УДК 517.535.53

Б. О. Гыжа

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРИИ АЛЬФОРСА НАКРЫВАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ*

Предполагается, что читатель знаком с основными положениями теории Альфорса накрывающих поверхностей [1—3]. Пусть F — риманова поверхность, на которую мероморфная в $\{|z|<R\leqslant\infty\}$ функция $w=f(z)$ с неограниченной характеристикой $T(r)$ взаимно однозначно отображает $\{|z|<R\}$, F_r — образ круга $\{|z|<r\}$, $r<R$ на поверхности F; $L(r)$ — длина границы F_r, измеренная в сферической метрике; $S(r)$ — среднее число листов F_r. Возьмем в замкнутой w-плоскости $q\geqslant 3$ жордановых областей a_k, замыкания которых попарно не пересекаются (области могут вырождаться в точки). Связные компоненты полного прообраза a_k, полностью содержащиеся в $\{|z|<r\}$, называются островами. Их число обозначается через $\bar{n}(r,\ a_k)$. В теории накрывающих поверхностей Альфорса получено неравенство

$$\sum_{k=1}^{q}\bar{n}(r,\ a_k)\geqslant(q-2)S(r)+O(L(r)). \tag{1}$$

Разделив (1) на r и проинтегрировав от $r_0>0$ до r, получим

$$\sum_{k=1}^{q}\overline{N}(r,\ a_k)\geqslant(q-2)T(r)+Q(r), \tag{2}$$

где

$$\overline{N}(r,\ a_k)=\int_{r_0}^{r}\bar{n}(t,\ a_k)\,d\ln t;$$

$$Q(r)=O(\lambda(r)),\ r\to R;$$

$$\lambda(r)=\int_{r_0}^{r}L(t)\,d\ln t.$$

Достаточно точную оценку остаточного члена $Q(r)$ через $T(r)$ в случае $R=\infty$ получил Дингхас ([4] или [3, с. 390—394]), но его метод, как отмечает Стоилов [3, с. 390], на случай $R<\infty$ не переносится. Дюфренуа [5] и Ли Ке-цюнь [6] в случае $R=1$ получили лишь, что $\varliminf_{r\to 1}\lambda(r)/T(r)=0$. Покажем, что метод, примененный недавно Майлзом [7] в случае $R=\infty$, имеет то преимущество

* Данная заметка представляет собой извлечение из дипломной работы, защищенной в 1972 г. во Львовском университете впоследствии трагически погибшим Богданом Орестовичем Гыжей (1950—1973). Основные результаты дипломной работы Б. О. Гыжа опубликовал в журнале «Докл. АН УССР», 1973, № 4, с. 296—298. Настоящая публикация подготовлена А. А. Гольдбергом.

перед методом Дингхаса, что он переносится на случай $R=1$ и дает довольно точную оценку остаточного члена $Q(r)$.

Оценим $\lambda(r)$. Известно [3, с. 392], что

$$L(r) \leqslant \pi(2rS'(r))^{1/2}.$$

Используя это неравенство и неравенство Коши—Буняковского получаем

$$\lambda(r) \leqslant \pi\sqrt{2}\int_{r_0}^{r}\frac{(tS'(t))^{1/2}}{t}\,dt \leqslant \pi\sqrt{2}\left(\int_{r_0}^{r}\frac{S'(t)}{S(t)}\,dt\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int_{r}^{r}\frac{S(t)}{t}\,dt\right)^{1/2} \leqslant \pi\sqrt{2}\,(\ln S(r))^{1/2}\,T^{1/2}(r), \qquad (3)$$

где r_0 выбрано так, что $S(r_0)=1$. Если порядок $T(r)$ конечный, то $\ln S(r) = O(-\ln(1-r))$, $r\to 1$ и $\lambda(r) = O\left(\sqrt{T(r)\ln\frac{1}{1-r}}\right)$ при $r\to 1$. В случае бесконечного порядка обозначим $E=[r_0, 1)\cap\cap\{r: T^2(r) < (1-r)^2 T'(r)\}$. Тогда

$$\int_E d\left(\frac{1}{1-r}\right) \leqslant \int_{r_0}^{1} T'(t)\,T^{-2}(t)\,dt = T^{-1}(r_0) < \infty.$$

Если $r\overline{\in} E$, то $T^2(r) \geqslant (1-r)^2 T'(r)$. Следовательно,

$$\ln S(r) = \ln(rT'(r)) \leqslant 2\ln\frac{1}{1-r} + 2\ln T(r). \qquad (4)$$

Подставив (4) в (3), получим

$$Q(r) = O(\lambda(r)) = O\left(\sqrt{\left[\ln T(r) + \ln\frac{1}{1-r}\right]T(r)}\right)$$

при $r\to 1$, $r\overline{\in} E$.

В теории Неванлинны [2] в (2) получена более точная оценка остаточного члена

$$Q(r) = O\left(\ln\frac{1}{1-r} + \ln T(r)\right), \quad r\to 1,$$

причем в случае, когда $T(r)$ имеет бесконечный порядок, исключается множество E значений r такое, что $\int_E d\left(\frac{1}{1-r}\right) < \infty$. Однако во второй основной теореме Неванлинны за a_k можно брать только точки, а не области, как в нашем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альфорс Л. К теории поверхностей наложения. — «Успехи мат. наук», 1939, т. 6, с. 222—250.
2. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М.—Л., Гостехиздат, 1941. 388 с.
3. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. Т. 2. М., Изд-во иностр. лит. 1962. 416 с.
4. Dinghas A. Eine Bemerkung zur Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen. — «Math. Z.», 1939, Bd. 44, S. 568—572.
5. Dufresnoy J. Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algebroïde. — «Ann. Ecole norm. sup.», 1941, t. 58, p. 179—259.
6. Ли Ке-цюнь. Об обобщении некоторых результатов теории распределения значений мероморфных функций. — «Шусюэ сюэбао», 1953, т. 3, № 2, с. 87—100.
7. Miles J. A note on Ahlfors' theory of covering surfaces. — «Proc. Amer. Math. Soc.», 1969, vol. 21, N 1, p. 30—32.