УДК 517.535+519.53

В. Н. Логвиненко, **канд. физ.-мат. наук,**
Ю. Ф. Середа

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Через C^n обозначим n-мерное комплексное пространство с обычными линейными операциями, а через R^n — вещественную гиперплоскость в C^n. Запись $z \in C^n$ означает, что $z = (z_1, \ldots, z_n)$, где $z_1, \ldots, z_n$ — комплексные числа. Аналогично $x \in R^n$ означает что $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — вещественные числа. Через $dx = dx_1, \ldots, dx_n$ мы обозначаем элемент объема в R^n. Через $\mathrm{mes}_n(M)$ будем обозначать n-мерную меру Лебега множества $M \subset R^n$.

Пусть σ и p — конечные положительные числа Через $W^p_{\sigma, n}$ обозначим класс целых функций $f(z)$ n комплексных переменных, удовлетворяющих условию

$$\limsup_{|z_1|+\cdots+|z_n|\to\infty} \frac{\ln|f(z)|}{|z_1|+\ldots+|z_n|} \leqslant \sigma$$

и принадлежащих $L^p(R^n)$ по лебеговой мере dx:

$$\int_{R^n} |f(x)|^p\, dx < \infty.$$

Пусть $E \subset R^n$ — измеримое по Борелю множество. Очевидно, что если E — множество положительной лебеговой меры, то для любой функции $f \in W^p_{\sigma, n}$, $f \not\equiv 0$

$$0 < \int_E |f(x)|^p\, dx \Big/ \int_{R^n} |f(x)|^p\, dx \leqslant 1.$$

В этой работе рассматривается следующий вопрос: каково должно быть множество $E \subset R^n$, чтобы для любой $f \in W^p_{\sigma, n}, f \not\equiv 0$, выполнялось условие

$$\int_E |f(x)|^p\, dx \Big/ \int_{R^n} |f(x)|^p\, dx \geqslant C, \tag{1}$$

где константа $C > 0$ не зависит от f.

Определение 1. *Измеримое множество $E \subset R^n$ называется относительно плотным (по лебеговой мере), если существуют такие константы $L < \infty$ и $\delta > 0$, что мера Лебега порции множества E в любом гиперкубе с ребрами длины L, параллельными координатным осям, больше δ.*

При $p = 2$ сформулированный выше вопрос рассматривался ранее Б. П. Панеяхом [1, 2]. Он доказал, что при любом n относительная плотность E необходима для выполнения (1), однако достаточность относительной плотности E была доказана им лишь для $n=1$. При $n>1$ Б. П. Панеях дал достаточные условия на E, не смыкающиеся с необходимыми. При $n=1$, $p=2$ и некотором специальном множестве E неравенство (1) получил П. Лакс [3].

Оценками снизу отношения

$$\int_{R^n} |f(x)|^2 d\mu(x) \Big/ \int_{R^n} |f(x)|^2 dx,$$

где $f(z) \in W^2_{\sigma, n}$, а $d\mu$ — мера, занимался В. Я. Лин [4, 5].

Мы показываем, что необходимые условия, полученные Б. П. Панеяхом, являются также достаточными. А именно, нами доказана

Теорема 1. *Для выполнения условия (1) необходимо и достаточно, чтобы множество E было относительно плотным по лебеговой мере.*

Необходимость относительной плотности E доказывается легко, а основные трудности заключены в доказательстве достаточности.

Вместо того чтобы доказывать теорему 1 в сторону достаточности, мы докажем несколько более общий результат, относящийся к классу функций, логарифмически полисубгармонических в $\boldsymbol{C}^n$.

Определение 2. *Вещественнозначная функция $v(z)$, определенная в $\boldsymbol{C}^n$, называется полисубгармонической в $\boldsymbol{C}^n$, если она полунепрерывна сверху в $\boldsymbol{C}^n$ и субгармонична по каждому из переменных z_j при фиксированных $z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n$. Функция $u(z)$, определенная в $\boldsymbol{C}^n$, называется логарифмически полисубгармонической в $\boldsymbol{C}^n$, если $u(z) \geqslant 0$, $u(z) \not\equiv 0$, и функция $\ln u(z)$ — полисубгармоническая в $\boldsymbol{C}^n$.*

Теорема 2. *Пусть $E \subset \boldsymbol{R}^n$ — относительно плотное по мере Лебега множество. Пусть $u(z)$ — логарифмически полисубгармоническая в $\boldsymbol{C}^n$ функция, удовлетворяющая при некотором $\sigma \in (0, \infty)$* условию

$$\limsup_{|z_1| + \ldots + |z_n| \to \infty} \frac{\ln u(z)}{|z_1| + \ldots + |z_n|} \leqslant \sigma \tag{2}$$

и принадлежащая $L^1(\boldsymbol{R}^n)$. Тогда выполняется неравенство

$$\int_E u(x)\,dx \geqslant C(L, \delta, \sigma, n) \int_{R^n} u(x)\,dx, \tag{3}$$

где величина $C(L, \delta, \sigma, n) > 0$ зависит лишь от σ, n и величин L, δ, фигурирующих в определении 1.

Очевидно, что если $f(z)$ — целая функция в $\boldsymbol{C}^n$, то при любом $p>0$ функция $|f(z)|^p$ логарифмически полисубгармоническая в $\boldsymbol{C}^n$. Таким образом, теорема 1 в сторону достаточности следует из теоремы 2.

Параллельно с нашей работой публикуется статья В. Э. Кацнельсона [6], в которой приведены другие доказательства теорем 1 и 2, полученные им независимо.

Наше доказательство теоремы 2 использует весьма элементарные соображения: некоторые простые теоремы, относящиеся к субгармоническим функциям, и неравенства типа неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

Предпошлем доказательству теоремы 2 несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть* $a_k \geqslant 0$, $b_k \geqslant 0$ $(k = 0 \pm 1, \ldots)$ *и пусть*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \leqslant \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k.$$

Тогда для любого $\eta > 0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k\,:\,a_k \geqslant \eta b_k} b_k \leqslant \frac{\lambda}{\eta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k.$$

Доказательство.

$$\sum_{k\,:\,a_k \geqslant \eta b_k} b_k \leqslant \frac{1}{\eta} \sum_{k\,:\,a_k \geqslant \eta b_k} a_k \leqslant \frac{1}{\eta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \leqslant \frac{\lambda}{\eta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k.$$

Лемма 2. *Пусть числа* $a_1, \ldots, a_m$ *неотрицательны и пусть* $a_1 \leqslant \lambda a_2 (\lambda < 1)$. *Тогда*

$$\frac{a_1 + \ldots + a_m}{m} \geqslant \sqrt[m]{\frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda} a_1 \ldots a_m}.$$

Доказательство. Если $m = 2$, то

$$2\sqrt{a_1 a_2}\,(a_1 + a_2)^{-1} = 2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right)^{-1},$$

и остается лишь заметить, что функция $2\sqrt{t}\,(1+t)^{-1}$ монотонно возрастает на [0,1]. Возвращаясь к общему случаю, имеем

$$\frac{a_1 + \ldots + a_m}{m} \geqslant \sqrt[m]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \ldots a_m} \geqslant \sqrt[m]{\frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda} a_1 \ldots a_m}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть множество* M *и заданная на нем мера* μ *таковы, что, во-первых,* $\mu(M) = 1$, *и, во-вторых, для любого подмножества* $M_1 \subset M$ μ*-меры* $\lambda\,(0 < \lambda \leqslant 1)$ *и любого числа* $\lambda' \in (0\ \lambda)$ *найдется* $M_2 \subset M_1$ *такое, что* $\mu(M_2) = \lambda'$.

Пусть $F \subset M$ и $\mu(F) = 1/m$, где m *— натуральное число, большее 1, и пусть, наконец, неотрицательная функция* $\varphi(x) \in L^1 \times (M, d\mu)$ *такова, что*

$$\int_F \varphi d\mu \leqslant \lambda \int_M \varphi d\mu,$$

e $\lambda \in (0, m^{-1})$. *Тогда*

$$\int_M \varphi d\mu \geqslant C(\lambda, m) \exp\left\{\int_M \ln \varphi d\mu\right\},$$

$$\text{где } C(\lambda, m) = \sqrt[m]{\frac{(1+\lambda m)^2}{4\lambda m}}.$$

Доказательство. $M \setminus F$ разобьем на непересекающиеся множества $F_2, F_3, \ldots, F_m$ такие, что $\mu(F_k) = 1/m$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$. Множество F переобозначим через F_1. Имеем

$$\int_M \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{m} \int_{F_k} \varphi d\mu,$$

и хотя бы для одного из интегралов $\int_{F_k} \varphi d\mu$ $(k \geqslant 2)$ выполняется неравенство

$$\int_{F_1} \varphi d\mu \leqslant \lambda m \int_{F_k} \varphi d\mu.$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\int_M \varphi d\mu \geqslant m\left\{\frac{(1+\lambda m)^2}{4\lambda m}\right\}^{1/m} \sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} \int_{F_k} \varphi d\mu} =$$

$$= m\left\{\frac{(1+\lambda m)^2}{4\lambda m}\right\}^{1/m} \cdot \exp\left\{\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \ln \int_{F_k} \varphi d\mu\right\}. \tag{4}$$

Применяя к интегралу $\int_{F_k} \varphi d\mu$ неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для интегралов, согласно которому

$$\int_{F_k} \varphi d\mu \geqslant \mu(F_k) \exp\left\{\frac{\int_{F_k} \ln \varphi d\mu}{\mu(F_k)}\right\} = \frac{1}{m} \exp\left\{m \int_{F_k} \ln \varphi d\mu\right\},$$

из (4) получаем следующее неравенство:

$$\int_M \varphi d\mu \geqslant m\left\{\frac{(1+\lambda m)^2}{4\lambda m}\right\}^{1/m} \cdot \exp\left\{\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left(\ln \frac{1}{m} + m \int_{F_k} \ln \varphi d\mu\right)\right\} =$$

$$= m\left\{\frac{(1+\lambda m)^2}{4\lambda m}\right\}^{1/m} \cdot \exp\left\{\int_M \ln \varphi d\mu\right\}.$$

Лемма доказана.

Следующие две леммы — хорошо известные утверждения из теории субгармонических функций.

Лемма 4. *Пусть* $u(z)$ — *логарифмически субгармоническая функция в* $\boldsymbol{C}^n$, *удовлетворяющая условию (2) и такая, что* $\int\limits_{R^n} u(x)\,dx < \infty$. Тогда при любом $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n$ выполняется неравенство

$$\ln u(x+iy) \leqslant \sigma \sum_{j=1}^{n} |y_j| + \int\limits_{R^n} P(t;\ x,\ y) \ln u(t)\,dt,$$

где $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \boldsymbol{R}^n$, *а ядро*

$$P(t;\ x,\ y) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{|y_j|}{(t_j - x_j)^2 + y_j^2}$$

— произведение n ядер Пуассона для вещественной оси.

Лемма 5. *Пусть* $u(z)$ — *логарифмически субгармоническая функция в* $\boldsymbol{C}^n$, *удовлетворяющая условию (2). Тогда при любом* $y \in \boldsymbol{R}^n$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{R^n} u(x+iy)\,dx \leqslant \exp\left\{\sigma \sum_{j=1}^{n} |y_j|\right\} \int\limits_{R^n} u(x)\,dx.$$

Возвратимся к доказательству теоремы 2. Мы должны показать, что неравенство

$$\int\limits_{E} u(x)\,dx \leqslant \lambda \int\limits_{R^n} u(x)\,dx, \tag{5}$$

где $u(z)$ — логарифмически полисубгармоническая функция, удовлетворяющая условию (2) и принадлежащая $L^1(\boldsymbol{R}^n)$, не может выполняться при слишком малых λ. Покажем это, оценив λ снизу положительной величиной, зависящей лишь от n, σ и множества E.

По условию теоремы, множество E относительно плотно по мере Лебега в $\boldsymbol{R}^n$. Пусть L и δ — постоянные, характеризующие относительную плотность E, которые фигурируют в определении 1. Пусть $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс, $I_k \subset \boldsymbol{R}^n$ — гиперкуб:

$$I_k = \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x_j - k_j L| \leqslant L/2, \qquad (j = 1, \ldots, n)\}.$$

Пусть $E_k = E \cap I_k$. Имеем

$$\inf_k \operatorname{mes}_n(E_k) \geqslant \delta.$$

В этих обозначениях неравенство (5) переписывается так:

$$\sum_k \int\limits_{E_k} u(x)\,dx \leqslant \lambda \sum_k \int\limits_{I_k} u(x)\,dx.$$

[Ис]пользуя лемму 1 с $\eta = \sqrt{\lambda}$, получаем отсюда неравенство

$$\sum_k \int_{I_k} u(x)\,dx \leqslant \sqrt{\lambda} \int_{R^n} u(x)\,dx, \tag{6}$$

суммирование распространен[о] на те k, для которых справед[ли]во неравенство

$$\sqrt{\lambda} \int_{I_k} u(x)\,dx \leqslant \int_{E_k} u(x)\,dx. \tag{7}$$

Те гиперкубы, для которых неравенство (7) не выполняется, [на]зовем «хорошими».

Согласно лемме 4, выполняется неравенство

$$u(x + i\mathbf{1}) \leqslant \exp\left\{\sigma n + \int_{R^n} P(t;\ x,\ \mathbf{1}) \ln u(t)\,dt\right\}, \tag{8}$$

[гд]е $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \boldsymbol{R}^n$.

Используя далее неравенство между средним арифметическим [и] средним геометрическим, получаем

$$\exp\left\{\int_{R^n} P(t;\ x,\ \mathbf{1}) \ln u(t)\,dt\right\} \leqslant \int_{R^n} P(t;\ x,\ \mathbf{1})\, u(t)\,dt. \tag{9}$$

Усилим неравенство (9), показав, что его правую часть, не [на]рушая неравенства, можно умножить на функцию $C(x) \leqslant 1$, [к]оторая при малых λ мала в некоторой окрестности «хороших» [г]иперкубов.

Пусть I_{k_0} — «хороший» гиперкуб, что означает

$$\sqrt{\lambda} \int_{I_{k_0}} u(x)\,dx > \int_{E_{k_0}} u(x)\,dx.$$

Тогда при любом $x \in \boldsymbol{R}^n$ справедливо неравенство

$$\sqrt{\lambda}(1 + L)^{2n} \int_{I_{k_0}} P(t;\ x,\ \mathbf{1})\, u(t)\,dt >$$

$$> \int_{E_{k_0}} P(t;\ x,\ \mathbf{1})\, u(t)\,dt. \tag{10}$$

Действительно,

$$\int_{E_{k_0}} P(t;\ x,\ \mathbf{1})\, u(t)\,dt \leqslant \max_{t \in I_{k_0}} P(t;\ x,\ \mathbf{1}) \int_{E_{k_0}} u(t)\,dt <$$

$$< \sqrt{\lambda} \max_{t \in I_{k_0}} P(t;\ x,\ \mathbf{1}) \int_{I_{k_0}} u(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\lambda}\, \frac{\max\limits_{t \in I_{k_0}} P(t;\ x,\ \mathbf{1})}{\min\limits_{t \in I_{k_0}} P(t;\ x,\ \mathbf{1})} \int_{I_{k_0}} P(t;\ x,\ \mathbf{1})\, u(t)\,dt.$$

Элементарные геометрические соображения показывают, что

$$\frac{\max\limits_{t \in I_{k_0}} P(t;\ x,\ 1)}{\min\limits_{t \in I_{k_0}} P(t;\ x,\ 1)} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{n} \frac{\max\limits_{t \in I_{k_0}} \{(t_j - x_j)^2 + 1\}}{\min\limits_{t \in I_{k_0}} \{(t_j - x_j)^2 + 1\}} < (1 + L)^{2n},$$

что и доказывает (10),

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}\exp\{-2\sigma n\}$. Выберем такое число $l \in (1,\ \infty)$, что при всех k выполняется неравенство

$$\min_{x \in I_k} \int_{U_k} P(t;\ x,\ 1)\,dt \geqslant 1 - \varepsilon, \tag{11}$$

где U_k — гиперкуб, концентрический I_k, с ребрами, в l раз боль шими, чем ребра I_k.

Пусть по-прежнему I_{k_0} — «хороший» гиперкуб. Справедли неравенство

$$\min_{x \in U_{k_0}} \int_{E_{k_0}} P(t;\ x,\ 1)\,dt \geqslant \delta \inf_{\substack{x \in U_{k_0} \\ t \in E_{k_0}}} P(t;\ x,\ 1) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\delta}{\pi^n \prod\limits_{j=1}^{n} \sup\limits_{\substack{x \in U_{k_0} \\ t \in E_{k_0}}} \{(t_j - x_j)^2 + 1\}} \geqslant \frac{\delta}{\pi^n \left\{1 + \left[(l+1)\frac{L}{2}\right]^2\right\}^n}. \tag{12}$$

Определим число $m - 1$ как целую часть числа $\pi^n \Big\{1 + \left[(l+1)\frac{L}{2}\right]^2\Big\}^n \delta^{-1}$. Натуральное число m очевидным образом не зависит ни от функции $u(z)$, ни от величины λ. Из (12) вытекает, что

$$\min_{x \in U_{k_0}} \int_{E_{k_0}} P(t;\ x,\ 1)\,dt > \frac{1}{m}.$$

При любом фиксированном $x \in U_{k_0}$, сужая множество E_{k_0}, можно считать, что

$$\int_{E_{k_0}} P(t;\ x,\ 1)\,dt = \frac{1}{m}.$$

С другой стороны, согласно (10) при любом $x \in \boldsymbol{R}^n$, в частности, и при зафиксированном нами выполняется неравенство

$$\int_{E_{k_0}} P(t;\ x,\ 1)\,u(t)\,dt < \sqrt{\lambda}\,(1 + L)^{2n} \int_{R^n} P(t;\ x,\ 1)\,u(t)\,dt.$$

Можем считать, что $\lambda < m^{-2}(1+L)^{-4n}$ (в противном случае справедливо утверждение теоремы 2 с $C = m^{-2}(1+L)^{-4n}$). Применяя лемму 3, получаем, что при любом $x \in U_{k_0}$

$$\exp\left\{\int_{R^n} P(t;\ x,\ 1)\ln u(t)\,dt\right\} <$$
$$< \left\{\frac{4\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}}{[1+\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}]^2}\right\}^{1/m}\int_{R^n} P(t;\ x,\ 1)\,u(t)\,dt. \qquad (13)$$

Функцию $C(x)$, о которой говорилось в связи с усилением неравенства (9), определим так. Положим ее равной

$$\left\{\frac{4\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}}{[1+\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}]^2}\right\}^{1/m}$$

на каждом гиперкубе U_k, порожденном «хорошим» I_k, и единице в остальных точках $\boldsymbol{R}^n$. Из (13) и вытекает нужное нам усиление неравенства (9):

$$\exp\left\{\int_{R^n} P(t;\ x,\ 1)\ln u(t)\,dt\right\} \leqslant C(x)\int_{R^n} P(t,\ x,\ 1)\,dt. \qquad (14)$$

Вспоминая (8), получаем

$$u(x+i1) \leqslant e^{\sigma n} C(x)\int_{R^n} P(t;\ x,\ 1)\,u(t)\,dt. \qquad (15)$$

Интегрируя неравенство (15) по $\boldsymbol{R}^n$ и учитывая, что $C(x) \leqslant 1$, а значит, и

$$\int_{R^n} P(t;\ x,\ 1)\,C(x)\,dx \leqslant 1,$$

получаем

$$\int_{R^n} u(x+i1)\,dx \leqslant e^{\sigma n}\int_{R^n} C(x)\left\{\int_{R^n} P(t;\ x,\ 1)\,u(t)\,dt\right\}dx =$$
$$= e^{\sigma n}\int_{R^n} u(t)\left\{\int_{R^n} P(t;\ x,\ 1)\,C(x)\,dx\right\}dt \leqslant$$
$$\leqslant e^{\sigma n}\left\{\sum_k{}'\int_{I_k} u(t)\,dt + \sum_k{}''\int_{I_k} u(t)\left\{\int_{R^n} P(t;\ x,\ 1)\,C(x)\,dx\right\}dt\right\}. \qquad (16)$$

Первая сумма $\sum'$ в правой части неравенства (16) распространена на те k, для которых гиперкубы I_k не являются «хорошими». По неравенству (6)

$$\sum_k{}'\int_{I_k} u(t)\,dt \leqslant \sqrt{\lambda}\int_{R^n} u(t)\,dt.$$

Во второй сумме $\sum''$ участвуют те k, для которых гиперкубы I_k «хорошие». Из определения функции $C(x)$ вытекает, что при $t \in I_k$ (I_k — «хороший» гиперкуб) выполняется

$$\int_{R^n} P(t;\ x,\ 1)\, C(x)\, dx \leqslant \left\{\frac{4\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}}{[1+\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}]^2}\right\}^{1/m} \times$$

$$\times \int_{U_k} P(t;\ x,\ 1)\, dx + \int_{R^n \setminus U_k} P(t;\ x,\ 1)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\frac{4\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}}{[1+\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}]^2}\right\}^{1/m} + \varepsilon.$$

Отсюда следует оценка для второй суммы

$$\sum_k{}'' \int_{I_k} u(t) \left\{\int_{R^n} P(t;\ x,\ 1)\, C(x)\, dx\right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\left\{\frac{4\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}}{[1+\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}]^2}\right\}^{1/m} + \varepsilon\right\} \int_{R^n} u(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$\int_{R^n} u(x+i\mathbf{1})\, dx \leqslant e^{\sigma n} \left\{\sqrt{\lambda} + \right.$$

$$\left. + \left\{\frac{4\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}}{[1+\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}]^2}\right\}^{1/m} + \varepsilon\right\} \int_{R^n} u(x)\, dx. \qquad (17)$$

С другой стороны, по лемме 5 (примененной к функции $u(z+i\mathbf{1})$ при $y = -\mathbf{1}$) имеем

$$\int_{R^n} u(x)\, dx \leqslant e^{\sigma n} \int_{R^n} u(x+i\mathbf{1})\, dx. \qquad (18)$$

Сопоставляя (17), (18) и вспоминая, что $\varepsilon = \frac{1}{2} e^{-2\sigma n}$, имеем

$$\frac{e^{-2\sigma n}}{2} \leqslant \sqrt{\lambda} + \left\{\frac{4\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}}{[1+\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}]^2}\right\}^{1/m}$$

Из последнего неравенства следует, что либо $\lambda \geqslant 16^{-1} e^{-4\sigma n}$ либо

$$\left\{\frac{4\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}}{[1+\sqrt{\lambda}\,(1+L)^{2nm}]^2}\right\}^{1/m} \geqslant \frac{1}{4} e^{-2\sigma n}.$$

и, значит,

$$\lambda \geqslant 4^{-2(m+1)} m^{-2} (1+L)^{-4n} e^{-4\sigma nm}.$$

Таким образом, если

$$\lambda < \min\left\{\frac{1}{m^2(1+L)^{2n}},\quad \frac{e^{-4\sigma n m}}{4^{2(m+1)}m^2(1+L)^{4n}}\right\},$$

то неравенство (5) не может выполняться ни для какой логарифмически полисубгармонической функции $u(z)$, $u(x) \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, удовлетворяющей условию (2).

Ознакомившись с изложенными выше результатами, Б. Я. Левин заметил, что теорему 2 можно усилить: заключение этой теоремы остается верным, если в ее условии не требовать, чтобы $u(x) \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$. Это усиление легко вытекает из доказанной нами теоремы 2 и следующей теоремы Б. Я. Левина.

Теорема. (Б. Я Левин). *Если логарифмически полисубгармоническая в $\boldsymbol{C}^n$ функция $u(z)$ удовлетворяет условию (2) при каком-то $\sigma < \infty$ и ограничена сверху на относительно плотном по мере Лебега множестве $E \subset \boldsymbol{R}^n$, то она ограничена сверху на всем $\boldsymbol{R}^n$.*

Эта теорема была сформулирована Б. Я. Левиным в его докладе на Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного, состоявшейся в сентябре 1972 г. в Харькове, как одно из следствий развитой им теории субгармонических мажорант [7]. Впоследствии В. Э. Кацнельсон [6] получил доказательство этой теоремы, основанное на других соображениях. Если ограничиться классом целых функций экспоненциального типа, то утверждение теоремы Б. Я. Левина легко доказывается аппроксимационным методом, развитым одним из авторов настоящей статьи для получения многомерных аналогов теоремы М. Картрайт [8].

Авторы выражают благодарность В. Э. Кацнельсону и Б. Я. Левину за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панеях Б. П. О некоторых теоремах типа Винера — Палея. — «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, № 1, с. 47—50.
2. Панеях Б. П. Некоторые неравенства для целых функций экспоненциального типа и априорные оценки для общих дифференциальных операторов. — «Успехи мат. наук», 1966, т. 21, № 3, с. 75—114.
3. Lax P. An inequality for functions of exponential type. — «Comm. Pure Appl. Math.», 1963, vol. 16, № 2, p. 17—30.
4. Лин В. Я. Об эквивалентных нормах в пространствах преобразований Фурье финитных функций. — «Докл. АН СССР», 1962, т. 144, № 1, с. 40—43.
5. Лин В. Я. Об эквивалентных нормах в пространствах суммируемых с квадратом целых функций экспоненциального типа. — «Мат. сб.», 1965, т. 67, № 4, с. 586—608.
6. Кацнельсон В. Э. Эквивалентные нормы в пространствах целых функций экспоненциального типа. — «Мат. сб.», 1973.
7. Левин Б. Я. — В кн.: Тезисы докл. Всесоюз. конф. по ТФКП. Харьков, 1971, с. 117—120.
8. Логвиненко В. Н. Об одном многомерном обобщении теоремы М. Картрайт. — «Докл. АН СССР», 1973.