УДК 517.46

Г. П. Сердюк

ФУНКЦИИ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА S

И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым в работах [1—3] введены пространства функций типа S и разработан операторный метод исследования задачи Коши для дифференциальных уравнений. Основу этого метода составляет изучение действия некоторых специальных операторов бесконечного порядка в таких пространствах, а именно операторов, определяемых как $f(L_1, L_2, \ldots, L_k)$, где $f(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ — некоторая целая функция, а $L_1, L_2, \ldots, L_k$ — заданные дифференциальные выражения конечного порядка. В случае, когда $L_1, L_2, \ldots, L_k$ — дифференциальные выражения с постоянными коэффициентами, исследование оператора $f(L_1, L_2, \ldots, L_k)$ в пространствах типа S осуществлено в [3] (см. также [2]). Там же поставлена задача подобного исследования в случае выражений с переменными коэффициентами.

Цель настоящей работы — проведение подобного исследования для операторов $L_1, L_2, \ldots, L_k$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Мы устанавливаем связь между: 1) порядком и типом функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_k)$; 2) порядками операторов $L_1, L_2, \ldots, L_k$ и оценками роста их коэффициентов на бесконечности; 3) параметрами пространства $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$. Выполнение этой связи гарантирует непрерывность оператора $f(L_1, L_2, \ldots, L_k)$ как оператора из $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ в некоторое другое пространство того же типа.

Для $L_1, L_2, \ldots, L_k$, имеющих коэффициентами полиномы, действие операторов вида $f(L_1, L_2, \ldots, L_k)$ в пространствах типа S изучал Т. Яманака [4], предполагая, однако, что $L_j L_p = L_p L_j$, $1 \leqslant j,\ p \leqslant k$. Подобные предположения у нас отсутствуют.

1^0. Заглавные латинские буквы, начальные буквы греческого алфавита (α, A, β, ..., λ, Λ) и те же буквы с индексом внизу, над которым стоит черта, означают точки R^n, т. е. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_{\bar{i}} = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$. Остальные греческие буквы — точки пространства R^k; строчные латинские буквы — точки R^1, кроме $x \in R^n$

и $z \in C^k$. Все случаи отступления от этого правила специально оговариваются.

Используются символы следующего вида: $\bar{a} = (a, a, \ldots, a) \in R^k$ (или R^k, что будет ясно из текста); $\alpha^\beta = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\beta_i}$; $a^\beta = \bar{a}^\beta$; $\alpha\beta = (\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots, \alpha_n\beta_n)$, $a\,\beta = \bar{a}\,\beta$; $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$; $\alpha < \beta$ означает $\alpha_i < \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (аналогичный смысл имеют символы $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha \geqslant \beta$); $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$; $\frac{1}{\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$ при $\alpha > \bar{0}$.

Если α и β — мультииндексы, то $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$; $\alpha! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!$; $C_\alpha^\beta = \prod_{i=1}^{n} C_{\alpha_i}^{\beta_i}$.

Кроме того, используются сокращенные символы суммирования

$$\sum_{\alpha=\bar{0}}^{\beta} = \sum_{\alpha_1=0}^{\beta_1} \sum_{\alpha_2=0}^{\beta_2} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\beta_n}; \quad \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{\alpha_{\bar{j}}=\bar{0}}^{\beta_{\bar{j}}} \right) = \sum_{\alpha_{\bar{1}}=\bar{0}}^{\beta_{\bar{1}}} \sum_{\alpha_{\bar{2}}=\bar{0}}^{\beta_{\bar{2}}} \cdots \sum_{\alpha_{\bar{m}}=\bar{0}}^{\beta_{\bar{m}}}; \quad \sum_{j=1}^{0} = 0$$

Далее $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$; $\|z\| = \sum_{i=1}^{k} |z_i|$; $\alpha \||x\||^\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |x_i|^{\beta_i}$.

Символами $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ обозначаются элементы некоторой некоммутативной алгебры над полем комплексных чисел C^1.

Наконец,

$$\partial^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}}.$$

2°. В дальнейшем будем использовать некоторые факты теории пространств типа S (см. [2]).

Пространство $S_{\alpha, A}^{1, B}$ $(\alpha > \bar{0})$ состоит из тех и только тех функций $\varphi(x)$, которые удовлетворяют при любых $\bar{0} < \varepsilon < \bar{1}$, $\delta > \bar{1}$ и некоторых $c_{\varepsilon,\delta} > 0$ неравенствам $|\partial^\rho \varphi(x)| \leqslant c_{\varepsilon,\delta} (\delta B)^\rho \rho^\rho \exp\{-\varepsilon A' \||x\||^{\frac{1}{\alpha}}\}$, $|\rho| \geqslant 0$, с $A_i' = \alpha_i / e A_i^{\frac{1}{\alpha_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Это пространство нетривиально. Если же ввести семейство норм

$$\|\varphi\|_{\varepsilon,\delta} = \sup_{x \in R^n;\ |\rho| \geqslant 0} |\partial^\rho \varphi(x)| (\delta B)^{-\rho} \rho^{-\rho} \exp\{\varepsilon A' \||x\||^{\frac{1}{\alpha}}\},$$

то оно будет полным счетно-нормированным пространством.

Пространство $S_{0; A}^{\beta, B}$ состоит из всех функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих с любым $\delta > \bar{1}$ и с некоторым $c_\delta > 0$ неравенствам

$$|\partial^\rho \varphi(x)| \leqslant \begin{cases} c_\rho (\delta B)^\rho \rho^{\beta\rho} & \text{при } |x_i| \leqslant A_i \ (i = 1, 2, \ldots, n); \ |\rho| \geqslant 0, \\ 0 & \text{при остальных } x \text{ и } |\rho| \geqslant 0. \end{cases}$$

При $\beta > \bar{1}$ это пространство нетривиально. Если же ввести семейство норм

$$\|\varphi\|_\delta = \sup_{x, \rho} |\partial^\rho \varphi(x)| (\delta B)^{-\rho} \rho^{-\beta\rho}; \ x : |x_i| \leqslant A_i \ (i = 1, 2, \ldots, n); \ \rho \geqslant 0,$$

то оно будет полным счетно-нормированным пространством.

Для дальнейшего ограничим ε и δ, например, так:

$$\frac{\bar{1}}{2} \leqslant \varepsilon < \bar{1}, \ \bar{1} < \delta \leqslant \bar{2}. \tag{1}$$

3^0. Пусть $\tau_{\bar{0}} > \bar{0}$. Будем говорить, что целая аналитическая функция

$$f(z) = \sum_{|\sigma|=0}^{\infty} c_\sigma z^\sigma, \ z \in C^k, \tag{2}$$

имеет порядок роста $\leqslant \frac{1}{\omega}$ $(\omega > \bar{0})$ и тип $\chi < \tau_{\bar{0}}$, если существует такой вектор $\bar{0} < \tau < \tau_{\bar{0}}$, что имеет место неравенство

$$|f(z)| \leqslant c \exp\{\tau |||z|||^{\frac{1}{\omega}}\}.$$

Коэффициенты Тейлора c_σ такой функции $f(z)$ удовлетворяют неравенствам

$$|c_\sigma| \leqslant c \prod_{i=1}^{k} (e\tau_i / \omega_i \sigma_i)^{\omega_i \sigma_i}. \tag{3}$$

Доказательство см., например, в [5, гл. 3].

4^0. Зафиксируем мультииндекс σ и рассмотрим набор из $|\sigma|$ элементов Ω_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, содержащий σ_1 элементов Ω_1, σ_2 элементов Ω_2, ..., σ_k элементов Ω_k. Пусть $\Pi = [\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}, \ldots, \Omega_{i_{|\sigma|}}]$ — некоторая перестановка элементов этого набора, а $\sum\limits_{(\Pi)}$ — сумма по всевозможным $\prod$.

Разложение (формальный ряд)

$$g(\Omega) = \sum_{|\sigma|=0}^{\infty} \sum_{(\Pi)} c_{\sigma\Pi} \Omega_{i_1} \Omega_{i_2} \cdots \Omega_{i_{|\sigma|}}, \ c_{\sigma\Pi} \in C^1, \tag{4}$$

назовем подчиненным целой функции (2), если

$$\sum_{(\Pi)} |c_{\sigma\Pi}| \leqslant |c_\sigma|. \tag{5}$$

В этом случае будем применять обозначение $g(\Omega) \ll f(z)$.

Пусть L_j $(j=1, 2, \ldots, k)$ — линейные дифференциальные операторы, $g(\Omega)$ — разложение вида (4). Оператором бесконечного порядка $g(L)$ называется оператор, полученный из $g(\Omega)$ заменой Ω_j на L_j, $j=1, 2, \ldots, k$ и действующий на $\varphi(x) \in C^\infty(R^n)$ следующим образом:

$$g(L)\varphi = \sum_{|\sigma|=0}^{\infty} \sum_{(\Pi)} c_{\sigma\Pi} L_{i_1} L_{i_2} \cdots L_{i_{|\sigma|}} \varphi(x).$$

5⁰. В дальнейшем будет использоваться легко проверяемое неравенство

$$a^b \leqslant \left(\frac{b}{e \ln c}\right)^b c^a, \tag{6}$$

справедливое при любых значениях $a > 0$, $b > 0$, $c > 1$.

6⁰. Пусть $g(\Omega)$ — произвольное разложение вида (4) и пусть заданы операторы

$$L_j = \sum_{|\lambda|=0}^{m_j} a_{\lambda j}(x)\, \partial^\lambda, \; j = 1, 2, \ldots, k, \tag{7}$$

где комплекснозначные $a_{\lambda j}(x) \in C^\infty(R^n)$.

Нижеследующие теоремы 1, 2 дают условия, при выполнении которых

$$g(L) : S_{\alpha, A}^{\beta, B} \to S_{\alpha, A_1}^{\beta, B_1}, \tag{8}$$

т. е. $g(L)$ — непрерывный линейный оператор из $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ в $S_{\alpha, A_1}^{\beta, B_1}$. Положим $\mu = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$.

Теорема 1. *Пусть порядки операторов* (7) *таковы, что* $\mu \leqslant \omega$, *где* $\omega > \bar{0}$, *а их коэффициенты удовлетворяют условиям*

$$|\partial^\rho a_{\lambda j}(x)| \leqslant dC^\rho \rho! \prod_{i=1}^{n} (1 + |x_i|)^{h_{\lambda j i}}, \; |\rho| \geqslant 0, \tag{9}$$

с $h_{\lambda j} = (h_{\lambda j 1}, h_{\lambda j 2}, \ldots, h_{\lambda j n}) = \bar{0}$ *при тех* λ *и* j *(если они существуют), для которых выполняются равенства* $|\lambda| = m_j = \omega_j$, *и с произвольными неотрицательными остальными* $h_{\lambda j}$.

Выберем $\alpha > \bar{0}$ *такое, что при всех* λ *и* j

$$(\alpha, h_{\lambda j}) \leqslant \omega_j - |\lambda|. \tag{10}$$

Тогда для любых $a > 1$ *и* $b > 1$ *существует вектор* $\bar{0} < \tau(a, b) \in R^k$ *такой, что если* $g(\Omega) \ll f(z)$, *а* $f(z)$ — *целая функция порядка* $\leqslant \frac{1}{\omega}$ *и типа* $\chi < \tau(a, b)$, *то для любых* $A > \bar{0}$ *и* $B > \bar{0}$ *справедливо* (8) *с* $\beta = 1$, $A_1 = aA$ *и* $B_1 = bD$, *где* $D_i = \max(C_i, B_i)$.

При $\mu < \omega$ *и* α *таком, что в* (10) *имеет место строгое неравенство, тот же результат верен для любого* $\chi < \infty$.

Доказательство. Для любого $\gamma > \bar{0}$ найдется $c(\gamma) > 0$ такое, что при $s = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + |x_i|)^{h_{\lambda j i}} \leqslant c(\gamma)\, s^{(\alpha,\, h_{\lambda j})} \exp\left\{\frac{\gamma}{s} |||x|||^{\frac{1}{\alpha}}\right\}. \tag{11}$$

При $\mu < \omega$ и строгом неравенстве в (10) число $v \in (0,1)$ можно выбрать так, чтобы $(\alpha, h_{\lambda j}) \leqslant v\omega_j - |\lambda|$; этим же неравенством будем пользоваться вместо (10) и в случае $\mu \leqslant \omega$, помня, однако, что при этом $v = 1$.

Теперь из (9) и (11) получаем

$$|\partial^{\rho} a_{\lambda j}(x)| \leqslant dc(\gamma)\, C^{\rho} \rho!\, s^{v\omega_j - |\lambda|} \exp\left\{\frac{\gamma}{s} |||x|||^{\frac{1}{\alpha}}\right\}, \tag{12}$$

$|\rho| \geqslant 0,\ s = 1, 2, \ldots$

Оценим выражение $L_{i_1} L_{i_2} \ldots L_{i_{|\sigma|}} \varphi(x)$, в котором оператор L_j встречается σ_j раз, а $\varphi(x) \in S^{1,\, B}_{\alpha,\, A}$. Обозначим $L_{i_r} = H_r$, $r = 1, 2, \ldots, |\sigma|$; $m_{i_r} = n_r$ и $a_{\lambda i_r}(x) = d_{\lambda r}(x)$.

Тогда

$$H_r = \sum_{|\lambda|=0}^{n_r} d_{\lambda r}(x)\, \partial^{\lambda} \equiv \sum_{|\lambda_{\bar r}|=0}^{n_r} d_{\lambda_{\bar r} r}(x)\, \partial^{\lambda_{\bar r}}.$$

Обозначив $\rho + \sum_{p=1}^{r-1} (\lambda_{\bar p} - \nu_{\bar p}) = R(r)$, получим

$$|\partial^{\rho} H_1 H_2 \ldots H_{|\sigma|} \varphi(x)| \leqslant \sum \prod_{h=1}^{|\sigma|} C^{\nu_{\bar h}}_{R(h)} |\partial^{\nu_{\bar h}} d_{\lambda_{\bar h} h}(x)| \times |\partial^{R(|\sigma|+1)} \varphi(x)|, \tag{13}$$

где $\sum = \sum_{r=1}^{|\sigma|} \left(\sum_{|\lambda_{\bar r}|=0}^{n_r} \sum_{\nu_{\bar r}=\bar{0}}^{R(r)} \right)$.

Теперь из (12) при $s = |\sigma|$ и из оценки на $\varphi(x)$ получаем

$$|\partial^{\rho} H_1 H_2 \ldots H_{|\sigma|} \varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_{\varepsilon,\, \delta} \exp\left\{-(\varepsilon A' - \gamma) \times |||x|||^{\frac{1}{\alpha}}\right\} [dc(\gamma)]^{|\sigma|} \sum \prod_{h=1}^{|\sigma|} (C^{\nu_{\bar h}}_{R(h)} \nu_{\bar h}!) \times$$

$$\times C^{\sum_{h=1}^{|\sigma|} \nu_{\bar h}} |\sigma|^{\sum_{h=1}^{|\sigma|} (v\omega_h - |\lambda_{\bar h}|)} (\delta B)^{R(|\sigma|+1)} [R(|\sigma| + 1)]^{R(|\sigma|+1)}. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что при $b > 1$

$$\prod_{h=1}^{|\sigma|} C_{R(h)}^{\nu_{\bar h}} \nu_{\bar h}! \, [R(|\sigma|+1)]^{R(|\sigma|+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\rho + \sum_{p=1}^{|\sigma|} \lambda_{\bar p}\right)^{\sum\limits_{h=1}^{|\sigma|} \nu_{\bar h}} [R(|\sigma|+1)]^{R(|\sigma|+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\rho + \sum_{p=1}^{|\sigma|} \lambda_{\bar p}\right)^{\rho + \sum\limits_{p=1}^{|\sigma|} \lambda_{\bar p}} \leqslant \rho^{\rho} e^{|\sigma| m} \times \tag{15}$$

$$\times\, b^{\frac{\rho + \overline{|\sigma| m}}{2}} \left(\frac{2}{e \ln b}\right)^{|\sigma| m} \left(\sum_{p=1}^{|\sigma|} \lambda_{\bar p}\right)^{\sum\limits_{p=1}^{|\sigma|} \lambda_{\bar p}},$$

где $m = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} m_j$ и последнее неравенство получено с помощью (6)

Так же легко проверяются неравенства

$$|\sigma|^{-\sum\limits_{h=1}^{|\sigma|} |\lambda_{\bar h}|} \left(\sum_{p=1}^{|\sigma|} \lambda_{\bar p}\right)^{\sum\limits_{p=1}^{|\sigma|} \lambda_{\bar p}} \leqslant m^{m|\sigma|}; \tag{16}$$

$$C^{\sum\limits_{h=1}^{|\sigma|} \nu_{\bar h}} (\delta B)^{R(|\sigma|+1)} \leqslant (\delta D)^{\rho + \sum\limits_{p=1}^{|\sigma|} \lambda_{\bar p}} \leqslant (\delta D)^{\rho + \overline{|\sigma| m}}. \tag{17}$$

Применяя последовательно неравенства (15)—(17) к (14), получим оценку

$$|\partial^{\rho} H_1 H_2 \ldots H_{|\sigma|} \varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_{\varepsilon, \delta} \left(\delta D b^{\frac{1}{2}}\right)^{\rho} \times$$

$$\times\, \rho^{\rho} l^{|\sigma|} \exp\left\{-(\varepsilon A' - \gamma) \|x\|^{\frac{1}{\alpha}}\right\} |\sigma|^{v \sum\limits_{h=1}^{|\sigma|} \omega_{\bar h}} \sum 1, \tag{18}$$

где $l = dc(\gamma)(2m \ln^{-1} b)^m \left(b^{\frac{1}{2}} \delta D\right)^{\overline{m}}$.

Теперь оценим выражение $\sum = \sum_1 \sum_2$, где $\sum_1 = \sum\limits_{r=1}^{|\sigma|} \left(\sum\limits_{|\lambda_{\bar r}|=0}^{n_r}\right)$, а $\sum_2 = \sum\limits_{r=1}^{|\sigma|} \left(\sum\limits_{\nu_{\bar r}=0}^{R(r)}\right)$.

Поскольку $R(|\sigma|+1) \geqslant 0$, то

$$\sum_{p=1}^{|\sigma|} \nu_{\bar p} \leqslant \rho + \sum_{p=1}^{|\sigma|} \lambda_{\bar p}. \tag{19}$$

Отсюда и из структуры выражения $\Sigma_2 1$ видно, что эта сумма не превосходит количества точек с целочисленными координатами в той части положительного гипероктанта пространства $R^{n|\sigma|}$, которая ограничена гиперплоскостями $\sum_{p=1}^{|\sigma|} \nu_{\bar p} = \rho + \sum_{p=1}^{|\sigma|} \lambda_{\bar p}$; будем исчерпывать эти точки гиперплоскостями $\sum_{p=1}^{|\sigma|} \nu_{\bar p} = H$, где мультииндекс H такой, что $\bar 0 \leqslant H \leqslant \rho + \sum_{p=1}^{|\sigma|} \lambda_{\bar p}$.

Методом математической индукции легко показать, что количество таких точек на гиперплоскостях $\sum_{p=1}^{|\sigma|} \nu_{\bar p} = H$ равно $C_{\overline{|\sigma|-1}+H}^{\overline{|\sigma|-1}}$. Используя формулу Стирлинга и неравенство (6), а также легко проверяемое неравенство $\Sigma_1 1 \leqslant l_1^{|\sigma|}$, получим при достаточно большом l_2 оценку

$$\Sigma 1 \leqslant (l_1 l_2)^{|\sigma|} b^{\frac{\rho}{2}}. \tag{20}$$

Приступим к выбору вектора γ. Зафиксировав произвольное $a > 1$, положим $\gamma_i = A_i' \left(1 - a^{-\frac{1}{\alpha_i}}\right)/2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В силу ограничений на ε (1) получим, что $\varepsilon A' - \gamma \geqslant \varepsilon (aA)'$, где $(aA)_i' = A_i' a^{-1/\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Используя (20) и возвращаясь к прежним обозначениям операторов, из (18) получим оценку

$$|\partial^\rho L_{i_1} L_{i_2} \ldots L_{i_{|\sigma|}} \varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_{\varepsilon, \delta} l_3^{|\sigma|} |\sigma|^{\sum_{j=1}^{k} \sigma_j \omega_j} (\delta D b)^\rho \rho^\rho e^{-\varepsilon (aA)' |||x|||^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Тогда видно, что норма функции $L_{i_1} L_{i_2} \ldots L_{i_{|\sigma|}} \varphi(x)$ в пространстве $S_{\alpha, aA}^{1, bD}$ удовлетворяет неравенству

$$\| L_{i_1} L_{i_2} \ldots L_{i_{|\sigma|}} \varphi(x) \|_{\varepsilon, \delta} \leqslant \|\varphi\|_{\varepsilon, \delta} l_3^{|\sigma|} |\sigma|^{v \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \omega_j}.$$

Поэтому, если воспользоваться (3) и (5), можно записать неравенство

$$\| g(L) \varphi \|_{\varepsilon, \delta} \leqslant c \|\varphi\|_{\varepsilon, \delta} \sum_{|\sigma|=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \left(e \tau_i l_3^{\frac{1}{\omega_i}} |\sigma|^v / \omega_i \sigma_i \right)^{\omega_i \sigma_i}. \tag{21}$$

Если $v < 1$, то из неравенств

$$(|\sigma|/\omega_i \sigma_i)^{v \omega_i \sigma_i} < (1 + |\sigma|/\omega_i \sigma_i)^{v \omega_i \sigma_i} < e^{|\sigma|}, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

видно, что ряд в правой части (21) сходится при $\bar 0 < \tau < \infty$. Если же $v = 1$, то найдется вектор $\tau(a, b)$ (зависящий от a и b, так как от них зависит l_3) такой, что этот ряд сходится при $\tau < \tau(a, b)$.

В силу полноты $S_{\alpha,\,aA}^{1,\,bD}$ оператор $g(L)$ непрерывен.

7°. **Теорема 2.** *Пусть при любом $d \geqslant 0$ коэффициенты операторов (7) удовлетворяют условию*

$$|\partial^\rho a_{\lambda j}(x)| \leqslant f_{\lambda j}(d)\, C^\rho \rho!\, \rho^{(\gamma-\bar{1})\rho}, \quad |\rho| \geqslant 0, \quad \|x\| \leqslant d \tag{22}$$

с некоторыми положительными локально ограниченными на $[0, +\infty]$ *функциями* $f_{\lambda j}(t)$.

Пусть, кроме того, эти операторы таковы, что при некоторых $\beta > \bar{1}$ и $\omega > \bar{0}$ выполняются условия:

1) $\gamma \leqslant \beta$;

2) $(\beta, \lambda) \leqslant \omega_j$; λ, $j : a_{\lambda j}(x) \not\equiv 0$;

3) $f_{\lambda j}(t) \equiv \mathrm{const}$; λ, $j : (\beta, \lambda) = \omega_j$.

Тогда для любого $b > 1$ существует вектор $\bar{0} < \tau(b) \in R^k$ такой, что если $g(\Omega) \ll f(z)$, а $f(z)$ — целая функция порядка $\leqslant \frac{1}{\omega}$ и типа $\varkappa < \tau(b)$, то для любых $A > 0$ и $B > 0$ справедливо (8) *с $\alpha = 0$, $A_1 = A$ и $B_1 = bD$, где $D_l = \max(C_l, B_l)$.*

Если же $(\beta, \lambda) < \omega_j$, λ, $j : a_{\lambda j}(x) \not\equiv 0$, то такой же результат верен для любого $\chi < \infty$.

Доказательство. Если $(\beta, \lambda) < \omega_j$, λ, $j : a_{\lambda j}(x) \not\equiv 0$, то можно выбрать число $v \in (0, 1)$ так, чтобы $[\lambda, j]$ было положительным, где $[\lambda, j] = v\omega_j - (\beta, \lambda)$. В целях единообразия это же выражение для $[\lambda, j]$ будем использовать и в случае, когда $(\beta, \lambda) \leqslant \omega_j$, помня, однако, что при этом $v = 1$.

Нетрудно убедиться в существовании такой монотонно возрастающей на $[0, +\infty)$ функции $\psi(t)$, что при $s = 1, 2, \ldots$

$$f_{\lambda j}(t) \leqslant c_{\lambda j} s^{[\lambda,\, j]} \exp\{\psi(t)\, s^{-1}\},$$

где $c_{\lambda j}$ — постоянные. Это дает возможность получить из (22) при $\|x\| \leqslant d$ оценку

$$|\partial^\rho a_{\lambda j}(x)| \leqslant c C^\rho \rho!\, \rho^{(\beta-\bar{1})\rho} s^{[\lambda,\, j]} \exp[\psi(d)\, s^{-1}]. \tag{23}$$

Как и в теореме 1, оценим выражение $L_{i_1} L_{i_2} \ldots L_{i_{|\sigma|}} \varphi(x)$, где $\varphi(x) \in S_{0,\,A}^{\beta,\,B}$. Произведя такие же переобозначения операторов, как и в теореме 1, и подставив в (13) оценки (23) с $s = |\sigma|$ и оценки на $\varphi(x)$, получим, что при $|x_i| \leqslant A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |\partial^\rho H_1 H_2 \ldots H_{|\sigma|} \varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_\delta e^{\psi(\|A\|)} c^{|\sigma|} \times \\ \times \sum C^{\sum_{h=1}^{|\sigma|} \nu_{\bar{h}}} (\delta B)^{R(|\sigma|+1)} \prod_{h=1}^{|\sigma|} \left(C_{R(h)}^{\nu_{\bar{h}}} \nu_{\bar{h}}!\, \nu_{\bar{h}}^{(\beta-\bar{1})\nu_{\bar{h}}}\right) \times \\ \times |\sigma|^{\sum_{h=1}^{|\sigma|} [\lambda_{\bar{h}},\, h]} [R(|\sigma|+1)]^{\beta R(|\sigma|+1)}, \end{aligned} \tag{24}$$

а при остальных x в правой части этого неравенства стоит нуль.

При этом, если учесть (19), то

$$\prod_{h=1}^{|\sigma|}(C_{R(h)}^{\nu_{\bar h}}\nu_{\bar h}!\nu_{\bar h}^{(\beta-\bar 1)\nu_{\bar h}})[R(|\sigma|+1)]^{\beta R(|\sigma|+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\rho+\sum_{h=1}^{|\sigma|}\lambda_{\bar h}\Big)^{\beta(\rho+\sum_{h=1}^{|\sigma|}\lambda_{\bar h})}\leqslant\rho^{\beta\rho}e^{|\sigma|m\beta}\times \tag{25}$$

$$\times\, b^{\frac{\rho+\overline{|\sigma|m}}{2}}\left(\frac{2\beta}{e\ln b}\right)^{\beta|\sigma|m}\left(\sum_{h=1}^{|\sigma|}\lambda_{\bar h}\right)^{\beta(\sum_{h=1}^{|\sigma|}\lambda_{\bar h})},$$

где $m=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k} m_j$, и последнее неравенство получено с помощью (6).

Легко получается неравенство

$$|\sigma|^{-\beta\sum_{h=1}^{|\sigma|}\lambda_{\bar h}}\Big(\sum_{h=1}^{|\sigma|}\lambda_{\bar h}\Big)^{\beta(\sum_{h=1}^{|\sigma|}\lambda_{\bar h})}\leqslant m^{\beta|\sigma|m}.$$

Используя (17), (25), (26) и (20), из (24), возвращаясь к прежним обозначениям операторов, получим оценку

$$\|L_{i_1}L_{i_2}\ \ldots\ L_{i_{|\sigma|}}\varphi(x)\|_\delta\leqslant\|\varphi\|_\delta e^{\psi(\|A\|)}l_3^{|\sigma|}\,|\sigma|^{v\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\omega_j}$$

на δ-норму функции $L_{i_1}L_{i_2}\ \ldots\ L_{i_{|\sigma|}}\varphi(x)$ в пространстве $S_{0,\ A}^{\beta,\ bD}$.

Далее доказательство проводится так же, как в теореме 1.

Замечание. Как видно из доказательства, вектор A не влияет на величину вектора $\tau(b)$. Поэтому результат теоремы 2 останется справедливым при замене пространств $S_{0,\ A}^{\beta,\ B}$ и $S_{0,\ A}^{\beta,\ bD}$ пространствами $S_0^{\beta,\ B}=\bigcup\limits_{(A)} S_{0,\ A}^{\beta,\ B}$ и $S_0^{\beta,\ bD}=\bigcup\limits_{(A)} S_{0,\ A}^{\beta,\ bD}$.

Автор выражает благодарность проф. В. М. Борок за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши. — «Успехи мат. наук», 1953, т. 8, № 6, с. 3—54.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М., Физматгиз, 1958. 307 с.
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Об одном методе в теоремах единственности решения задачи Коши для систем линейных уравнений в частых производных. — «Докл. АН СССР», 1955, т. 102, № 6, с. 1065—1068.
4. Takesi Yamanaka. On the Uniqueness of Solution of the Cauchy Problem for System of Linear Partial Differential Equations with Polinomial Coefficients. — "Funkcialaj Ekvacioj, 1966, vol. 9. p. 219—249.
5. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971, 331 с.