УДК 517.512 + 517.521

Н. А. Давыдов, д-р физ.-мат. наук

О ЯДРЕ В СМЫСЛЕ КНОППА СУММЫ СТЕПЕННОГО РЯДА

1. Пусть дан степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{1}$$

сходящийся в промежутке $0 \leqslant x < 1$. Ядром последовательности

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \ (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{2}$$

по Кноппу [2, с. 161] называется пересечение для весх $n = 0, 1, 2, \ldots$ выпуклых оболочек R_n множества точек $S_n, S_{n+1}, \ldots$; при этом выпуклая оболочка R_n содержит бесконечно удаленную точку, если последовательность $\{S_n\}$ не ограничена, и не содержит ее, если эта последовательность ограничена, причем R_n есть вся расширенная комплексная плоскость, если не существует полуплоскости, содержащей всех точек $S_n, S_{n+1}, \ldots$. Ядром суммы $f(x)$ степенного ряда (1), сходящегося в промежутке $0 \leqslant x < 1$, называется [1, с. 77] пересечение для всех $x_0' \in [0;\ 1]$ выпуклых оболочек $K(f;\ x_0')$ множества всех значений $f(x)$ для $x_0' \leqslant x < 1$, причем выпуклая оболочка $K(f;\ x_0')$ содержит бесконечно удаленную точку, если множество значений $f(x)$ для $x_0' \leqslant x < 1$ не ограничено, и не содержит ее, если это множество ограничено, причем $K(f;\ x_0')$ есть вся расширенная комплексная плоскость, если не существует полуплоскости, содержащей всех значений $f(x)$ для $x_0' \leqslant x < 1$.

Известно, что ядро суммы ряда (1), сходящегося в промежутке $0 \leqslant x < 1$, содержится в ядре последовательности (2). Это утверждение есть частный случай общего предложения, принадлежащего Кноппу [2, с. 164]: если преобразование

$$t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k \quad (0 \leqslant x < x_0)$$

последовательности $\{S_n\}$ регулярно и положительно, то ядро функции $t(x)$ содержится в ядре последовательности $\{S_n\}$.

В настоящей работе укажем условия, при выполнении которых сформулированное выше утверждение несколько усиливается.

2. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{n_i}|}{n_i+1} < \infty$, *где* $\{n_i\}$ — *возрастающая последовательность натуральных чисел, то*

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{i=1}^{\infty} S_{n_i} x^{n_i} = 0, \tag{3}$$

в частности, если $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i+1} < \infty$, *то* $\lim\limits_{x \to 1-0} (1-x) \sum\limits_{i=1}^{\infty} x^{n_i} = 0$.

Доказательство. Возьмем функцию $\varphi_i(x) = (1-x) x^{n_i}$ и найдем ее максимум на отрезке [0; 1]. Так как $\varphi_i'(x) = x^{n_i - 1} \times$ $\times [n_i - (n_i + 1) x] = 0$ в точке $x = \frac{n_i}{n_i+1}$, то

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \varphi_i(x) = \varphi_i\left(\frac{n_i}{n_i+1}\right) < \frac{1}{n_i+1}. \tag{4}$$

Из условия леммы следует, что $S_{n_i} = O(n_i)$ и поэтому ряд (3) сходится в промежутке $0 \leqslant x < 1$. Для числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} \frac{|S_{n_i}|}{n_i+1} < \varepsilon$. Используя неравенство (4), найдем

$$\left|(1-x) \sum_{i=1}^{\infty} S_{n_i} x^{n_i}\right| \leqslant (1-x) \sum_{i=1}^{N} |S_{n_i}| x^{n_i} + (1-x) \sum_{i=N+1}^{\infty} |S_{n_i}| x^{n_i} =$$

$$= O(1) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (1-x) x^{n_i} |S_{n_i}| \leqslant O(1) +$$

$$+ \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|S_{n_i}|}{n_i+1} \leqslant O(1) + \varepsilon \ (x \to 1-0$$

Этим лемма доказана.

Обозначим через E множество всех частичных пределов последовательности (2) в расширенной комплексной плоскости Множество E содержит по крайней мере одну точку, конечную или бесконечно удаленную. Конечный частичный предел $a \in E$ назовем частичным пределом первого рода последовательности (2), если существует δ-окрестность $0\ (z : |z-a| < \delta)$ точки a такая, что множество всех членов S_n, попадающих в эту окрестность, — пусть это будут члены $S_{n_i^{(\delta)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — таково, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^{(\delta)} + 1} < \infty$. Конечный частичный предел $a \in E$ назовем частичным пределом второго рода последовательности (2), если он не есть частичный предел первого рода, т. е. если в любую δ-окрестность $0\,(z : |z-a| < \delta)$ точки a попадает такое множество членов S_n, — пусть это будут члены $S_{n_i^{(\delta)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, — что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^{(\delta)} + 1} = \infty$. Бесконечно удаленную точку назовем частичным пределом первого рода последовательности (2), если существует ее R-окрестность $0\,(z : |z| > R)$ такая, что множество всех членов S_n, попадающих в эту окрестность, — пусть это будут члены $S_{n_i^{(R)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, — таково, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{n_i^{(R)}}|}{n_i^{(R)} + 1} < \infty$. Бесконечно удаленную точку назовем частичным пределом второго рода последовательности (2), если он не есть частичный предел первого рода, т. е. если в любую R-окрестность $0\,(z : |z| > R)$ попадает такое множество членов S_n, — пусть это будут члены $S_{n_i^{(R)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, — что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{n_i^{(R)}}|}{n_i^{(R)} + 1} = \infty$.

Лемма 2. У каждой последовательности (2) комплексных чисел есть по крайней мере один частичный предел второго рода.

Доказательство. Если $S_n \to S\ (n \to \infty)$, $S \neq \infty$, то S — частичный предел второго рода. Если $S_n \to \infty\ (n \to \infty)$, то бесконечно удаленная точка является частичным пределом второго рода последовательности $\{S_n\}$. Действительно, для любого $R > 0$ существует номер N такой, что $|S_n| > R$ для всех $n > N$. Поэтому $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{|S_n|}{n+1} \geqslant R \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$. Предположим, что бесконечно удаленная точка есть частичный предел первого рода последовательности $\{S_n\}$. Тогда существует число $R > 0$ такое, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{n_i^{(R)}}|}{n_i^{(R)} + 1} < \infty$, где $|S_{n_i^{(R)}}| > R$ $(i=1, 2, \ldots)$. Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i^{(R)}+1} < \infty$. Поэтому существует бесконечное множество членов $S_{m_i^{(R)}}$ $(i=1, 2, \ldots)$, $\{m_i^{(R)}\} = \{0, 1, 2, \ldots\} \setminus \{n_i^{(R)}\}$, таких, что $|S_{m_i^{(R)}}|$ R $(i=1, 2, \ldots)$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m_i^{(R)}+1} = +\infty$.

Обозначим через E_R множество всех частичных пределов последовательности $\{S_{m_i^{(R)}}\}$. Множество E_R замкнуто, $E_R \subset E$. Покажем, что E_R содержит по крайней мере один частичный предел второго рода последовательности $\{S_n\}$. Ведя доказательство методом рассуждения от противного, допустим, что каждая точка множества E_R есть частичный предел первого рода последовательности $\{S_n\}$. Тогда для каждой точки $z' \in E_R$ существует окрестность $O_{z'}(z: |z-z'| < \delta_{z'})$ этой точки такая, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_i^{(z')}+1} < \infty$, $S_{\nu_i^{(z')}} \in O_{z'}$ $(i=1, 2, \ldots)$. Так как $\sum_R$ — замкнутое ограниченное множество, то по теореме Бореля — Лебега можно выделить конечную систему окрестностей $O_{z_i'}(z: |z-z_i'| < \delta_{z_i'})$ $(i=1, 2, \ldots, p)$, покрывающих множество E_R. Так как

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_i^{(z_1')}+1} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_i^{(z_1')}+1} + \cdots + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_i^{(z_p')}+1} < +\infty$$

и так как вне окрестностей $O_{z_l'}$ $(l=1, 2, \ldots, p)$ может содержаться не более конечного множества членов S_{m_l}, — пусть это будут члены $S_{m_{l_\nu}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, q)$, — то

$$+\infty = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m_l+1} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_i^{(z_1')}+1} + \cdots + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_i^{(z_p')}+1} + $$
$$+ \sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{m_{l_\nu}+1} < +\infty.$$

Получено противоречивое неравенство. Следовательно, множество E_R содержит по крайней мере один частичный предел второго рода последовательности $\{S_n\}$. Если последовательность S_n ограничена, то, допустив, что множество E не имеет ни одного частичного предела второго рода, как и в рассмотренном выше случае, придем к противоречивому неравенству. Лемма доказана.

3. Обозначим через E_2 множество всех частичных пределов второго рода последовательности $\{S_n\}$. По лемме 2 это множество не пустое (оно может состоять из единственной бесконечно удаленной точки комплексной плоскости) и нетрудно видеть, что оно замкнуто в расширенной комплексной плоскости.

Теорема 1. *Если множество E_2 всех частичных пределов второго рода последовательности (2) ограничено, то ядро $\boldsymbol{P}'$ функции (1) содержится в выпуклой оболочке $\boldsymbol{P}$ множества E_2.*

Доказательство. Так как множество E_2 всех частичных пределов второго рода последовательности $\{S_n\}$ ограничено, то бесконечно удаленная точка комплексной плоскости или не является частичным пределом последовательности $\{S_n\}$ (в этом случае последовательность $\{S_n\}$ ограничена) или является ее частичным пределом первого рода. Предположим для определенности, что бесконечно удаленная точка является частичным пределом первого рода. Тогда существует число $R > 0$ такое, что множество всех членов S_n, попадающих в R-окрестность $0(z:|z| > R)$ бесконечно удаленной точки, — пусть это будут члены $S_{n_i^{(R)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, — таково, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{n_i^{(R)}}|}{n_i^{(R)} + 1} < +\infty. \tag{5}$$

По лемме 2 множество E_2 не пусто. Из условия (5) следует сходимость ряда (1) в промежутке $0 \leqslant x < 1$. Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и обозначим через $\boldsymbol{P}_\varepsilon$ замкнутую ε-окрестность множества $\boldsymbol{P}$. В множестве $K(z:|z| \leqslant R) \cap \overline{C\boldsymbol{P}}_\varepsilon$, где CP_ε — дополнение до множества P_ε относительно комплексной плоскости, а $\overline{CP}_\varepsilon$ — его замыкание, могут содержаться лишь частичные пределы первого рода последовательности $\{S_n\}$. Как и при доказательстве леммы 2, убеждаемся в том, что множество всех членов S_n, находящихся вне множества P_ε, таково, что если их записать в порядке возрастания индексов, то получим последовательность $S_{n_i'^{(R)}}$ такую, что

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{n_i'^{(R)}}|}{n_i'^{(R)} + 1} < +\infty$. В последовательность $\{S_{n_i'^{(R)}}\}$ вошли и все члены последовательности $\{S_{n_i^{(R)}}\}$. По лемме 1

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x) \sum_{i=1}^{\infty} |S_{n_i'^{(R)}}| \, x^{n_i'^{(R)}} = 0. \tag{6}$$

Множество всех членов S_n, содержащихся в P_ε, таково, что если их записать в порядке возрастания индексов, то получим подпо-

…овательность $\{S_{m_i^{(R)}}\}$ такую, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i^{(R)}+1} = +\infty, \quad \{m_i^{(R)}\} = \{0, 1, 2, \ldots\} \setminus \{n_i'^{(R)}\}.$$

Так как в силу (6)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = (1-x) \sum_{i=1}^{\infty} S_{n_i'^{(R)}} x^{n_i'^{(R)}} +$$

$$+ (1-x) \sum_{i=1}^{\infty} S_{m_i^{(R)}} x^{m_i^{(R)}} = (1-x) \sum_{i=1}^{\infty} S_{m_i^{(R)}} x^{m_i^{(R)}} + O(1) \ (x \to 1-0),$$

то ядро P' функции $f(x)$ совпадает с ядром P^* функции $f^*(x) = (1-x) \sum_{i=1}^{\infty} S_{m_i^{(R)}} x^{m_i^{(R)}}$.

В работе [2, с. 168] это доказано для ядер последовательностей $\{S_n\}$ и $\{S_n'\}$ таких, что $|S_n - S_n'| \to 0 \ (n \to \infty)$.

Для ядер функций $f(x)$ и $f^*(x)$, $|f(x) - f^*(x)| \to 0 (x \to 1-0)$ доказательство аналогично и здесь не приводится.

Так как $(1-x) \sum_{i=1}^{\infty} x^{m_i^{(R)}} \to 1 \ (x \to 1-0)$, то последовательность функций $(1-x) x^{m_i^{(R)}}$ определяет некоторый положительный регулярный метод суммирования рядов. Поэтому ядро P^* функции $f^*(x) = (1-x) \sum_{i=1}^{\infty} S_{m_i^{(R)}} x^{m_i^{(R)}}$ в силу теоремы Кноппа [2, с. 164] содержится в ядре P_* последовательности $\{S_{m_i^{(R)}}\}$. Но из $S_{m_i^{(R)}} \in P_\varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots)$ следует $P_* \subset P_\varepsilon$. Таким образом, $P' = P^* \subset P_* \subset P_\varepsilon$. Отсюда в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ и замкнутости множеств P' и $P \subset P_\varepsilon$ получаем $P' \subset P$. В случае, когда последовательность $\{S_n\}$ ограничена, доказательство аналогично. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если множество всех частичных пределов второго рода последовательности (2) состоит из одной точки S и если $S \neq \infty$, то* $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$.

Следствие 2. *Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является частичным пределом первого рода последовательности (2), то*

$$\overline{\lim_{x \to 1-0}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| \leqslant \max_{z \in E_2} |z|,$$

где E_2 — множество всех частичных пределов второго рода последовательности (2).

В самом деле, все предельные значения функции $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ при $x \to 1-0$ содержатся в ядре P' этой функции [2, с. 161]. Отсюда и из теоремы 1 вытекает справедливость следствий 1, 2.

4. Конечные частичные пределы первого и второго рода для последовательности действительных чисел определим так же, как и для последовательности чисел комплексных. Бесконечно удаленную точку $+\infty$ (соответственно $-\infty$) действительной оси назовем частичным пределом первого рода последовательности действительных чисел $\{S_n\}$, если существует R-окрестность $O(x : x > R)$ (соответственно $O(x : x < -R)$) этой точки такая, что множество всех членов S_n, попадающих в эту окрестность, — пусть это будут члены $S_{n_i^{(R)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, — таково, что $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{n_i^{(R)}}|}{n_i^{(R)} + 1} < +\infty$. Бесконечно удаленную точку $+\infty$ (соответственно ∞) назовем частичным пределом второго рода последовательности действительных чисел $\{S_n\}$, если она является ее частичным пределом, но не является частичным пределом первого рода.

Теорема 2. *Если a^n — действительные числа и* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 1$ *то* $C_1 \leqslant \underline{\lim\limits_{x \to 1-0}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leqslant \overline{\lim\limits_{x\to 1-0}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leqslant C_2$, где C_1 — *наименьший а C_2 — наибольший частичный предел второго рода последовательности (2), в частности, если $+\infty$ является единственным частичным пределом второго рода последовательности (2), то* $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = +\infty$.

В случае, когда C_1 и C_2 — конечные числа, теорема 2 является следствием теоремы 1. Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1 и мы его здесь приводить не будем. Впрочем, эта теорема является частным случаем нижеследующей теоремы 3, которой будет дано полное доказательство.

5. Следствие 1 из теоремы 1, вообще говоря, не распространяется на случай, когда $S = \infty$, хотя для действительных последовательностей, как это видно из теоремы 2, оно верно. Из нижеследующей теоремы 3 будет видно, при каких условиях это следствие будет справедливым и для $S = \infty$.

Пусть G — замкнутое выпуклое неограниченное множество в комплексной плоскости, отличное от всей комплексной плоскости. Бесконечный частичный предел последовательности комплексных чисел $\{S_n\}$ назовем частичным пределом первого рода относительно дополнения CG множества G до комплексной плоскости, если существует такое число $R > 0$, что множество всех членов S_n, для которых $|S_n| > R$, $S_n \notin G \cap O(z:|z| > R)$, — пусть это будут члены $S_{n_i^{(R)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, — таково, что $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{n_i^{(R)}}|}{n_i^{(R)} + 1} < \infty$. Последовательность комплексных чисел $\{S_n\}$ назовем ограниченной относительно дополнения CG, если существует такое число $R > 0$, что множество $CG \cap O(z:|z| > R)$ не содержит членов S_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Теорема 3. *Пусть G — выпуклое неограниченное множество, [...]кнутое в расширенной комплексной плоскости и пусть ряд (1) [...]ится в промежутке $0 \leqslant x < 1$. Пусть каждый конечный [...]ичный предел второго рода последовательности (2) содержится в G, а бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является для этой последовательности частичным пределом второго рода. Если бесконечно удаленная точка для последовательности $\{S_n\}$ является частичным пределом первого рода относительно дополнения CG или эта последовательность ограничена относительно CG, то ядро P' функции (1) содержится в G, $P' \subset G$. Если при этом бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является единственным частичным пределом второго рода последовательности (2) и G содержится в угле раствора $\alpha < \pi$, то $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \infty$.*

Доказательство. Пусть для определенности бесконечно удаленная точка является частичным пределом второго рода последовательности (2) и ее частичным пределом первого рода относительно дополнения CG. Тогда для всех достаточно больших R, $R \geqslant R_0$, множество всех членов S_n, для которых $S_n \in G \cap O \times (z:|z| > R)$, — пусть это будут члены $S_{m_i^{(R)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, — таково, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{m_i^{(R)}}|}{m_i^{(R)} + 1} = \infty. \tag{7}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим через G_ε замкнутую ε-окрестность множества G, $G_\varepsilon \supset G$. Рассмотрим множество всех тех членов S_n, для которых $|S_n| \leqslant R$, $S_n \notin G_\varepsilon$. Пусть это будут члены $S_{n_i^{(R)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Как и при доказательстве леммы 2, можно показать, что $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^{(R)} + 1} < +\infty$. Это множество членов может быть конечным и даже пустым. Члены последовательности $\{S_{n_i^{(R)}}\}$ вместе с членами последовательности $\{S_{\nu_i^{(R)}}\}$, которые попадают в $CG_\varepsilon \cap O \times (z : |z| > R)$, если их записать в порядке возрастания индексов, образуют некоторую последовательность $\{S_{p_i^{(R)}}\}$, такую, что $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{p_i^{(R)}}|}{p_i^{(R)}+1} < \infty$. Множество этих членов может быть конечным и даже пустым. По лемме 1

$$\lim_{x\to 1-0} (1-x) \sum_{i=1}^{\infty} |S_{p_i^{(R)}}| x^{p_i^{(R)}} = 0. \tag{8}$$

Члены последовательности $\{S_n\}$, попадающие в G_ε, если их записать в порядке возрастания индексов, образуют некоторую последовательность $\{S_{q_i^{(R)}}\}$, для которой в силу (7) будет справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{q_i^{(R)}}|}{q_i^{(R)}+1} = \infty, \quad \{q_i^{(R)}\} = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} \setminus \{p_i^{(R)}\}.$$

Так как в силу (8)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = (1-x) \sum_{i=1}^{\infty} S_{p_i^{(R)}} x^{p_i^{(R)}} +$$

$$+ (1-x) \sum_{i=1}^{\infty} S_{q_i^{(R)}} x^{q_i^{(R)}} = (1-x) \sum_{i=1}^{\infty} S_{q_i^{(R)}} x^{q_i^{(R)}} + O(1) \quad (x \to 1-0),$$

то ядро P' функции $f(x)$ совпадает с ядром функции $f^*(x) = (1-x) \sum_{i=1}^{\infty} S_{q_i^{(R)}} x^{q_i^{(R)}}$. Из равенства (8) следует, что $(1-x) \times \sum_{i=1}^{\infty} x^{p_i^{(R)}} \to 0 \ (x \to 1-0)$. Поэтому $(1-x) \sum_{i=1}^{\infty} x^{q_i^{(R)}} \to 1 \ (x \to 1-0)$.

Последовательность функций $(1-x)\, x^{q_i^{(R)}}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$ определяет некоторый положительный регулярный метод суммирования рядов. По теореме Кноппа [2, с. 164] ядро P^* функции $f^*(x)$ содержится в ядре P_* последовательности $\{S_{q_i^{(R)}}\}$, $P' = P^* \subset P_*$. Из $S_{q_i^{(R)}} \in G_\varepsilon$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$ в силу выпуклости G_ε следует включение $P_* \subset G_\varepsilon$. Поэтому $P' = P^* \subset P_* \subset G_\varepsilon$. Отсюда в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ и замкнутости множеств P' и G получаем $P' \subset G$. В случае, когда при достаточно большом $R > 0$ множество $CG \cap O(z : |z| > R)$ не содержит членов S_n, доказательство аналогично приведенному.

Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является единственным частичным пределом второго рода последовательности $\{S_n\}$ и G содержится в угле раствора $\alpha < \pi$, то P' будет содержать только бесконечно удаленную точку. Действительно, обозначим через $G^{(r)} = (G \setminus D^{(r)}) \cup F_r$, где $D^{(r)}$ — равнобедренный треугольник, вершина которого лежит в вершине угла, содержащего G, и боковые стороны которого длины r лежат на сторонах этого угла, F_r — основание треугольника $D^{(r)}$, $G^{(r)}$ — выпуклое неограниченное множество, замкнутое в расширенной комплексной плоскости. Так как бесконечно удаленная точка является единственным частичным пределом второго рода последовательности $\{S_n\}$, то при любом (как угодно большом) $r > 0$ во множестве $G_\varepsilon^{(r)}$, где $G_\varepsilon^{(r)}$ — ξ-замкнутая ε-окрестность множества $G^{(r)}$, будет попадать такое множество членов S_n, — пусть это будут члены $S_{q_i^{(r)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, — что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{q_i^{(R)}}|}{q_i^{(R)} + 1} = \infty$. Все остальные члены S_n образуют последовательность $S_{p_i^{(r)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, для которой $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{p_i^{(R)}}|}{p_i^{(r)} + 1} < \infty$. Поэтому ядро $P_*^{(r)}$ последовательности $\{S_{q_i^{(r)}}\}$ будет содержаться в $G_\varepsilon^{(r)}$. Так как $P' \subset P_*^{(r)} \subset G_\varepsilon^{(r)}$ при любом $r > 0$, то P' состоит из одной бесконечно удаленной точки. Предельные значения функции $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ при $x \to 1 - 0$ содержатся в ядре этой функции, поэтому $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum\limits_{n=0} a_n x^n = \infty$. Теорема доказана.

Пусть E_2 — множество всех частичных пределов второго рода последовательности комплексных чисел S_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Пусть G — замкнутая полуплоскость, содержащая все конечные точки множества E_2, причем G содержит бесконечно удаленную точку, если E_2 — неограниченное множество, и не содержит ее, если E_2 — ограниченное множество (множество конечных точек множества E_2 при этом может быть пустым). Пусть далее последовательность $\{S_n\}$ или ограничена относительно CG (дополнения) или бесконечно удаленная точка комплексной плоскости для этой последовательности является частичным пределом первого рода относительно CG. Тогда пересечение всех таких замкнутых полуплоскостей G назовем выпуклой оболочкой множества E_2. Если не существует ни одной такой замкнутой полуплоскости G, то выпуклой оболочкой множества E_2 назовем всю расширенную комплексную плоскость.

Теоремы 1—3 содержатся в следующем общем предложении.

Теорема 4. *Ядро в смысле Кноппа суммы степенного ряда (1), сходящегося в промежутке $0 \leqslant x < 1$, содержится в выпуклой оболочке множества E_2 всех частичных пределов второго рода последовательности (2).*

Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является единственным частичным пределом второго рода последовательности (2) и если существует замкнутое выпуклое неограниченное множество G, содержащееся в угле раствора меньше π, относительно дополнения CG которого последовательность (2) ограничена или бесконечно удаленная точка для $\{S_n\}$ является частичным пределом первого рода, и если ряд (1) сходится в промежутке $0 \leqslant x < 1$, то $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \infty$.

Справедливость теоремы 4 следует из теорем 1 и 3.

6. С помощью леммы 1 и известных граничных теорем единственности для аналитических функций можно получить любопытные следствия, касающиеся нулей частных сумм степенного ряда на границе его круга сходимости. Сформулируем одно из таких следствий.

Следствие 3. *Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в круге $|z| < 1$, причем по крайней мере один из коэффициентов a_n отличен от нуля и пусть сумма $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ почти всюду на окружности $\Gamma(z : |z| = 1)$ имеет угловые граничные значения. Обозначим через $S_n(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \zeta^k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где $\zeta \in \Gamma$. Пусть $S_n(\zeta) = 0$ для всех $n \geqslant n_0^{(\zeta)}$, $n \neq n_i^{(\zeta)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где $n_i^{(\zeta)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда почти для всех $\zeta \in \Gamma$ справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|S_{n_i^{(\zeta)}}(\zeta)|}{n_i^{(\zeta)} + 1} = \infty.$$

Действительно, если бы $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{|S_{n_i^{(\zeta)}}(\zeta)|}{n_i^{(\zeta)} + 1} < \infty$ для всех $\zeta \in E \subset \Gamma$, $\operatorname{mes} E > 0$, то, обозначив через $r = |z|$, получим $z = r\zeta$, $\zeta \in \Gamma$ $0 < r < 1$ в силу леммы 1

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n r^n = (1 - r) \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\zeta) r^n =$$

$$= (1 - r) \sum_{i=1}^{\infty} S_{n_i^{(\zeta)}}(\zeta) r^{n_i^{(\zeta)}} \to 0 \ (r \to 1 - 0)$$

для каждой точки $\zeta \in E$, т. е. на множестве $E \subset \Gamma$, $\operatorname{mes} E > 0$ радиальные граничные значения функции $f(z)$ равны нулю. Тогда в силу условия следствия на множестве E будут равны нулю и угловые граничные значения. Но тогда по известной теореме [3, с. 287] $f(z) \equiv 0$, что противоречит одному из условий следствия. Этим следствие 4 доказано.

7. Пусть $G_n^{(\alpha)}$ — средние Чезаро порядка $\alpha > 0$ для последовательности (2). Частичные пределы последовательности $\{G_n^{(\alpha)}\}$ можно разбить на частичные пределы первого и второго рода так, как это мы сделали с частичными пределами последовательности $\{S_n\}$, и для них получить теоремы, аналогичные теоремам 1—4 настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., Изд-во иностр, лит., 1951. 504 с.
2. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., Гостехиздат, 1960, 470 с.
3. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М. — Л., Гостехиздат, 1950. 336 с.