УДК 511.6.517.56

В. П. Петренко, д-р физ.-мат- наук

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ НИЖНЕГО ПОРЯДКА $\lambda < 1$

§ 1. Пусть C_p — p-мерное комплексное унитарное пространство, $\vec{a}$ — векторы из C_p, A — фиксированная допустимая система векторов этого пространства (т. е. любые p — различные векторы из системы A — являются линейно независимыми). Рассмотрим p-фиксированные линейно независимые целые функции* $g_1(z)$, $g_2(z)$, ..., $g_p(z)$.

Определение. *Вектор-функция* $\vec{G}(z) = (g_1(z), g_2(z), \dots, g_p(z))$ *пространства* C_p *называется р-мерной целой кривой* [1—4].

В работах [1—3] построена теория распределения значений целых кривых, являющихся полным аналогом неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций. Напомним некоторые обозначения этой теории, необходимые для дальнейшего изложения.

Неванлинновской характеристикой целой кривой $\vec{G}(z)$ называется

$$T(r, \vec{G}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\|\vec{G}(re^{i\theta})\|\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta + 0(1),$$

где $u(z) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p}\{\ln|g_k(z)|\}$.

Порядок ρ и нижний порядок λ целой кривой $\vec{G}(z)$ определяем обычным способом.

Неванлинновская функция приближения $m(r, \vec{a}, \vec{G})$ и функция числа $N(r, \vec{a}, \vec{G})$ определяются как

$$m(r, \vec{a}, \vec{G}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\frac{\|\vec{G}(re^{i\theta})\|\cdot\|\vec{a}\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta})\cdot\vec{a}|}\,d\theta;$$

$$N(r, \vec{a}, \vec{G}) = \int_0^r [n(t, \vec{a}, \vec{G}) - n(0, \vec{a}, \vec{G})]\,d\ln t + n(0, \vec{a}, G)\ln r,$$

где $n(t, \vec{a}, \vec{G})$ — число корней скалярного произведения $(\vec{G}(z)\cdot\vec{a})$ в круге $|z| \leqslant 1$ $(\vec{a} \in A)$. Пусть

$$\delta(\vec{a}, \vec{G}) = \varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r, \vec{a}, \vec{G})}{T(r, \vec{G})}.$$

---

* В дальнейшем будем считать, что отношения хотя бы одной пары $\dfrac{g_k(z)}{g_n(z)}$ $(k \neq n)$ является трансцендентной функцией и что целые функции $\{g_k(z)\}$ могут иметь лишь конечное число общих нулей.

Величина $\delta(\vec{a}, \vec{G})$ называется дефектом целой кривой $\vec{G}(z)$ в смысле Р. Неванлинны. Известно, с одной стороны, что для любой фиксированной допустимой системы векторов A

$$\sum_{\vec{a} \in A} \delta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant p.$$

С другой стороны, для исследования роста мероморфных функций в равномерной метрике на $[0, 2\pi]$ в работах [5—8] введены и исследованы свойства соответствующих характеристик. При этом получены соотношения, вполне аналогичные соотношениям неванлинновской теории. С этой точки зрения оказалось возможным исследовать рост не только мероморфных, но и Q-псевдомероморфных функций [9—11]. Одной из основных характеристик роста мероморфных и Q-псевдомероморфных функций в равномерной метрике является величина отклонения $\beta(a, f)$ функции $f(z)$ от числа a. В работе [12] введена величина отклонения $\beta(\vec{a}, \vec{G})$ целой кривой $\vec{G}(z)$ от вектора $\vec{a}$. Напомним это определение. Положим для $\vec{a} \in A$

$$L(r, \vec{a}, \vec{G}) = \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \ln \frac{\|\vec{G}(re^{i\theta})\| \cdot \|\vec{a}\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta}) \cdot \vec{a})|} = \ln \frac{\|\vec{G}(re^{i\theta(\vec{a})})\| \cdot \|\vec{a}\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta(\vec{a})}) \cdot \vec{a})|}, \tag{1.1}$$

$$\beta(\vec{a}, \vec{G}) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{\alpha(r, \vec{a}, \vec{G})}{T(r, \vec{G})}.$$

В работе [13] установлены некоторые свойства величин $\beta(\vec{a}, \vec{G})$. Приведем лишь один из них.

Теорема [12]. *Если целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то*

а) *для любого вектора $\vec{a} \in A$*

$$\beta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & \lambda < 0{,}5, \\ \pi\lambda, & \lambda \geqslant 0{,}5; \end{cases} \tag{1.2}$$

б) *множество*

$$\Omega_A(\vec{G}) = \{\vec{a} \in A : \beta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$$

не более чем счетно.

Оценки (1.2) — *точные.*

Если $f(z)$ — мероморфная функция нижнего порядка $\lambda \leqslant 0{,}5$ и множество $\Omega(f) = \{a : \beta(a, f) > 0\}$ содержит более одной точки, тогда при любых a и b (*см.* [7]).

$$\beta(a, f) + \beta(b, f) \leqslant \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2} [2 - \delta(a, f) - \delta(b, f)]. \tag{1.3}$$

Получим аналог оцёнки (1.3) для целых кривых.

Занумеруем векторы $\vec{a} \in \Omega_A(\vec{G})$ в порядке невозрастания их величин отклонений $\beta(\vec{a}_k, \vec{G}) \geqslant \beta(\vec{a}_{k+1}, \vec{G})$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Если нижний порядок целой кривой $\vec{G}(z)$ $\lambda < 1$, то*

$$\beta(\vec{a}_p, \vec{G}) \leqslant \pi\lambda \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}\left[p - \sum_{k=1}^{p} \delta(\vec{a}_k, G)\right]. \qquad (1.4)$$

Следствие 1. *Для целых кривых нулевого нижнего порядка множество $\Omega_A(\vec{G})$ содержит самое большее $p-1$ вектор.*

В случае $p = 2$ это усиливает теорему Ж. Валирона [14] для мероморфных функций нулевого нижнего порядка.

Следствие 2. *Для дефектов и величин отклонений целых кривых нулевого порядка справедливы соотношения*

$$\sum_{\vec{a} \in A} \delta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant p - 1;$$
$$\sum_{\vec{a} \in A} \beta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant p - 1. \qquad (1.5)$$

Точность оценок (1.4), (1.5) характеризует

Теорема 2. *Для любого λ, $0 < \lambda < 0{,}5$ существует целая кривая $\vec{G}_\lambda(z)$ нижнего порядка, для которой*

$$\beta(\vec{a}_{p-1}, \vec{G}_\lambda) = \beta(\vec{a}_p, \vec{G}_\lambda) = \pi\lambda \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}\frac{1}{2}\left[p - \sum_{k=1}^{p} \delta(\vec{a}_k, \vec{G})\right]. \qquad (1.6)$$

Существует целая кривая нулевого нижнего порядка, для которой $\delta(\vec{a}_k, \vec{G}_0) = \beta(\vec{a}_k, \vec{G}_0) = 1$ при $k = 1, 2, 3, \dots, p-1$ и $\delta(\vec{a}_k, \vec{G}_0) = \beta(\vec{a}_k, G_0) = 0$ при $k \geqslant p$.

§ 2. Доказательство теоремы 1.

Лемма. *Пусть $h(z)$ — цолая функция, c_k — ее корни. Для любых фиксированных r, $(r_0 \leqslant r)$, θ_1 и θ_2 $(0 \leqslant \theta_i < 2\pi)$ справедливо равенство $(R > r_0)$*

$$\ln|h(re^{i\theta_1})| = \ln|h(re^{i\theta_2})| + \sum_{|c_k| \leqslant 2R} \ln\left|\frac{re^{i\theta_1} - c_k}{re^{i\theta_2} - c_k}\right| +$$
$$+ \frac{r}{R} Q(r, \theta_1, \theta_2 h) + C, \qquad (2.1)$$

где буквы C всюду дальше означают различные положительные постоянные (т. е. не зависят от r, R), и при $r_0 \leqslant r \leqslant 0{,}5R$ справедлива оценка

$$|Q(r, \theta_1, \theta_2, h)| \leqslant C[T(4R, h) + T_1(4R, h)],$$
$$\left(T_1(s, h) = \int_1^s T(t, h)\ln t\right).$$

Чтобы получить соотношение (2.1), достаточно в соотношении (3.2) работы [6, с. 426] положить

$$x = 0{,}5\,(\alpha = \pi),\ f(z) = h(z),\ \theta(r) = \theta_\nu\,(\nu = 1{,}2).$$

При фиксированном $r\,(r_0 \leqslant r \leqslant 0{,}5R)$ и $\nu\,(\nu = 1{,}2)$

$$\ln|h(re^{i\theta_\nu})| = r\int_0^R\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|h(te^{i\varphi})|\,d\varphi\right\}\frac{dt}{(t+r)^2} -$$
$$-\sum_{|c_k|\leqslant 2R}\ln\left|\frac{r+|c_k|}{re^{i\theta_\nu}-c_k}\right| + Q_1(r, \theta_\nu, h)\frac{r}{R} + C, \qquad (2.2)$$

где

$$|Q_1(r, \theta_\nu, h)| \leqslant C[T(4R, h) + T_1(4R, h)].$$

Соотношение (2.1) следует из (2.2) непосредственно*.

Докажем теорему 1. Положим (см. (1.1))

$$\vec{a}_k = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_p^{(k)}),\ k = 1{,}2, \ldots, p;$$
$$F_k(z) = (\vec{G}(z)\cdot\vec{a}_k) = \sum_{n=1}^{p} g_n(z)\cdot a_n^{(k)};$$
$$F_k(re^{i\theta}(\vec{a}_k)) = F_k(re^{i\theta_k})\ \ (\theta_k = \theta_k(r)).$$

Имеем $(m = 1, 2, \ldots, p)$

$$g_m(re^{i\theta_k}) = \sum_{n=1}^{p} A_n^{(m)}F_n(re^{i\theta_k}). \qquad (2.3)$$

При фиксированном k положим

$$\max_{1\leqslant n\leqslant p}|F_n(re^{i\theta_k})| = |F_{\nu(k)}(re^{i\theta_k})|$$

и

$$\max_{1\leqslant k\leqslant p}|F_{\nu(k)}(re^{i\theta_k})| = |F_{\nu(r)}(re^{i\varphi(r)})|.$$

Индекс $\nu(r)$ принимает значения $1, 2, \ldots, p$. Из (2.3) имеем

$$|g_m(re^{i\theta_k})| \leqslant C|F_{\nu(r)}(re^{i\varphi(r)})|,\quad m = 1, 2, \ldots, p. \qquad (2.4)$$

* Соотношение, аналогичное (2.1), можно также получить из леммы 3.1 (см. [10, с. 263]).

Так как при $r \geqslant r_0$ и $\varepsilon > 0$

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant p} \ln \frac{\| \vec{G}(re^{i\theta_k}) \| \cdot \| a_k \|}{| F_k(re^{i\theta_k}) |} \geqslant \beta_p (1-\varepsilon) T(r, \vec{G}),$$

то $(r > r_0)$

$$\ln \frac{\| \vec{G}(re^{i\theta_{\nu(r)}}) \| \cdot \| \vec{a}_{\nu(r)} \|}{| F_{\nu(r)}(re^{i\theta_{\nu(r)}}) |} \geqslant \beta_p (1-\varepsilon) T(r, \vec{G}), \ (\beta(\vec{a}_p \vec{G}) = \beta_p). \quad (2.5)$$

Применяя соотношение (2.1) к $h(\zeta) = F_{\nu(r)}(\zeta) = \sum_{n=1}^{p} g_n(\zeta) a_n^{(\nu(r))}$ $(\zeta = se^{i\varphi})$ с $\theta_1 = \theta_{\nu(r)}$ и $\theta_2 = \varphi(r)$, получаем $\ln | F_{\nu(r)}(re^{i\theta_{\nu(r)}}) | =$

$$= \ln | F_{\nu(r)}(re^{i\varphi(r)}) | + \sum_{|c_k(r)| \leqslant 2R} \ln \left| \frac{re^{i\theta_{\nu(r)}} - c_k}{re^{i\varphi(r)} - c_k} \right| + \frac{r}{R} Q(r, \theta_1, \theta_2, R, F_{\nu(r)}) + O(1), \quad (2.6)$$

где $c_k(r)$ — корни целой функции $F_{\nu(r)}(\zeta)$.
Соотношения (2.5), (2.6) дают

$$\ln \| \vec{G}(re^{i\theta_{\nu(r)}}) \| \geqslant \beta_p (1-\varepsilon) T(r, \vec{G}) + \ln | F_{\nu(r)}(re^{i\varphi(r)}) | + \sum_{|c_k(r)| \leqslant 2R} \ln \left| \frac{re^{i\theta_{\nu(r)}} - c_k}{re^{i\varphi} - c_k} \right| + \frac{r}{R} Q(r, \theta_1 \theta_2, R, F_{\nu(r)}) + C. \quad (2.7)$$

В силу (2.4) при фиксированном r

$$\max_{1 \leqslant m \leqslant p} | g_m(re^{i\theta_{\nu(r)}}) | \leqslant C | F_{\nu(r)}(re^{i\varphi(r)}) |. \quad (2.8)$$

Из (2.7), (2.8) получаем

$$\beta_p (1-\varepsilon) T(r, \vec{G}) \leqslant \sum_{m=1}^{p} \sum_{|c_k(m)| \leqslant 2R} \ln \left| \frac{r + |c_k(m)|}{r - |c_k(m)|} \right| + C \frac{r}{R} (T(4R, \vec{G}) + T_1(4R, \vec{G})) + C, \quad (2.9)$$

где $C_k(m)$ — корни целой функции $F_m(z)$. Из оценки (2.9) получаем уже обычным методом (см. [6,7]) оценку

$$\beta(\vec{a}_p, \vec{G}) \leqslant \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2} \left\{ \sum_{m=1}^{p} (1 - \delta(\vec{a}_m, \vec{G})) \right\}.$$

§ 3. О точности теоремы 1

Опишем процесс доказательства теоремы 2.

При $\lambda = 0$ рассмотрим трансцендентную целую функцию $g(z)$ нулевого порядка, для которой (см., например, [4]),

$$\ln M(r, g) \sim T(r, g), \quad (r \to \infty),$$

и целую кривую

$$\vec{G}_0(z) = \{z, z^2, \dots, z^{p-1}, g(z)\},$$

и в качестве фиксированной допустимой системы векторов A выберем систему, содержащую векторы

$$\vec{a}_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \tag{3.1}$$

(1 находится на k-м месте).

При $k = 1, 2, \dots, p-1$ имеем

$$L(r, \vec{a}_k, G_0) = \ln M(r, g) + 0(\ln r) \tag{3.2}$$

$$L(r, \vec{a}_p, \vec{G}_0) \leqslant \ln \frac{1 + |g(re^{i\theta_p})|}{|g(re^{i\theta_p})|} + 0(\ln r).$$

Поэтому при $k = p$ существует последовательность $r_\nu \nearrow \infty$, для которой, с одной стороны,

$$Z(r_\nu, \vec{a}_p, \vec{G}) = 0(\ln r_\nu). \tag{3.3}$$

С другой стороны,

$$T(r, \vec{G}) = T(r, g) + 0(\ln r). \tag{3.4}$$

Оценки (3.2) — (3.4) показывают, что

$$\beta(\vec{a}_k, \vec{G}) = 1 \text{ при } k = 1, 2, \dots, p-1$$

$$\beta(\vec{a}_p, \vec{G}) = 0.$$

Аналогично находим

$$\delta(\vec{a}_k, \vec{G}) = 1 \text{ при } k = 1, 2, \dots, p-1;$$
$$\delta(\vec{a}_p, \vec{G}) = 0.$$

Для получения соотношения (1.6) следует использовать мероморфную функцию (см. [15])

$$H(z) = \frac{h_{\alpha_1}(z)\, h_{\alpha_2}(-z)}{h_{\alpha_3}(z)\, h_{\alpha_4}(-z)}.$$

§ 4. **Замечание.** Выберем две фиксированные квадратные матри[ц]ы $a = \{a_{n,j}\}_{n,j=1}^{p}$ и $d = \{d_{n,j}\}_{n,j=1}^{p}$; при этом будем считать, ч[т]о $\det a \neq 0$. Этот набор будем далее обозначать $A(a, d)$. Положи[м] для каждого $\vec{w} = \{w_n\}_{n=1}^{p} \in C^p$

$$\vec{b} = \left\{\zeta_k = \zeta_k(w_1, w_2, \ldots, w_p) = \sum_{n=1}^{p} (a_{n,k}w_n + d_{n,k})\right\}_{k=1}^{p}.$$

Пусть E — произвольное ограниченное замкнутое множество и[з] C^p и

$$E(a, d) = \{\vec{w} = (w_n)_{n=1}^{p} : \vec{b} = (\zeta_k)_{k=1}^{p} \in E\}.$$

Обозначим через $E_n(a, d)$ проекцию множества $E(a, d)$ на w_n координатную плоскость.

Пусть $\mu_n(w_n) = \mu_n$ — мера Робена, соответствующая множеств[у] $E_n(a, d)$, и $E(a, d) \subseteq \overline{E}(a, d) = E_1(a, d) \times E_2(a, d) \times \cdots \times E_p(a, d)$.

Для произвольной p-мерной целой кривой $\vec{G}(z)$ и любого набора $A(a, d)$

$$\int_{\overline{E}(a,d)} \beta(\vec{b}(w_1, w_2, \ldots, w_p), \vec{G})\, d\mu_1\, d\mu_2 \ldots d\mu_p = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan H. Sur les zèros des combinaisons linèaires de p-fonctions holomorphes. — „Mathematica" (Cluj), 1933, vol. 7, p. 15—19.
2. Ahlfors L. The theory of Meromorphic curves. — „Soc. Scient. Fenn. Acta. Nov. Ser. A", 1941, vol. III, N 4, p. 1—31.
3. Weyl H. Meromorphic functions and analytic curves. Princeton, 1943, 531 p.
4. Гольдберг А. А. Некоторые вопросы теории распределения значений. (Доп. к кн.: Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям). М., Физматгиз, 1960, с. 289—300.
5. Петренко В. П. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. — «Докл. АН СССР», 1969, т. 184, № 5, с. 1031—1033.
6. Петренко В. П. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. — «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1969, т. 33, № 2, с. 414—454.
7. Петренко В. П. Величины отклонений мероморфных функций нижнего порядка меньше единицы. — «Докл. АН СССР», 1969, т. 187, № 1, с. 40—42.
8. Петренко В. П. О структуре множества положительных отклонений мероморфных функций. — «Докл. АН СССР», 1969, т. 189, № 4, с. 718—720.
9. Петренко В. П. О росте Q-псевдомероморфных функций. — «Докл. АН СССР», 1971, т. 196, № 1, с. 50—52.
10. Петренко В. П. О величинах отклонений и дефектах Q-псевдомероморфных функций. — «Сиб. мат. журнал», 1972, т. 13, № 4, с. 824—840.
11. Петренко В. П. О величинах отклонений и величинах дефектов Q-псевдомероморфных функций. — В кн.: Тезисы докл. Всесоюз. конф. по теории функций комплексного переменного. Харьков, 1971, с. 171—173.
12. Петренко В. П., Хуссайн М. О росте целых кривых. Там же, с. 173—174.

13. Петренко В. П. Хуссайн М. О росте целых кривых. — «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1973, т. 37, № 2, с. 466—477.
14. Valiron G. Sur les valeurs de'ficientes des fonctions mèromorphes d'ordre nul. — „C. R. Acad. Sci.", 1950, t. 230, p. 40—42.
15. Edrei A, Fuchs W. H. j. Fhe deficiencies of meromorphic functions of order less than one. — „Duke Math. j.", 1960, vol. 27, N 3. p. 233—249.
16. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.