УДК 517.56

Л. С. Новожилова

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА—СЛОБОДЕЦКОГО ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пространства Соболева—Слободецкого переменного порядка впервые были упомянуты в работах Вишика и Эскина, рассматривались Хермандером, Унтербергером и др. Подробное изучение таких пространств для символов, стабилизирующихся по x, проведенное в [2], послужило основой для данной работы, в которой снято требование стабилизации.

В § 1 формулируется условие, позволяющее перенести теорию операторов локального типа, изложенную в [3], на банаховы пространства распределений. В § 2 доказываются формулы композиции, перехода к сопряженному, замены переменных Они получены сочетанием методов работ [1] и [5]. В § 3 устанавливается изоморфизм $H^{s(x)}(R^n)$ и $L_2(R^n)$, а также формулируются результаты о вложениях и следах функций из $H^{s(x)}(R^n)$.

Полученные результаты позволяют рассмотреть псевдодифференциальный (п. д.) оператор переменного порядка в неограниченной области с конической структурой на бесконечности. В § 4 формулируются достаточные условия нетеровости краевой задачи для такого оператора.

§ 1. Локальная теория в банаховых пространствах распределений

Через $S(R^n)$ обозначим, как обычно, пространство функций $f \in C^\infty(R^n)$, таких что

$$p_{\alpha\beta}(f) = \sup_{x \in R^n} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| < c_{\alpha\beta}$$

для любых мультииндексов α, β, где $\partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$; $x^\beta = x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$; $c_{\alpha\beta}$ — константа. Топологию введем с помощью системы полунорм $p_{\alpha\beta}$. Через $S'(R^n)$ обозначим сопряженное к $S(R^n)$ пространство. Через $B^\infty(R^n)$ обозначим класс функций, ограниченных в R^n вместе со всеми своими производными.

Компактифицируем R^n, как в [4], сферой бесконечно удаленных точек. Полученное расширение обозначим через $\tilde{R}^n$. Пусть E и F — банаховы пространства распределений из $S'(R^n)$, определенных на $\tilde{R}^n$. Пусть также E и F — модули над $B^\infty(R^n)$.

Для $u \subset \tilde{R}^n$ через χ_u обозначим гладкую характеристическую функцию множества u (см. [4]); через $T\chi_u$ — оператор умножения на χ_u.

Следующее условие достаточно для перенесения результатов [3] на операторы, действующие из E в F.

Условие 1. Существуют изоморфизмы M_1 и M_2, $M_1 : E \cong L_2(R^n)$; $M_2 : F \cong L_2(R^n)$, такие что для любых открытых множеств u, v, таких что $\bar{u} \cap \bar{v} = \varnothing$, операторы $T_{\chi_u} M_i T_{\chi_v}$, $T_{\chi_u} M_i^{-1} T_{\chi_v}$, $i = 1, 2$ вполне непрерывны в соответствующих пространствах.

§ 2. Вспомогательные факты

Через $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ($\mathrm{Comp}(X, Y)$) обозначим пространство линейных непрерывных операторов (пространство вполне непрерывных операторов) из X в Y с операторной нормой.

Введем некоторые классы функций и операторов.

Через $S^m_{\rho\delta}$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$ обозначим класс функций $p \in C^\infty \times (R^n \times R^n)$, таких что

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x p(x, \xi)| \leqslant c_{\alpha\beta}(1 + |\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \tag{2.1}$$

Оператор $p(x, D)$, действующий по формуле

$$p(x, D)u(x) = \int p(x, \xi)\hat{u}(\xi)e^{i(x, \xi)}d\xi,$$

$$u \in S(R^n),\ \hat{u}(\xi) = \int u(x)e^{-i(x, \xi)}dx,$$

назовем п. д. оператором с символом $p(x, \xi)$.

Подкласс функций p из $S^m_{\rho\delta}$, для которых оценка (2.1) выполнена с $c_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}(x)$, такими что $c_{\alpha\beta}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ обозначим через $\mathring{S}^m_{\rho\delta}$.

Через $S^m_{\rho\delta\delta}$ обозначим класс функций $p \in C^\infty(R^n \times R^n \times R^n)$ таких, что

$$|\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi \partial^\gamma_y p(x, \xi, y) \leqslant c_{\alpha\beta\gamma}(1 + |\xi|)^{m+\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|}. \tag{2.2}$$

Оператор $P(x, D)$, действующий по формуле

$$P(x, D)u(x) = \iint e^{i(x-y, \xi)}p(x, \xi, y)\hat{u}(\xi)d\xi dy,\ u \in S$$

следуя [1], назовем п. д. оператором мультисимвола $p(x, \xi, y)$.

Подкласс функций p из $S^m_{\rho\delta\delta}$, для которых (2.2) выполняется с $c_{\alpha\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}(y)$, такими, что $c_{\alpha\beta\gamma}(y) \to 0$ при $|y| \to \infty$, обозначим через $\mathring{S}^m_{\rho\delta\delta}$.

Лемма 2.1. *Если* $p \in \mathring{S}^m_{\rho\delta}$, *то* $p(x, D) \in \mathrm{Comp}(H^{s+m}, H^{s-\lambda})$, $\lambda > 0$.

Доказательство вытекает из следующих фактов ([5]):

а) отображение $p(x, \xi) \to p(x, D)$ пространства $S^m_{\rho\delta}$ в $\mathrm{Hom} \times (H^{s+m}, H^s)$ непрерывно ([1]);

б) в условиях леммы p аппроксимируется в $S^m_{\rho\delta}$ финитными по x символами;

в) вложение $H^s(\Omega) \to H^{s-\lambda}(\Omega)$ компактно для ограниченных $\Omega \subset R^n$.

Определение 2.1. *Порядком п. д. оператора назовем наименьшее из* t $(\in R)$, *для которых* $\|p(x, D)u\|_s \leqslant c\|u\|_{s+t}$, $u \in S$, ($\|\ \|_s$ — *норма в пространстве* H^s).

Определение 2.2. *Пусть p, p_j, $j=0, 1, \ldots$ — п. д. операторы, причем порядки p_j, строго убывая, стремятся к $-\infty$. Говорят, что $\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j$ есть асимптотическое разложение p (и пишут $p \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j$), если $\forall N$ $\exists N_1$ такое что $p - \sum\limits_{j=0}^{N_1} p_j \in \mathrm{Comp}\,(H^s, H^{s+N})$, $\forall s$.*

Следующее предложение является основным для этого параграфа, так как оно используется при получении остальных результатов.

Предложение 2.1. *Пусть $p \in S^m_{\rho\delta\delta}$, $\partial^\gamma_y p \in \mathring{S}^{m+\delta|\gamma|}_{\rho\delta\delta}$, $|\gamma| \neq 0$. Тогда п. д. оператор мультисимвола $P(x, D)$ допускает асимптотическое разложение*

$$P(x, D) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x, D),$$

где

$$p_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} (-i\partial_\xi)^\alpha \partial^\alpha_y p(x, \xi, y)|_{y=x}.$$

Доказательство. Разложим $p(x, \xi, y)$ в ряд Тейлора по y в точке x. Имеем

$$P(x, D)\,u(x) = \sum_{j=0}^{N_1-1} p_j(x, D)\,u(x) =$$

$$= \iint e^{i(x-y,\, \xi)} \sum_{|\alpha|=N_1} (y-x)^\alpha q_\alpha(x, \xi, y-x)\,u(y)\,dy\,d\xi \equiv r_{N_1} u(x),$$

где

$$q_\alpha(x, \xi, z) = \frac{N_1}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{N_1-1} \partial^\alpha_y p(x, \xi, x+tz)\,dt.$$

Каждое слагаемое есть результат действия на u п. д. оператора $r_\alpha(x, D)$ с символом

$$r_\alpha(x, \eta) = \int e^{i(z,\, \eta)} \int e^{-i(z,\, \xi)}\, \partial^\alpha_\xi q_\alpha(x, \xi, z)\,d\xi\,dz$$

(с точностью до константы).

Предложение следует теперь из следующей леммы.

Лемма 2.2. *Если для $q(x, \xi, z)$ справедлива оценка*

$$|\partial^k_z \partial^l_\xi q(x, \xi, z)| \leqslant c_{lk}(x+\theta z)(1+|\xi|)^{-K-\rho|l|+\delta|k|}, \tag{2.3}$$

где l, k — мультииндексы; $c_{lk}(y) \to 0$ при $|y| \to \infty$; $K > N+n$; $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, θ зависит от x и z, то п. д. оператор $r(x, D)$ с сим-

волом $r(x, \eta) = \int e^{i(z, \eta)} \int e^{-i(z, \xi)} q(x, \xi, z)\, d\xi\, dz$ *принадлежит* $\operatorname{Comp}(H^t, H^{t+N-\lambda})$, $\lambda > 0$.

Доказательство. Свойства преобразования Фурье позволяют получить оценку

$$|r(x, \eta)(1+|\eta|)^N| \leqslant c \sum_{\substack{|l| \leqslant N_2 \\ |k| \leqslant N}} \sup \max c_{lk}(x+y)/(1+|z|)^M$$

N_2 — зависит от M.

Аналогичные оценки для производных и лемма 2.1 доказывают лемму 2.2.

Этим завершается доказательство предложения 2.1, ибо для $\partial_\xi^\alpha q_\alpha$ при $|\alpha| = N_1 > \frac{m+n+N}{\rho-\delta}$ выполняется оценка (2.3).

Следующие два предложения получены методом [1] с применением предложения 2.1.

Сначала определим формально сопряженный к $p(x, D)$ оператор p^* равенством

$$(u, p^*v) = (p(x, D)u, v), \; u, v \in S;$$

$(\ ,\ )$ — скалярное произведение в $L_2(R^n)$.

Следуя [1], введем оператор

$$p^R(x, D)\, u(x) = \iint e^{i(x-y, \xi)} p(y, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi.$$

Нетрудно показать, что $p^* = \bar{p}^R(x, D)$, где $\bar{p}(x, D)$ отвечает символу $p(x, \xi)$.

Предложение 2.2. *Пусть* $p \in S^m_{\rho\delta}$, $\partial_x^\alpha p \in \mathring{S}^{m+\delta|\alpha|}_{\rho\delta}$ *для* $|\alpha| \neq 0$. *Тогда имеют место асимптотические разложения*

1) $p^* \sim \sum_{j=0}^{\infty} \bar{p}_j(x, D)$;

2) $p(x, D) \sim \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j p_j^R(x, D)$, *где* $p_j(x, D)$ *отвечает символу*

$$p_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha (-i\partial_x)^\alpha p(x, \xi).$$

Предложение 2.3. *Пусть* $p \in S^{m_1}_{\rho\delta}$, $q \in S^{m_2}_{\rho\delta}$, $\partial_x^\alpha q \in \mathring{S}^{m_2+\delta|\alpha|}_{\rho,\delta}$, $|\alpha| \neq 0$. *Тогда* $p(x, D)\, q(x, D) \sim \sum_{j=0}^{\infty} r_j(x, D)$, *где*

$$r_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p(x, \xi)(-i\partial_x)^\alpha q(x, \xi).$$

Пусть Ω_i, $i = 1, 2$ — открытые множества $\tilde{R}^n$; χ_i — характеристическая функция Ω_i; $\varphi: \Omega_1 \to \Omega_2$ — диффеоморфизм.

Введем отображения $\varphi_*: \overset{\circ}{S}(\Omega_2) \to \overset{\circ}{S}(\Omega_1)$, $\varphi^*: S(\Omega_1) \to S(\Omega_2)$ формулами

$$\varphi_* f = f \circ \varphi; \quad \varphi^* f = f \circ \varphi^{-1}.$$

Здесь $\overset{\circ}{S}(\Omega_i)$ — подпространство $S(R^n)$ функций с носителем в Ω_i; $S(\Omega_i)$ — пространство сужений на Ω_i функций из $S(R^n)$.

Если Ω_i, $i = 1, 2$ — окрестности бесконечно удаленных точек x_1 и $\varphi(x_1) = x_2$, то будем предполагать, что $x_1 = x_2$ и матрица Якоби $\partial_x \varphi$ отображения φ однородна степени нуль.

Предложение 2.4. *Пусть* $p \in S^m_{\rho\delta}$, $1 - \rho < \delta$. *Тогда для оператора* $B \equiv T_{\chi_1} \varphi^* p(x, D) \varphi_* T_{\chi_2}$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$B \sim \sum_{j=0}^{\infty} q_j(x, D),$$

где

$$q_j(x, \eta) = \sum_{|\alpha| = j} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\eta (-i\partial_x)^\alpha q(x, \eta, y|_{y=x};$$

$$q(x, \eta, y) = \varkappa_1(x) p(\varphi(x), [\partial^T_y \varphi(x, y)]^{-1} \eta) \varkappa_2(y) |\partial_y \varphi(y)| |\partial_y \varphi(x, y)|^{-1};$$

$$\partial_y \varphi(x, y) = \int_0^1 \partial_y \varphi(y + t(x - y))\, dt.$$

Доказательство. Имеем

$$Bu(x) = \iint \varkappa_1(x) e^{i(\varphi(x) - \varphi(y), \xi)} p(\varphi(x, \xi) \varkappa_2(y) u(y) |\partial \varphi(x)| \, dy d\xi.$$

Рассмотрим только случай бесконечно удаленной точки. Выбрав окрестности Ω_i, $i = 1, 2$ так, чтобы матрица $\partial_y \varphi(x, y)$ была невырожденной (что возможно в силу однородности $\partial_y \varphi$), произведем замену $\partial_y \varphi(x, y)^T \xi = \eta$. (Знак ^{T} означает транспонирование). Получим

$$Bu(x) = \iint e^{i(x-y, \eta)} q(x, \eta, y) u(y) \, dy d\eta \equiv Q(x, D) u(x).$$

Обозначение оправдано тем, что $q \in S^m_{\rho\delta\delta}$ (при оценках производных по x и y существенно условие $1 - \rho < \delta$).

Доказательство завершается разложением в ряд Тейлора и применением леммы 2.2. При получении оценки (2.3) используется тот факт, что для однородной функции f

$$|\partial^\alpha f(x)| \leqslant c_\alpha (1 + |x|)^{-\alpha}, \quad |x| \neq 0.$$

§ 3. Пространства $H^{s(x)}(R^n)$

Определение 3.1. Через $M_{\rho\delta}$ *обозначим класс вещественных символов* $\mu \in S_{\rho\delta}^{-\infty}$, *для которых верны оценки*

$$c^{-1}(1+|\xi|)^{\underline{\mu}} < \mu(x,\xi) < c(1+|\xi|)^{\overline{\mu}};$$
$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \mu(x,\xi)| < c_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\mu(x,\xi).$$

Будем писать $b \dashv \mu$, *если* $\mu \in M_{\rho\delta}$, $b \in \overset{\circledcirc}{S}{}_{\rho\delta}^{-\infty}$ $(=\bigcup\limits_m \overset{\circledcirc}{S}{}_{\rho\delta}^m)$ *и* $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b(x,\xi)| \leqslant$ $\leqslant c_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\mu(x,\xi)$.

Пусть $s \in B^\infty(R^n)$, $\partial^\alpha s(x) \to 0$, $|x| \to \infty$, $|\alpha| \neq 0$, $\underline{s} = \inf\limits_{x\in R^n} s(x)$.

Пространства $H^{s(x)}(R^n)$ *введем с помощью п. д. оператора* $\Lambda^{s(x)}$ *с символом* $(1+|\xi|)^{s(x)}$.

Определение 3.2. *Через* $H^{s(x)}(R^n)$ *обозначим совокупность* $u \in H^{\underline{s}}(R^n)$, *для которых* $\Lambda^{s(x)}u \in L_2(R^n)$ *с нормой* $\|u\|_{s(x)}^2 = \|\Lambda^{s(x)}u\|_{L_2}^2 + \|u\|_{\underline{s}}^2$.

Теорема 3.1. *Оператор* $M = (\Lambda^{s(x)/2})^* \Lambda^{s(x)/2} + (1+|D|^2)^{m/2}$, $m \leqslant \underline{s}$ *осуществляет изоморфизм* $H^{s(x)}(R^n)$ *и* $L_2(R^n)$. *(Сопряженность понимается в формальном смысле).*

Для любого натурального N *оператор* M^{-1} *представим в виде*

$$M^{-1} = r_N(x,D) + T_N,$$

где

$$r_N \dashv \lambda^{-1},\quad \lambda^{-1} = (1+|\xi|)^{-s(x)},$$
$$T_N \in \operatorname{Comp}(H^t, H^{t+N}),\ \forall t.$$

С помощью предложения 2.3 нетрудно убедиться в том, что построенный изоморфизм удовлетворяет условию 1 § 1.

Перейдем к результатам о вложениях.

Предложение 3.1. *Для того чтобы* $H^{\mu(x)}$ *было вложено в* $H^{\nu(x)}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\nu(x) - \mu(x) \leqslant 0$, $\forall x$.

Если M — изоморфизм $H^{\mu(x)}$ и L_2, то вложение $H^{\mu(x)}$ в $H^{\nu(x)}$ эквивалентно ограниченности оператора $(1+|D|)^{\nu(x)}M^{-1}$ как оператора из L_2 в L_2. С помощью предложения 2.3, так же, как в [2], показывается, что последнее эквивалентно неравенству, указанному в предложении.

Следующее предложение есть частный случай доказанного в [2]. Нас интересует следствие из него.

Предложение 3.2. *Пусть* Ω, Ω_1 — *ограниченные множества* R^n и $\Omega \subset \Omega_1$. *Если* $s(x) < t(x)\ \forall x \in \Omega_1$, *то вложение* $\overset{\circ}{H}{}^{t(x)}(\Omega) \to \overset{\circ}{H}{}^{s(x)}(\Omega)$ *компактно.*

Следствие. *Если* $a \in S_{\rho\delta}^{-\infty}$ *и* $\forall, \alpha, \beta$

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leqslant c_{\alpha\beta}(x)(1 + |\xi|)^{s(x)-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

где $c_{\alpha\beta}(x) \to 0$ *при* $|x| \to \infty$, $\beta \neq 0$, *то*

$$a(x, D) \in \operatorname{Comp}(H^{t(x)}, H^{t(x)-s(x)-\lambda}), \ \lambda > 0.$$

Ввиду полной аналогии с [2] основная теорема и результаты о вложениях даны без доказательства.

Перейдем к вопросу о следах функций из $H^{s(x)}(R^n)$. Не нарушая общности, рассмотрим только оператор сужения на подпространство коразмерности $1: \gamma u(x', x_n) = u(x', 0)$, $x' \in R^{n-1}$, $u \in S$. Справедливо

Предложение 3.3. *Пусть* $\mu(x, \xi) = (1 + |\xi|)^{t(x)}$, $t(x', 0) > \frac{1}{2}$, $\nu(x', \xi') = (1 + |\xi'|)^{t(x', 0) - \frac{1}{2}}$. *Тогда* γ *продолжается до непрерывного оператора из* $H^{t(x)}(R^n)$ *в* $H^{t(x', 0)-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$.

Для проведения доказательства по схеме [2] понадобятся следующие две леммы.

Лемма 3.1. *Пусть*

1) $\delta < \rho/\rho + 1$, $p \in S_{\rho\delta}^{m_1}$, $q = q(x, \xi, t)$ *и* $q \in S_{\rho\delta}^0 \ \forall t \in R$;

2) $\left(\int |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q(x, \xi, t)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant c_{\alpha\beta}(1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$, $\forall \alpha, \beta$;

3) $h_{N_1}(t) = p(x, D) q(x, D, t) - \sum_{j=0}^{N_1-1} r_j(x, D, t)$, r_j *для каждого* t *определены, как в предложении 2.3.*

Тогда для достаточно больших N_1

$$\left\| \int_R h_{N_1}(t) u(x, t)\, dt \right\|_{L_2} \leqslant c \int_R \| u(x, t) \|_{L_2}^2 dt. \tag{3.1}$$

Доказательство. Из 2) следует, что $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q(x, \xi, t)| \leqslant c_{\alpha\beta}(t)(1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$, где $c_{\alpha\beta} \in L_2(R)$, $\forall \alpha, \beta$.

Можно показать, что в условиях леммы $(\delta < \rho/\rho + 1)\, h_{N_1}$ есть п. д. оператор, причем константы в (2.1) для его символа линейно выражаются через соответствующие константы для p и q. Далее воспользуемся приемом [8], представляя $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = u_y^1(x, t) + u_y^2(x, t).$$
$$u_y^1 = \varphi(x - y) u(x, t), \ u_y^2 = [1 - \varphi(x - y)] u(x, t),$$
$$\varphi \in C_0^\infty(R^n), \ \varphi(x) = 1 \text{ для } |x| \leqslant 2.$$

Оценим $\int_R h_{N_1}(t) u(x, t)\, dt = \int_R h_{N_1}(t) u_y^1 dt + \int_R h_{N_1}(t) u_y^2 dt$ для $|x - y| < 1$. К первому члену в правой части применим лемму из

[2], аналогичную доказываемой. При оценке второго используем приведенные выше соображения. Интегрирование по y даст оценку (3.1).

Лемма 3.2. Пусть $a = a(x, \xi, t)$, $a \in S^0_{\rho\delta}\ \forall t \in R$ *и*

$$\left(\int |\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x a(x, \xi, t)|^2 \, dt\right)^{1/2} \leqslant c_{\alpha\beta}(1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}.$$

Тогда $\left\| \int a(x, D, t)\, u(x, t)\, dt \right\|^2_{L_2} < c \iint |u(x, t)|^2 \, dt dx.$

Доказательство аналогично предыдущему.

Доказательство предложения 3.3. Пусть M — изоморфизм $H^{t(x)}$ и L_2 и $M^{-1} = r_N(x, D) + T_N$ (выбор N определяется последующими соображениями). Достаточно доказать непрерывность оператора $\nu(x', D')\gamma r_N(x, D)$ из $L_2(R^n)$ в $L_2(R^{n-1})$. Имеем

$$\nu(x', D')\gamma \int e^{i(x,\xi)} r_N(x, \xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \nu(x', D') \int r_N(x', 0, D', \xi_n)\, \hat{u}(x', \xi_n)\, d\xi_n =$$

$$= \int \nu(x', D')\, r_N(x', 0, D', \xi_n)\, \hat{u}(x', \xi_n)\, d\xi_n,$$

$u \in S$, $\hat{u}(x', \xi_n)$ — преобразование Фурье $u(x)$ по x_n. Как показано в [2], из оценки для символа $\mu(x, \xi)$

$$\int |(\partial'_\xi)^{\alpha^1}(\partial'_x)^{\beta^1} \mu(x', 0, \xi) \ldots (\partial'_\xi)^{\alpha^k}(\partial'_x)^{\beta^k} \mu(x', 0, \xi)|\, \mu^{-2-k}(x', 0, \xi)\, d\xi_n \leqslant$$

$$\leqslant c(\alpha^1, \ldots, \beta^k) M(x', \xi')(1 + |\xi'|)^{-\rho \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha^j + \delta \sum\limits_{j=1}^{k} \beta^j},$$

$$M(x', \xi') = \int \mu^{-2}(x', 0, \xi', \xi_n)\, d\xi_n$$

и алгоритма построения $r_N(x, \xi)$ следует оценка

$$\int |(\partial'_\xi)^\alpha (\partial'_x)^\beta r_N(x', 0, \xi', \xi_n)|^2\, d\xi_n \leqslant c_{\alpha\beta}(1 + |\xi'|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}(M(x', \xi'))^{1/2}. \tag{3.2}$$

Для завершения доказательства осталось применить предложение 3.3 к операторам $\nu(x', D')$ и $r_N(x', 0, D', \xi_n)$ и воспользоваться леммами 3.1 и 3.2. Выполнение условий этих лемм следует из (3.2).

§ 4. Приложения

Рассмотрим сначала задачу в полупространстве. Пространства $\overset{\circ}{H}{}^{s(x)}(R^n)$ $H^{s(x)}(R^n_+)$ вводятся обычным образом.

Пространство ε_ρ состоит из символов $a(\xi)$, для которых $|\partial^\alpha_\xi a(\xi)| \leqslant c_\alpha (1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha|}$.

Пусть ν — единичный вектор пространства R^n_x, $\xi \in R^n_\xi$, ξ_ν — проекция ξ на подпространство, двойственное к подпространству, натянутому на ν, $\xi'_\nu = \xi - \xi_\nu$;

$$\varkappa(\nu) = \frac{1}{2\pi}\{\arg a(\xi'_\nu, \xi_\nu)\}^{\infty}_{\xi_\nu} = -\infty.$$

Через R_ρ обозначим подпространство ε_ρ символов $a(\xi)$, таких что для любого единичного $\nu \in R_n$

$$a_\nu(x) = \left(\frac{\xi_-}{\xi_+}\right)^{\varkappa(\nu)} a(\xi) \in R$$

(R — кольцо преобразований Фурье абсолютно интегрируемых функций, пополненное константами).

Известно, что для оператора с символом из R_ρ справедливо представление $a(D) = a_-(D)\, D_{\nu-}^{-\varkappa(\nu)}\, D_{\nu+}^{\varkappa(\nu)}\, a_+(D)$, где $a_\pm(D)$, $a_\pm^{-1}(D)$ — ограниченные операторы в $\overset{\circ}{H}{}^{s(x)}(R^n_\pm)$, $D_{\nu\pm}$ имеет символ $\xi_\pm = \xi_\nu \pm \pm\sqrt{1 + |\xi'_\nu|^2}$.

Рассмотрим уравнение

$$P_+ A u_+ = f, \tag{4.1}$$

где A — п. д. оператор с символом $(1 + |\xi|^2)^{\alpha(x)} a(\xi)$,

$$a \in R_\rho,\ a(\xi) \neq 0,\ \forall \xi \in \tilde{R}^n_\xi; \tag{4.2}$$

$$f \in H^{s(x) - 2\alpha(x)}(R^n_+).$$

Решение ищется в $\overset{\circ}{H}{}^{s(x)}(R^n_+)$, $s(x) - \alpha(x) = -m + \varkappa + \delta(x)$, $|\delta(x)| < \frac{1}{2}$. Знак m определяет корректность либо граничной задачи, либо задачи с дополнительными потенциалами для уравнения (4.1).

При $m \geqslant 0$, так же, как в [7], получим

$$u_+ = A_+^{-1} D_-^m\, \theta^+ A_-^{-1} D_-^{-m}\, lf + \sum_{k=1}^{m} A_+^{-1} c_k(x')\, \delta^{(k-1)}(x_n);$$

$$A_\pm^{-1} = D_\pm^{-\alpha(x) \mp \varkappa}\, a_\pm^{-1}(D).$$

Зададим m граничных условий вида

$$\gamma B_j(x, D)\, u_+ = f_j;$$

$$B_j(x, \xi) = (1 + |\xi|^2)^{q_j(x)}\, b_j(\xi),\ b_j \in \varepsilon_\rho; \tag{4.3}$$

$$2q_j(x', 0) < s(x', 0) - \frac{1}{2},\ f_j \in H^{s(x',0) - 2q_j(x',0) - \frac{1}{2}}(R^{n-1}_{x'}).$$

Следующее условие в совокупности с (4.2) достаточно для нетеровости задачи (4.1), (4.3):

$$\det d_{jk}(x', \xi') \neq 0,\ (x'\ \xi') \in \tilde{R}^{n-1}_{x'} \times \tilde{R}^{n-1}_{\xi'},\ j, k = 1, \dots m;$$

$$d_{jk}(x', \xi') = \int \frac{b_j(\xi', (1 + |\xi'|^2)^{1/2} t)\, (i + t^2)^{q_j(x',0)}\, t^{k-1}}{a_+(\xi', (1 + |\xi'|^2)^{1/2} t)\, (t + i)^{\alpha(x',0)}}\, dt.$$

Далее аналогично [6] введем пространство $W_{2,s(x)}$ п. д. операторов $a(x, D)$, эквивалентных в каждой точке $x \in R^n$ оператору с символом из ε_ρ.

Операторы с символом из ε_ρ, рассматриваемые в $H^{s(x)}(R^n)$, обладают следующими свойствами:

1) $a(D) \overset{x_0}{\sim} \overset{\circ}{a}(D)$, $\overset{\circ}{a}(\xi) = \lim\limits_{t \to \infty} a(t\xi)$, $x_0 \in R^n$;

2) $a(D) \overset{\omega_0}{\sim} \varphi \overset{\omega_0}{\sim} a(D)$, $\omega_0 \in \tilde{R}^n \setminus R^n$;

φ обладает свойствами, указанными в предложении 2.4.

Естественно вводится символ $a(x, \xi)$ оператора $a(x, D)$ из $W_{2,\, s(x)}$:

$$a(x, \xi) = \begin{cases} a_x(\xi), \ (x, \xi) \in R_x^n \times (\tilde{R}_\xi^n \setminus R_\xi^n), \\ a_\omega(\xi), \ (\omega, \xi) \in (\tilde{R}_x^n \setminus R_x^n) \times \tilde{R}_\xi^n, \end{cases}$$

где $a_x(D)$, $a_\omega(D)$ — представители $a(x, D)$ в точках x и ω соответственно.

Пусть G — неограниченная область в $\tilde{R}^n$, коническая на бесконечности (см. [4]). Рассмотрим уравнение

$$U(x, D)\, u_+ \equiv (P_G A(x, D)\, u_+, \ \gamma_{\partial G} B^j u_+, \ j = 1, \ \ldots, \ m) = (f, f_j).$$

Оператор $U(x, D)$ действует из пространства $\overset{\circ}{H}{}^{s(x)}(G)$ в пространство

$$H^{s(x),\, \alpha(x),\, (q(x))} = H^{s(x) - 2\alpha(x)} \bigoplus_{j=1}^{m} H^{s(x') - 2q_j(x') - \frac{1}{2}}(\partial G);$$

$$A(x, D) = (1 + |D|)^{2\alpha(x)}\, a(x, D), \ a(x, D) \in W_{2,\, s(x)},$$

причем $a_x \in R_\rho$, если $x \in \partial G$;

$$B^j(x, D) = (1 + |D|)^{2q_j(x)}\, b_j(x, D), \ b_j(x, D) \in W_{2,\, s(x)};$$

$$s(x) - \alpha(x) = -m + \varkappa + \delta(x), \ m \geqslant 0, \ |\delta(x)| < \frac{1}{2},$$

$$\varkappa \text{ — индекс } a(x, \xi);$$

$$s(x') - 2q_j(x') > \frac{1}{2}, \ x' \in \partial G; \quad j = 1, \ \ldots, \ m.$$

В конечных точках x_0, лежащих внутри G, оператор $\overset{\circ}{U}(x, D)$ эквивалентен оператору $(1 + |D|^2)^{\alpha(x)}\, \overset{\circ}{a}(x_0, D)$, а в точках границы области G квазиэквивалентен:

а) в конечных точках x_0 — оператору

$$(P_+ (1 + |D|^2)^{\alpha(\varphi^{-1}x)}\, \overset{\circ}{a}(x_0, D), \ \gamma (1 + |D|^2)^{q_j(\varphi^{-1}(x))}\, \overset{\circ}{b}_j(x_0, D), \\ j = 1, \ \ldots, \ m);$$

б) в бесконечно удаленных точках ω_0 — оператору

$$(P_+ (1 + |D|^2)^{\alpha(\varphi^{-1}(x)}\, a(\omega_0, D), \ \gamma (1 + |D|^2)^{q_j(\varphi^{-1}(x))}\, b_j(\omega_0, D), \\ j = 1, \ \ldots, \ m),$$

φ — отображение, разворачивающее границу в окрестности рассматриваемой точки на касательную плоскость и обладающее теми же свойствами, что и отображение φ в предложении 2.4.

Теорема. *Следующие условия достаточны для нетеровости оператора U:*

1) $a(x, \xi) \neq 0$ для $(x, \xi) \in (R^n_x \times (\tilde{R}^n_\xi \setminus R^n_\xi)) \cup ((\tilde{R}^n_x \setminus R^n_x) \times \tilde{R}^n_\xi)$;

2) $\det \mathring{d}_{jk}(x_0, x, \xi'_{\nu(x_0)}) \neq 0$, $x_0 \in \partial G$, $x \in \partial G$;

$\det d_{jk}(\omega, x, \xi'_{\nu(y)}) \neq 0$, $x \in \partial G$, $y \in (\tilde{R}^n_x \setminus R^n_x) \cap \partial G$, *$\omega$ — направление, отвечающее y; $\nu(y)$ — единичный вектор нормали к границе в точке y, где*

$$\mathring{d}_{jk}(x_0, x, \xi'_{\nu(x_0)}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathring{b}_j(x_0, \xi'_{\nu(x_0)}, (1 + |\xi'_{\nu(x_0)}|^2)^{1/2} t) \times}{\mathring{a}_+(x_0, \xi'_{\nu(x_0)}, (1 + |\xi'_{\nu(x_0)}|^2)^{1/2} \times} \cdots$$

$$\cdots \frac{\times (t^2 + 1)^{q_j(x)} dt}{\times (t + i)^{\alpha(x)}};$$

$$d_{jk}(\omega, x, \xi'_{\nu(y)}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b_j(\omega, \xi'_{\nu(y)}(1 + |\xi'_{\nu(y)}|^2)^{1/2} t) \times (t^2 + 1)^{q_j(x)} dt}{a_+(\omega, \xi'_{\nu(y)}, (1 + |\xi'_{\nu(y)}|^2)^{1/2} t) \times (t + i)^{\alpha(x)}},$$

$$j, k = 1, \ldots, m.$$

Автор благодарит В. С. Рабиновича за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kumano-go H. Remarks on pseudo-differential operators. — «Journal Math. Society Japan», 1969, vol 21. № 3, p. 120—135.
2. Волевич Л. Р., Каган В. М. Псевдодифференциальные гипоэллиптические операторы в теории функциональных пространств. — «Труды Моск. Мат. о-ва», 1969, т. 20, с. 305—314.
3. Симоненко И. Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I. — «Изв. АН СССР, Сер. мат.», 29, 1965, № 29, с. 6—17.
4. Рабинович В. С. Псевдодифференциальные уравнения в неограниченных областях с конической структурой на бесконечности. — «Мат. сб.», 1969, т. 80, с. 13—25.
5. Грушин В. В. Псевдодифференциальные операторы с ограниченными символами. — «Функциональный анализ и его приложения», 1970, т. 4, вып. 3. с. 27—32.
6. Рабинович В. С. Псевдодифференциальные уравнения в неограниченных областях. — «Докл. АН СССР», т. 197, № 2, с. 6—20.
7. Вишик М. И., Эскин. Г. И. Уравнение в свертках переменного порядка. — «Труды Моск. Мат. о-ва», 1967, т. 16, с. 57—63.
8. Хермандер Л. Псевдодифференциальные операторы и гипоэллиптические уравнения.— В кн.: Псевдодифференциальные операторы. М., «Мир», 1967, с. 72—84.