоторого* C^n-*полярного множества*** .

Доказательство. Имеем

$$-\frac{1}{\rho}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{-\ln t}{\varphi[\Phi^+(z,\ t)]}=\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\frac{-\ln R(z,\ \mu)}{\varphi(\mu)},$$

где $R(z,\ \mu)=\sup\{t:\Phi^+(z,\ t)\leqslant\mu\}$.

Известно***, что функция $-\ln R(z,\mu)$ являются плюрисубгармонической. Следовательно, функция

$$[-\rho^{-1}(z,\quad\Phi;\ \varphi)]^*=\overline{\lim_{z'\to z}}[\rho^{-1}(z',\ \Phi;\ \varphi)]$$

— плюрисубгармоническая в C^n и, будучи ограниченной сверху, тождественно равна некоторой константе α. Следовательно***, неравенство

$$[-\rho^{-1}(z.\ \Phi;\ \varphi)]<[-\rho^{-1}(z,\ \Phi;\ \varphi)]^* \qquad (1.3)$$

может иметь место только на C^n-полярном множестве. Таким образом, случай $\alpha=0$ противоречит условию теоремы и из неравенства (1.3) заключаем, что $\rho(z,\Phi,\varphi)\leqslant-\alpha^{-1}$ всюду в C^n, причем строгое неравенство может иметь место только на C^n-полярном множестве. Теорема доказана.

---

* Условие (1.2) выполняется, например, когда функция $\varphi(t)$ вогнута, или например, когда $\varphi'(t)=0(t)$ при $t\to\infty$.

** В [6] (Л. И. Ронкин) было показано, что исключительное множество имеет Г-емкость нуль. При этом рост характеризовался с помощью обычного порядка.

*** См. [8].

Теорема 1.2. *Пусть функция* $\Phi(z, t) \in B$. *Тогда, если существует уточненный порядок* $\rho(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(t) = \bar\rho \neq 0$[1] *такой, что величина*

$$\sigma(r) = \overline{\lim_{t\to\infty}} M_\Phi(r, t) \cdot t^{-\rho(t)}$$

конечна для некоторого $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_i > 0_i$, *то функция*

$$\sigma^*(z) = \sigma^*(z, \Phi, \rho(t)) = \overline{\lim_{z'\to z}}\ \overline{\lim_{t\to\infty}} \Phi(z', t) \cdot t^{-\rho(t)}$$

либо тождественно равна нулю, либо является логарифмически плюрисубгармонической в поликруге $D = \{z: |z_1| < r_1, \ldots, |z_n| < r_n\}$.

Доказательство. Положим

$$\sigma^*(z, q) = \overline{\lim_{z'\to z}}\ \overline{\lim_{t\to\infty}} \Phi(z', tq) \cdot t^{-\rho(t)}.$$

Пусть S — произвольный компакт в $D \times C^1$, $s = \sup\{|w| : (z, w) \in S\}$. При достаточно больших t

$$M_\Phi(r, t) \cdot t^{-\rho(t)} < \sigma(r) + 1.$$

Воспользовавшись равенством [10, с. 48]

$$\lim_{t\to\infty} (kt)^{\rho(kt)} t^{-\rho(t)} k^{-\bar\rho} = 1, \tag{1.4}$$

справедливым при любом $k > 0$, оценим семейство функций $\{\Phi(z, |w| \cdot t) \cdot t^{-\rho(t)}\}$ при достаточно больших t равномерно по $(z, w) \in S$:

$$\Phi(z, |w| t) t^{-\rho(t)} \leqslant M_\Phi(r, st) t^{-\rho(t)} \leqslant 2s^{\bar\rho} (\sigma(r) + 1).$$

Следовательно, $\sigma^*(z, |w|)$ — плюрисубгармоническая функция в $D \times C^1$. Из определения функций $\sigma^*(z, t)$, $\sigma^*(z)$ и равенства (1.4) следует, что $\sigma^*(z) = \sigma^*(z, t) t^{-\bar\rho}$. Поэтому

$$\ln \sigma^*(z) = \lim_{t\to\infty} \ln \sigma^*(z, t) - \rho \ln t = \lim_{\mu\to\infty} \ln \mu - \rho \ln R_1(z, \mu),$$

где $R_1(z, \mu) = \sup\{t : \sigma^*(z, t) \leqslant \mu\}$. Как и функция $-\ln R(z, \mu)$ в теореме 1.1, функция $-\ln R_1(z, \mu)$ является плюрисубгармонической. Следовательно, функция $\ln \sigma^*(z)$ или тождественно равна $-\infty$, или является плюрисубгармонической в D. Теорема доказана.

В связи с этой теоремой отметим один из результатов Б. И. Локшина, который будет использован нами в § 2[2].

---

[1] Определение уточненного порядка см., например, в [10].

[2] Результат Б. И. Локшина был получен им в 1970 г. и приведен в обзорном докладе Л. И. Ронкина на Всесоюзной конференции по теории функций (сентябрь 1971 г.). Здесь результат Б. И. Локшина представлен в ослабленной форме.

Теорема. *Пусть функция* $\Phi(z, t) \in \mathrm{B}$ *имеет конечный порядок по совокупности переменных, а по переменной* t — *порядок* $\bar{\rho}$. *Тогда существует уточненный порядок* $\rho(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(t) = \bar{\rho}$ *такой, что* $0 < \sigma(z, \Phi, \rho(t)) < \infty$ *для всех* $z \in C^n$, *за исключением, быть может, множества нулевой* Г*-емкости. На этом множестве* $\sigma(z, \Phi, \rho(t)) = 0$. *Далее, если для какого-нибудь уточненного порядка* $\hat{\rho}(t)$ *функция* $\sigma(z, \Phi, \hat{\rho}(t))$ *конечна или равна нулю на множестве положительной* Г*-емкости, то эта функция конечна или соответственно равна нулю всюду в* C^n.

Из теоремы 1.1 с помощью леммы Гартогса легко получить следующий результат.

Обобщенный φ-порядок $\rho(M_\Phi(K, t), \varphi)$ *один и тот же для всех компактов* $K \subset C^n$, не являющихся C^n-полярными.

Аналогичный факт имеет место и для обобщенного нижнего φ-порядка.

Теорема 1.3. *Пусть функция* $\Phi(z, t) \in \mathrm{B}$. *Тогда величина* $\lambda(K) = \lambda(M_\Phi(K, t); \varphi)$ *одна и та же для всех компактов* K *положительной* Г*-емкости.*

При доказательстве этой теоремы используется следующее утверждение, близкое к одной из теорем Л. И. Ронкина[1].

Теорема 1.4. *Пусть функция* $\Phi(z, t) \in \mathrm{B}$, *функция* $\alpha(t)$ *монотонно растет на* $(0, \infty)$, *множество* $F \subset C^n$ *положительной* Г*-емкости. Если неравенство*

$$\Phi(z, t) < \alpha(t) + C(z), \tag{1.5}$$

где $C(z) < \infty$, *выполняется на любом* $z \in F$ *на последовательности значений* t, *одной и той же для всех* $z \in F$, *то для любого ограниченного множества* E *и любого* $\delta > 0$ *найдется такая последовательность* $t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_k \to \infty$, *что*

$$M_\Phi(E, t_k) < \alpha(t_k^{1+\delta}) + C(E, \delta), \; C(E, \delta) < \infty. \tag{1.6}$$

Доказательство теоремы 1.4 проводится так же, как доказательство теоремы Л. И. Ронкина, с той лишь разницей, что все неравенства, фигурирующие в доказательстве, рассматриваются не при всех t, а при значений $t \, (t \to \infty)$ из некоторого счетного множества.

Доказательство теоремы 1.3. Случай $\lambda(K) = \infty$ для всех множеств K положительной Г-емкости тривиален. Пусть существует компакт S такой, что $\Gamma - \operatorname{cap} S > 0$ и $\lambda(S)$ конечно. Тогда на некоторой последовательности значений $t \to \infty$ выполняется неравенство

$$M_\Phi(S, t) \leqslant \psi\{[\lambda(S) + \varepsilon] \ln t\}, \; \varepsilon > 0,$$

[1] Теорема Л. И. Ронкина [11, с. 190] утверждает, что из справедливости (1.5) для всех $z \in F$, $t \in (0, \infty)$ следует справедливость (1.6) для всех $t \in (0, \infty)$ и всех ограниченных подмножеств в C^n.

где $\psi(r)$ — функция, обратная к функции $\varphi(t)$. По теореме 1.4 для каждого компакта $K \subset C^n$ и любого $\delta > 0$ найдется последовательность значений $t \to \infty$ такая, что на ней

$$M_\Phi(K, t) \leqslant \psi\{[\lambda(S) + \varepsilon](1 + \delta)\ln t\} + (1).$$

Отсюда, учитывая (1.2), получаем неравенство

$$\lambda(K) \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \frac{\varphi\{\psi\{[\lambda(S) + \varepsilon](1+\delta)\ln t\}\}}{\ln t} = (1+\delta)(\lambda(S) + \varepsilon).$$

Так как ε, δ произвольно малы, то $\lambda(K) \leqslant \lambda(S)$. Если $\Gamma - \operatorname{cap} K > 0$, то так же получаем $\lambda(S) \leqslant \lambda(K)$. Значит, $\lambda(K) \equiv \mathrm{const}$ для всех компактов K положительной Г-емкости. Теорема доказана.

Заметим, что для любой функции $\Phi(z, t) \in \mathrm{B}$ существует функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условиям (1.1), (1.2) и такая, что

$$\rho(M_\Phi(K, t);\ \varphi) = \lambda(M_\Phi(K, t);\ \varphi) = 1 \tag{1.7}$$

для любого компакта $K \subset C^n$ положительной Г-емкости.

Действительно, (1.7) выполняется в случае, если $\varphi(t)$ есть функция, обратная к функции $\psi(r) = M_\Phi(K, e^r)$, где K — любой компакт положительной Г-емкости. Условие (1.2) следует из логарифмической выпуклости функции $M_\Phi(K, t)$.

В теории мерморфных функций одной переменной важное значение имеет вопрос о сходимости интеграла $\int^{\infty} n(t, a)\, t^{-\alpha} dt$, где $n(t, a)$ — считающая a-точки функция. В связи с этим для изучения распределения значений мероморфных функций многих переменных представляет интерес вопрос о сходимости интегралов

$$\int^{\infty} \Phi(z, t)\, t^{-\alpha} dt \tag{1.8}$$

и

$$\int^{\infty} M_\Phi(E, t)\, t^{-\alpha} dt, \tag{1.9}$$

где $\Phi(z, t) \in \mathrm{B}$.

Л. И. Ронкин [7] показал, что для сходимости интеграла (1.9) для всех $E \subset\subset C^n$ достаточно конечности порядка функции $M_\Phi(r, t)$ по совокупности переменных r и t и сходимости интеграла (1.9) для какого-нибудь множества E положительной Г-емкости*.

У. Хенгартнер [9], рассматривая функции $\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(z \times te^{i\varphi})\, d\varphi$, где $V(z)$ — плюрисубгармоническая функция в C^n, показал, что сходимость интеграла (1.8) для не слишком редкого множества $z \in C^n$ влечет сходимость интеграла (1.9) для всех $E \subset\subset C^n$.

Справедливо следующее усиление результатов Л. И. Ронкина и У. Хенгартнера.

---

* Условие конечности порядка по совокупности переменных существенно: см. [12] (Б. И. Локшин).

Теорема 1.5. *Пусть* $\Phi(z, t) \in B$ *и функция* $M_\Phi(r, t)$ *имеет конечный порядок по совокупности переменных. Тогда сходимость интеграла* (1.8) *при некотором* $\alpha > 1$ *для всех* z *из некоторого множества* E *положительной* Γ-*емкости влечет сходимость интеграла* (1.9) *при том же* α *для всех* $E \subset\subset C^n$.

Доказательство этой теоремы основано на одном новом неравенстве для субгармонических функций, обобщающем теорему Рисса о выпуклости среднего значения. Его доказательство, равно как и доказательство теоремы 1.5, будет приведено во второй части этой статьи в следующем выпуске сборника.

§ 2. В работах Г. Кнезера [13], С. Бергмана [14], У. Хенгартнера [9] некоторые факты неванлинновской теории мероморфных функций распространялись на функции многих переменных. Для мероморфной функции $f(z)$, $z \in C^n$ вводились функции $N(t, a)$, $m(t, a)$, $T(t)$ и доказывались соотношения, являющиеся аналогами первой и второй основных теорем неванлинновской теории. При этом фуккции $N(t, a)$, $m(t, a)$, $T(t)$ в конечном счете строились по соответствующим функциям, характеризующим поведение функции $f(z)$ на комплексных «прямых», проходящих через начало координат.

В этом параграфе рассматриваются некоторые аналоги неванлинновских характеристик для мероморфных функций многих переменных, характеризующих поведение функции $f(z, w)$, $z \in C^n$, $w \in C^1$ при фиксированном z.

Пусть $f(z, w)$, $z \in C^n$, $w \in C^1$ — мероморфная функция в C^{n+1}. Представим ее в виде $f(z, w) = g(z, w) \cdot h^{-1}(z, w)$, где $g(z, w)$, $h(z, w)$ — целые функции в C^{n+1}, взаимно-простые в окрестности каждой точки. Положим

$$\Lambda = \{z \in C^n : h(z, w) \equiv 0 \ \forall w \in C^1\}$$
$$\Pi = \{z \in C^n : \exists w \in C^1 \ g(z, w) = h(z, w) = 0\}.$$

Легко видеть, что $\Gamma - \mathrm{cap}(\Lambda \bigcup \Pi) = 0$. Для каждого $z \in C^n \setminus \Lambda$ функция $f(z, w)$ как функция переменного w является мероморфной в C^1, что позволяет естественным образом ввести функции $n_z(t, a)$, $N_z(t, a)$, $T_z(t)$* для $z \overline{\in} \Lambda$, $a \in C^1$, $0 \leqslant t < \infty$. Положим $n(z, t; a) = n_z(t, a)$ при $z \overline{\in} \Lambda$ и $n(z, t; a) = 0$ при $z \in \Lambda$. Аналогично определяются функции $N(z, t; a)$, $T(z, t)$.

При $z \in \Lambda \bigcup \Pi$ a-точки функции $f(z, w)$ как мероморфной функции переменного w совпадают с нулями функции $g(z, w) - ah(z, w)$. Следовательно, при $z \overline{\in} \Lambda \bigcup \Pi$ $N_f(z, t; a) = N_{g-ah}(z, t; 0)$. По формуле Иенсена

$$N_{g-ah}(z, t; 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(z, te^{i\varphi}) - ah(z, te^{i\varphi})| \, d\varphi + \alpha(z), \ |\alpha(z)| < \infty.$$

---

* По поводу определений $n(t, a)$, $N(t, a)$, $T(t)$ для мероморфных в C^1 функций см., например, [15].

Из формулы Картана следует, что

$$T_f(t, z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N_f(z, t;\ e^{i\theta})\, d\Theta + \beta(z)$$

с некоторым $\beta(z)$, $|\beta(z)| < \infty$. Следовательно, при $z \overline{\in} \Lambda \cup \Pi$

$$T(z, t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(z, te^{i\varphi}) - e^{i\Theta}h(z, te^{i\varphi})|\, d\varphi\, d\Theta + \gamma(z),\ |\gamma(z)| < \infty$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|a + be^{i\Theta}|\, d\Theta = \ln\max\{|a|, |b|\}, \tag{2.1}$$

получим, что

$$T(z, t) = \Phi(z, t) + \gamma(z) \text{ при } z \overline{\in} \Lambda \cup \Pi, \tag{2.2}$$

где*

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\max\{|g(z, te^{i\varphi})|;\ |h(z, te^{i\varphi})|\}\, d\varphi.$$

Теорема 2.1. *Функция* $\Phi(z, t)$ принадлежит классу B.

Доказательство. Плюрисубгармоничность функции $\Phi(z, |w|)$ в $C^n_{(z)} \times C^1_{(w)}$ очевидна. Поэтому в доказательстве нуждается лишь полунепрерывность снизу функции $\Phi(z, t)$ в каждой точке z', t' такой, что $\Phi(z', t') \neq -\infty$.

Предположим, что функция $g(z, w)$ обращается в нуль в точках $(z', t^1 e^{i\varphi_1}), \ldots, (z', t' e^{i\varphi_m})$, $0 \leqslant m < \infty$, а в остальных точках множества $\{(z, w): z = z', |w| = t'\}$ отлична от нуля**. Случай $m = 0$ тривиален. Пусть $m > 0$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое малое $\delta > 0$, что

$$\int_{|\varphi - \varphi_l| < \delta} \ln\max\{|g(z, te^{i\varphi})|;\ |h(z, te^{i\varphi})|\}\, d\varphi >$$

$$> \int_{|\varphi - \varphi_l| < \delta} \ln\max\{|g(z', t'e^{i\varphi})|;\ |h(z', t'e^{i\varphi})|\}\, d\varphi - \varepsilon \tag{2.3}$$

при z, t, близких к z', t' для всех $l = 1, \ldots, m$.

---

* Отметим, что в случае, когда функция $f(z, w)$ имеет конечный порядок по совокупности переменных, функций $g(z, w)$, $h(z, w)$ можно также выбрать конечного порядка и, следовательно, функция $M_\Phi(r, t)$ будет иметь конечный порядок по совокупности переменных r и t.

** Если $g(z', w) \equiv 0$ в C^1, то вместо функции $g(z, w)$ рассматривается функция $h(z, w)$. Случай $g(z', w) \equiv h(z', w) \equiv 0$ $\forall w \in C^1$ невозможен, поскольку $\Phi(z', t') \not\equiv -\infty$.

Так как $\Phi(z', t') \neq -\infty$, интеграл в правой части (2.3) выбором δ можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. Далее при малых δ

$$\left|\int\limits_{|\varphi-\varphi_l|<\delta} \ln|g(z', t'e^{i\varphi})|\,d\varphi\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad l=1, \ldots, m.$$

Положим $w' = t'e^{i\varphi_1}$. Из подготовительной теоремы Вейерштрассе следует, что при (z, w), близких к (z', w'), функция $g(z, w)$ представима в виде

$$g(z, w) = \psi(z, w)[w - w' - b_1(z)] \ldots [w - w' - b_k(z)],$$

где $\psi(z, w)$ — голоморфная в окрестности точки z', w' функция, $\psi(z', w') \neq 0$, а $b_j(z) \to 0$ при $z \to z'$. Из тождества (2.1) следует, что функция

$$\int\limits_0^{2\pi} \ln|te^{i\varphi} - t'e^{i\varphi_1} - b_j(z)|\,d\varphi, \quad j=1, \ldots, k$$

непрерывна в точке z', t'. Поэтому при достаточно малых δ непрерывной в этой точке будет каждая из функций

$$\int\limits_{|\varphi-\varphi_1|<\delta} \ln|te^{i\varphi} - t'e^{i\varphi_1} - b_j(z)|\,d\varphi, \quad j=1, \ldots, k,$$

и, следовательно, функция

$$\int\limits_{|\varphi-\varphi_1|<\delta} \ln|g(z, te^{i\varphi})|\,d\varphi = \int\limits_{|\varphi-\varphi_1|<\delta} \left\{\sum_{j=1}^{k} \ln|te^{i\varphi} - t'e^{i\varphi_1} - b_j(z)| + \right.$$
$$\left. + \ln|\psi(z, te^{i\varphi})|\right\} d\varphi.$$

Таким образом, при z, t, близких к z', t', и при достаточно малых δ

$$\int\limits_{|\varphi-\varphi_1|<\delta} \ln|g(z, te^{i\varphi})|\,d\varphi > \int\limits_{|\varphi-\varphi_1|<\delta} \ln|g(z', t'e^{i\varphi})|\,d\varphi - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда, учитывая выбор δ, получаем (2.3) с $l=1$. Аналогичное рассуждение проводится для любого l, $1 < l \leqslant m$. Осталось заметить, что непрерывность в точке z', t' функции

$$\int\limits_{\{\varphi: |\varphi-\varphi_l|>\delta,\ l=1, \ldots, m\}} \ln\max\{|g(z, te^{i\varphi})|; \ |h(z, te^{i\varphi})|\}\,d\varphi$$

очевидна. Теорема доказана.

Из этой теоремы и соотношения (2.2) следует, что на функцию $T(z, t)$ распространяются все теоремы о росте функций класса B (см. [7, с. 191—209], а также теоремы 1.1—1.5 настоящей статьи).

Выше было отмечено, что функция $N_f(z, t; a)$ при $z \in \overline{\Lambda \cup \Pi}$ совпадает с функцией $N_{g-ah}(z, t; 0)$. Следовательно, для функции $N_f(z, t; a)$ справедливы все теоремы, доказанные Л. И. Ронкиным в [6, 7] для функции $N_F(z, t; 0)$, характеризующей распределение нулей целой в C^{n+1} функции $F(z, w)$. Кроме того, из теоремы 1.5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть $f(z, w)$, $z \in C^n$, $w \in C^1$ — мероморфная в C^{n+1} функция конечного порядка по совокупности переменных. Если для некоторых $a \in C^1 \cup \{\infty\}$ и $\alpha > 1$ интеграл $\int^{\infty} N(z, t; a) \cdot t^{-\alpha}\, dt$ сходится при всех z из множества E положительной Γ-емкости, то он сходится при всех $z \in C^n$.*

Следствие. *Пусть $b_1(z)$, $b_2(z)$, ... — a-точки функции $f(z, w)$ при фиксированном $z \in C^n$. Если для некоторого $\lambda > 0$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i(z)|^{-\lambda}$ сходится при всех z из множества E положительной Γ-емкости, то он сходится при всех $z \in C^n$.*

Для мероморфных в C^{n+1} функций $f(z, w)$ естественно определить неванлинновский и валироновский дефекты по последней переменной значения $a \in C^1 \cup \{\infty\}$ соответственно следующим образом:

$$\delta_f(z', a) = 1 - \varlimsup_{t \to \infty} \frac{N_f(z', t; a)}{T_f(z', t)};$$

$$\Delta_f(z', a) = 1 - \varliminf_{t \to \infty} \frac{N_f(z', t; a)}{T_f(z', t)},$$

если $f(z, w) \not\equiv \mathrm{const}$ в плоскости $z = z'$, и $\delta_f(z', a) = \Delta_f(z', a) = 0$, если $f(z, w) = \mathrm{const}$ в плоскости $z = z'$.

Теорема 2.3.* *Пусть мероморфная в C^{n+1} функция $f(z, w)$ конечного порядка по совокупности переменных имеет по переменной w порядок $\bar{\rho}$ и пусть для некоторого $a \in C^1 \cup \{\infty\}$ и всех z из множества E положительной Γ-емкости*

$$\delta_f(z, a) = 1. \tag{2.4}$$

Тогда $\Delta_f(z, a) = 1$ и $\sum_{b \neq a} \delta_f(z, b) \leqslant 1$ Γ-всюду в C^n. Если, кроме того, для некоторого $b \neq a$ и всех $z \in E_2$, $\Gamma - \mathrm{cap}\, E_2 > 0$

$$\delta_f(z, b) = 1,$$

то $\Delta_f(z, b) = 1$ и $\delta_f(z, c) = 0\ \forall c \neq a, b$ Γ-всюду в C^n.

---

* Первоначально эта теорема была доказана У. Хенгартнером [9] для целых в C^{n+1} функций вида $f(z \cdot w)$, где $f(z)$ — целая в C^n.

Доказательство. Согласно теореме Б. И. Локшина (см. § 1 данной работы), существует уточненный порядок $\rho(t)$ такой, что $0 < \sigma(z, T, \rho(t)) < \infty$ для Г-всех $z \in C^n$. Выберем $\varepsilon > 0$. Для каждого $z \in C^n$ найдется $t(z)$ такое, что при $t > t(z)$ выполняется неравенство

$$N(z, t; a) \leqslant (1 - \delta(z, a) + \varepsilon) T(z, t).$$

Отсюда, учитывая, что выбор ε был произволен, получаем неравенство

$$\sigma(z, N, \rho(t)) \leqslant (1 - \delta(z, a)) \sigma(z, T, \rho(t)).$$

Согласно предположению, $\delta(z, a) = 1$ на множестве положительной Г-емкости. Следовательно, $\sigma(z, N, \rho(t)) = 0$ на множестве положительной Г-емкости и, согласно теореме Б. И. Локшина, $\sigma(z, N, \rho(t)) \equiv 0$, т. е. $N(z, t; a) = o(t^{\rho(t)})$ для всех $z \in C^n$. Так как, с другой стороны, $\sigma(z, N, \rho(t)) \geqslant [1 - \Delta(z, a)] \sigma(z, T, \rho(t))$ и $\sigma(z, T, \rho(t)) \neq 0$ Г-всюду в C^n, то $\Delta(z, a) = 1$ Г-всюду в C^n.

Пусть далее $\{b_i\}_{i=1}^{q}$ — множество различных точек замкнутой комплексной плоскости, отличных от точки a. Из второй основной теоремы Неванлинны следует

$$(q-1) T(z, t) \leqslant N(z, t; a) + \sum_{i=1}^{q} N(z, t, b_i) + 0(\ln t).$$

Учитывая, что $\ln t = o(T(z, t))$ и $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{N(z, t; a)}{T(z, t)} = 0$ Г-всюду в C^n, получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{q} \delta(z, b_i) \leqslant 1$ Г-всюду в C^n.

Если теперь для всех $z \in E_2$ $\delta(z, b) = 1$, то так же получаем, что $N(z, t; b) = o(t^{\rho(t)})$ и $\Delta(z, b) = 1$ Г-всюду в C^n. Неравенство $T(z, t) \leqslant N(z, t; a) + N(z, t; b) + N(z, t; c) + 0(\ln t)$ вместе с равенством $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{N(z, t; a) + N(z, t; b)}{T(z, t)} = 0$ Г-всюду в C^n доказывает, что $\delta(z, c) = 0$ при $c \neq a, b$. Теорема доказана.

Замечание. В [9] приводится пример целой в C^3 функции $e^{w \cdot z_1} + e^{w \cdot z_2}$, которая обладает следующим свойством: для любого $\xi \in [0, 1)$ множество $\{z \in C^2 : \delta(z, 0) > \xi\}$ имеет положительную Г-емкость, тогда как Г-всюду в C^n $\Delta(z, 0) < 1$ и на множестве положительной Г-емкости $\Delta(z, 0) = 0$. Таким образом, условие (2.4) нельзя заменить на более слабое условие $\delta(z, a) \geqslant \alpha > 0$ на множестве положительной Г-емкости. Нельзя также вместо (2.4) требовать, чтобы $\Delta(z; a) = 1$ на множестве положительной Г-емкости. Можно показать, что построенная в [15, с. 202] мероморфная в C^1 функция $f(z)$ обладает следующим свойством: для мероморфной в C^2 функции $f(z + w)$ дефект по Валирону $\Delta(z, \infty)$ равен 0 при $z \in [0, \infty)$ и равен 1 при $z \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.

Нельзя также усилить заключение теоремы. Именно в [15, с. 201] приведен пример мероморфной в C^1 функции $f(z)$ такой, что для функции $f(z+w)$ ее неванлинновский дефект $\delta(z, \infty)$ равен 0 при $z \in [0, 1]$ и равен 1 при $z \in [-2, -1]$. Таким образом, функция $\delta(z, \infty)$ равна 1 на множестве положительной емкости, но неванлинновский дефект $\delta(z, \infty) \neq 1$.

В заключение автор выражает глубокую признательность Л. И. Ронкину за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sire O. Sur les fonctions de deux variables d'ordre apparent total fini.— «Rend. circolo mat. Palermo», 1911, t. 31, p. 1—91.
2. Lelong P. Sur quelques problèmes de la theorie des fonctions de deux variables complexes. — «Ann. Scient. Ecole Norm. Super.», 1941, t. 58, p. 83—176.
3. Ронкин Л. И. О типах целой функции двух комплексных переменных.— «Мат. сб.», 1956, т. 39 (81), № 2, с. 253—266.
4. Ронкин Л. И. О росте целых функций многих переменных.— «Мат. сб.», 1966, т. 71 (113), № 3, с. 337—356.
5. Ставский М. Ш. О порядке роста целой функции двух комплексных переменных по одной из переменных.— В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 8. Харьков, 1969, с. 136—142.
6. Ронкин Л. И. О росте плюрисубгармонических функций и о распределении значений целых функций многих переменных.— «Докл. АН СССР», 1968, т. 179, № 2, с. 290—292.
7. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.
8. Lelong P. Cours de Montreal. Montreal, 1968. 69 p.
9. Hengartner W. Famille des traces sur les droites complex d'une fonction plurisousharmonique ou entire dans C^n.— «Comment. Math. Helvetici», 1968, t. 34, № 4, p. 358—377.
10. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956. 632 с.
11. Ронкин Л. И. Об одном общем подходе к изучению распределения значений целых и мероморфных функций на параллельных комплексных прямых.— В кн.: Тезисы докл. Всесоюз. конф. по теории функции комплексного переменного (сентябрь 1971 г.). Харьков, 1971, с. 189—190.
12. Локшин Б. И. О точности некоторых теорем о росте целых функций многих переменных. — В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 18. Харьков, 1973, с. 81—90.
13. Kneser H. Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher.— «Jahres berichte der Deutschen Math. Vereiningung», 1938, Jg 48, S. 1—28.
14. Bergman S. Value distribution for meromorfic function of two complex variables.— «Bull. Soc. Sci. et Lettereres Lodz», 1962, t. 13, N 14, p. 105—125.
15. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.