УДК 513.88

С. М. Гутман

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НОРМАХ В НЕКОТОРЫХ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ *B*-ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X банахово пространство; X^* — его сопряженное. Известно [1, 2], что если X^* сепарабельно, то в X можно ввести эквивалентную норму $\| \ \|_1$, обладающую следующими свойствами:

1) новая норма дифференцируема по Фреше;

2) X^* относительно сопряженной нормы локально равномерно выпукло.

Цель настоящей работы — получить некоторое обобщение этих фактов на несепарабельные пространства.

Определение 1. *Банахово пространство X называется гладким, если каждому отличному от нуля элементу $x \in X$ можно сопоставить единственный опорный в этой точке функционал $f \in X^*$ (градиент нормы в точке x), т. е. линейный функционал, удовлетворяющий условиям*

$$\| f \| = 1; \quad f(x) = \| x \|.$$

Определение 2. *Банахово пространство X обладает свойством* $\boldsymbol{A}$, *если X гладко и из*

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0, \quad \{x_n\}_1^\infty \in X$$

следует, что последовательность соответствующих опорных фукционалов сходится слабо (в топологии $\sigma(X^*, X^{**})$):

$$F(f_n) \to F(f) \ \ \forall F \in X^{**}.$$

Такие пространства были впервые рассмотрены Таконом [3].

Основными результатами этой статьи являются

Теорема 1. *Пусть X — $\boldsymbol{B}$-пространство со свойством $\boldsymbol{A}$. Тогда X^* изоморфно локально равномерно выпуклому пространству.*

Теорема 2. *Пусть X — $\boldsymbol{B}$-пространство со свойством $\boldsymbol{A}$, содержащее слабо компактное фундаментальное подмножество. Тогда в X можно ввести эквивалентную норму, дифференцируемую по Фреше.*

При доказательстве теорем 1 и 2 будут использованы следующие результаты, полученные в работах [3, 4].

Предложение 1. (Троянский [4]). *Пусть в B-пространстве X существует последовательность (вообще говоря, трансфинитная) линейных ограниченных операторов $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$, отображающих X в себя так, что*

a) $T_0 = 0$;

в) *множество* $A(x, \varepsilon) = \{\alpha \in A : \| (T_{\alpha+1} - T_\alpha) x \| > \varepsilon (\| T_{\alpha+1} \| + \| T_\alpha \|)\}$ *конечно для любых* $x \in X$, $\varepsilon > 0$;

c) $x \in Y_x$; $Y_x = \overline{\operatorname{sp}} \{(T_{\alpha+1} - T_\alpha) X\}_{\alpha \in A(x)}$, *где* $A(x) = \bigcup_{\varepsilon > 0} A(x, \varepsilon)$;

d) $\operatorname{dens} [(T_{\alpha+1} - T_\alpha) X] \leqslant \omega$, *и пусть существует линейный ограниченный оператор T, отображающий взаимно однозначно X в $C_0(B)$, где B-некоторое множество.*

Тогда X изоморфно локально равномерно выпуклому пространству.

Предложение 2. (Такон [3]). *Пусть X — B-пространство со свойством A, μ — первый ординал мощности* $\operatorname{dens} X$. *Тогда для каждого α $(\omega \leqslant \alpha \leqslant \mu)$ существует пространство X_α* в X, $\operatorname{dens} X_\alpha \leqslant \bar{\bar{\alpha}}$, *вместе с линейным оператором $\widetilde{P}_\alpha : X_\alpha^* \to X^*$ таким, что $P_\alpha = \widetilde{P}_\alpha i^*$ (i — оператор вложения X_α в X) является ограниченным линейным проектором: $P_\alpha : X^* \to X^*$. При этом выполняются условия*

1) $\| P_\alpha \| = 1$;

2) $P_\alpha X^* = \overline{D_{X^*}(X_\alpha)}$, *где $D_{X^*}(X_\alpha)$ — множество функционалов из X^*, достигающих своей нормы на X_α; $P_\alpha X^*$ изометрично X_α^**;

3) $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = P_\beta$, *где* $\beta < \alpha$;

4) $\bigcup_{\alpha<\gamma} P_{\alpha+1} X^*$ *плотно в $P_\gamma X^*$ для каждого* $\omega < \alpha < \mu$ *и* $\omega < \gamma \leqslant \mu$.

Предложение 3. (Такон [3]). *Пусть X — B-пространство со свойством A. Тогда существует множество Γ и ограниченный взаимно-однозначный линейный оператор T: $X^* \to c_0(\Gamma)$.*

Следующие три леммы также получены Таконом [3].

Лемма 1. *Пусть X — B-пространство со свойством A. Тогда* $\operatorname{dens} X = \operatorname{dens} X^*$.

Лемма 2. *Пусть $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — множество подпространств B-пространства X со свойством A таких, что $Y_\alpha \subset Y_\beta \subset X$ для $\alpha < \beta$.*

Тогда $D_{X^*}(\overline{\bigcup_{\alpha<\gamma} Y_\alpha}) = \overline{\bigcup_{\alpha<\gamma} D_{X^*}(Y_\alpha)}$, $\omega < \gamma < \mu$, *если только* $\overline{\bigcup_{\alpha<\gamma} D_{X^*}(Y_\alpha)}$ — *подпространство.*

Лемма 3. *Пусть X — B-пространство со свойством A и пусть $\{P_\alpha;\ \omega \leqslant \alpha < \mu\}$ — множество проекций, такое как в предложении 2. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ и $f \in X^*$ — множество $\{\alpha : \| (P_{\alpha+1} - P_\alpha) f \| \geqslant \varepsilon\}$ — конечно.*

Прежде чем перейти к доказательству теорем 1 и 2, докажем несколько лемм.

Лемма 4. *Пусть X — гладкое банахово пространство, $P : X \to X$ — проектор, $\| P \| = 1$. Тогда $P^*X^* = \overline{D_{X^*}(PX)}$, где $D_{X^*}(PX)$ — множество функционалов из X^*, достигающих своей нормы на PX.*

Доказательство. Пусть $f \in D_{X^*}(PX)$, $f(x_0) = \| x_0 \| = \| f \| = 1$. В силу гладкости пространства X

$f(x) = f(PX) \Rightarrow f(x) = (P^*f)(x) \Rightarrow f \in P^*X^*$, т. е. $D_{X^*}(PX) \subset P^*X^*$.

Обратно, пусть $f \in P^*X^*$, тогда $f(x) = f(PX) = \tilde{f} \in (PX)^*$.

По теореме Бишопа—Фелпса $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{g}$ — опорный функционал, $\tilde{g} \in (PX)^*$, $\|\tilde{g} - f(PX)^*\| < \varepsilon$. Определим $g(x) = \tilde{g}(Px)$. Тогда $g(x) \in D_{X^*}(PX)$, $\| f - g \| = \| \tilde{f} - \tilde{g} \|_{(PX)^*} < \varepsilon$. Следовательно, $f \in \overline{D_{X^*}(PX)}$ и $P^*X^* = \overline{D_{X^*}(PX)}$, что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Пусть X — банахово пространство со свойством A и X содержит слабо компактное фундаментальное подмножество. Тогда в X^* существует множество проекторов $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ таких, что*

1) $P_\alpha : X^* \to X^*$, $\| P_\alpha \| = 1$, $\omega \leqslant \alpha < \mu$;
2) $\operatorname{dens} P_\alpha X^* \leqslant \alpha$;
3) $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = P_\beta$ *при* $\beta < \alpha$;
4) $\bigcup_{\beta<\alpha} P_{\beta+1} X^*$ *плотно в* $P_\alpha X^*$ $\forall \alpha > \omega$;
5) $P_\alpha = R_\alpha^*$, *где* R_α — *проектор;* $R_\alpha : X \to X$.

Доказательство. В [5] показано, что X содержит множество проекторов $\{R_\alpha\}_{\alpha \in A}$ таких, что :

1) $\| R_\alpha \| = 1$ при $\omega < \alpha < \mu$, $\overline{\overline{\mu}} = \operatorname{dens} X$, $R_\alpha : X \to X$;
2) $\operatorname{dens} R_\alpha X \leqslant \overline{\overline{\alpha}}$;
3) $R_\alpha R_\beta = R_\beta R_\alpha = R_\beta$ при $\beta < \alpha$;
4) $\bigcup_{\beta<\alpha} R_{\beta+1} X$ плотно в $R_\alpha X$ $\forall \alpha > \omega$.

В качестве искомых проекторов выберем $P_\alpha = R_\alpha^*$, тогда 1) и 3) — очевидны, 2) следует из леммы 1, 4) — из лемм 4 и 2, что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Пусть X — банахово пространство со свойством A, содержащее слабо компактное фундаментальное подмножество. Тогда существует множество Γ и линейное ограниченное взаимно-однозначное отображение $T\colon X^* \to c_0(\Gamma)$ такое, что из $f_\xi \xrightarrow{w^*} f$, $f_\xi \in X^*$ следует $(Tf_\xi)(\gamma) \to (Tf)(\gamma)$ $\forall \gamma \in \Gamma$.*

Доказательство. Применим метод трансфинитной индукции. Пусть $\operatorname{dens} X = \omega$. Определим T следующим образом: $(Tf)(n) = \{f(x_n)/n\}$, где $\{x_n\}_1^\infty$ — всюду плотное множество в X.

Если $\operatorname{dens} X = M$, то можно предположить, что лемма выполняется для всех кардинальных чисел, меньших, чем M.

Пусть $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — проекторы, построенные в лемме 5. В силу индуктивного предположения существуют множества Γ_α и операторы $\tau_\alpha : P_\alpha X^* \to c_0(\Gamma_\alpha)$. При этом можно считать, что $\|\tau_\alpha\| \leqslant 1$. Определим множество $\Gamma = N \bigcup [\bigcup\limits_\alpha \Gamma_{\alpha+1}]$, $\omega \leqslant \alpha < \mu$ и оператор T на нем:

$$(Tf)(n) = (\tau_\omega P_\omega f)(n);$$

$$(Tf)(\gamma) = {}^1/_2 \cdot (\tau_{\alpha+1}(P_{\alpha+1} f - P_\alpha f)(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma_{\alpha+1}.$$

По лемме 3 множество $\{\alpha : \|(P_{\alpha+1} - P_\alpha) f\| \geqslant \varepsilon\}$ конечно $\forall f \in X^*$ и каждого $\varepsilon > 0$. Поэтому T отображает X^* в $c_0(\Gamma)$. Очевидно, что T-линейный оператор, $\|T\| \leqslant 1$. Если $Tf = 0$, то $P_\omega f = 0$, $P_{\alpha+1} f = P_\alpha f$ для $\omega \leqslant \alpha < \mu$. Так как $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} P_\beta X^*$ плотно в $P_\alpha X^*$ для каждого предельного $\alpha > \omega$, то по трансфинитной индукции следует, что $P_\alpha f = 0$ $\forall \alpha < \mu$, но $\bigcup P_\alpha X^*$ плотно в X^*, так что $f = 0$.

Следовательно, T—взаимно-однозначный оператор. Если $f_\xi \xrightarrow{w^*} f$, то $P_\alpha f_\xi \xrightarrow{w^*} P_\alpha f$, так как P_α — сопряженный оператор; следовательно (по предложению индукции), $\tau_{\alpha+1} P_{\alpha+1} f_\xi \xrightarrow{w^*} \tau_{\alpha+1} P_{\alpha+1} f$ и $1/2 (\tau_{\alpha+1} (P_{\alpha+1} - P_\alpha) f_\xi)(\gamma) \underset{\xi}{\to} 1/2 (\tau_{\alpha+1} (P_{\alpha+1} - P_\alpha) f)(\gamma)$ $\forall \gamma \in \Gamma_{\alpha+1}$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. В силу предложения 1 достаточно построить операторы $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$, так как отображение T, требуемое предложением 1, существует в X^* по предложению 3.

Воспользуемся методом трансфинитной индукции.

Если $\operatorname{dens} X = \omega$, то положим $T_0 = 0$, $T_1 = I(T_1 : X^* \to X^*)$. Пусть $\operatorname{dens} X = M$ Тогда в X^* существуют проекторы $\{P_\nu\}_{\nu<\mu}$ (предложение 2).

Так как $\operatorname{dens} P_\nu X^* < M$ $\forall \nu < \mu$, то, по предположению индукции, в $P_{\nu+1} X^*$ существуют операторы $\{S_\beta^\nu\}_{\beta \in B_\nu}$ с необходимыми свойствами, поскольку $P_{\nu+1} X^*$ изометрично $X_{\nu+1}^*$. Обозначим через A множество всех пар вида (γ, β), $\beta \in B_\gamma$, $\gamma \leqslant \mu$.

Если $\alpha \in A$, то через φ и ψ будем обозначать соответственно его первый и второй индексы. Будем считать, что $\alpha_1 > \alpha_2$, если $\varphi_1 > \varphi_2$, либо $\varphi_1 = \varphi_2$, $\psi_1 > \psi_2$. Определим операторы T_α формулой

$$T_\alpha = S_\psi^\varphi (P_{\varphi+1} - P_\varphi) + P_\varphi.$$

Очевидно, что $\operatorname{dens}[(T_{\alpha+1}-T_\alpha)X^*]\leqslant\omega$. Покажем, что множество $A(f,\varepsilon)$ конечно для любых $f\in X^*$ и $\varepsilon>0$. Рассмотрим множество $C=\{\alpha\in A:\varphi\in\{\alpha':\|(P_{\alpha'+1}-P_{\alpha'})(f)>\varepsilon\},\ \psi\in B_\varphi[(P_{\varphi+1}-P_\varphi)(f),\varepsilon]\}$. По лемме 3, это множество конечно и для $\alpha\overline{\in}C$:

$$\frac{\|(T_{\alpha+1}-T_\alpha)f\|}{\|T_{\alpha+1}\|+\|T_\alpha\|}=\frac{\|(S^\varphi_{\psi+1}-S^\varphi_\psi)(P_{\varphi+1}-P_\varphi)f\|}{\|S^\varphi_{\psi+1}(P_{\varphi+1}-P_\varphi)\|+\|S^\varphi_\psi(P_{\varphi+1}-P_\varphi)\|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\|(S^\varphi_{\psi+1}-S^\varphi_\psi)(P_{\varphi+1}-P_\varphi)f\|}{\|P_{\varphi+1}-P_\varphi\|(\|S^\varphi_{\psi+1}\|+\|S^\varphi_\psi\|)}\leqslant\frac{\varepsilon}{\|P_{\varphi+1}-P_\varphi\|}=\varepsilon_1.$$

Таким образом, неравенство

$$\|(T_{\alpha+1}-T_\alpha)f\|>\varepsilon_1(\|T_{\alpha+1}\|+\|T_\alpha\|)$$

выполняется лишь для конечного числа индексов. Теперь по индукции докажем, что $P_\gamma f\in Y_f$, где $Y_f=\overline{\operatorname{sp}}[(T_{\alpha+1}-T_\alpha)f]_{\alpha\in A(f)}$; Пусть $P_\xi f\in Y_f$ для всех $\xi<\gamma$. Если $\gamma=\eta+1$, то $P_\eta f\in Y_f$,

$$(P_{\eta+1}-P_\eta)f\in\overline{\operatorname{sp}}\{(S^\eta_{\beta+1}-S^\eta_\beta)(P_{\eta+1}-P_\eta)f\}_{\beta\in B_\eta},$$

так как $\operatorname{dens}P_{\eta+1}X^*<M$.

Следовательно, $(P_{\eta+1}-P_\eta)f\in\overline{\operatorname{sp}}\{(T_{\alpha+1}-T_\alpha)f\}_{\alpha\in A_\eta}$, где $A_\eta=\{\alpha:\varphi=\eta,\ \psi\in B_\eta\}$. Таким образом, $(P_{\eta+1}-P_\eta)f\in Y_f\Rightarrow P_\gamma f\in Y_f$. Если у γ нет предыдущего индекса, то $P_\gamma f\in\overline{\operatorname{sp}}\{P_\xi f\}_{\xi<\gamma}\Rightarrow P_\gamma f\in Y_f$. Полагая $\gamma=\mu$, получаем $P_\mu f=f\Rightarrow f\in Y_f$, что и требовалось доказать.

Доказательству теоремы 2 предпошлем.

Предложение 4. *Пусть X — B-пространство со свойством A, причем X содержит слабо компактное фундаментальное подмножество. Тогда в X^* существует эквивалентная норма $|||\cdot|||$, относительно которой X^* локально равномерно выпукло и $|||\cdot|||$ w^*-снизу полунепрерывна.*

Доказательство. Построим операторы $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ так же, как в доказательстве теоремы 1, используя в качестве проекторов $\{P_\nu\}_{\nu<\mu}$ проекторы, построенные в лемме 5, а отображение T возьмем из доказательства леммы 6.

Введем функционалы $E^{(k)}_\sigma$, $t_\alpha(f)$, $F(f)$, $g_k(f)$ следующим образом. Обозначим через $\{v^\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ всюду плотное счетное подмножество в $(T_{\alpha+1}-T_\alpha)X^*$; G_k — совокупность всех подмножеств множества А, содержащих не более чем k элементов.

Пусть $\sigma\in\bigcup\limits_1^\infty G_k$, a^α_i — действительные числа,

$$E^{(k)}_\sigma(f)\overset{\text{def}}{=}\inf_{a^\alpha_i}\|f-\sum_{\alpha\in\sigma}\sum_1^k a^\alpha_i v^\alpha_i\|;$$

$$t_\alpha(f)\overset{\text{def}}{=}\frac{\|(T_{\alpha+1}-T_\alpha)f\|}{\|T_{\alpha+1}\|+\|T_\alpha\|};$$

$$F(f) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\alpha \in \sigma} t_\alpha(f);$$

$$g_k(f) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\sigma \in \sigma_k} [\mathrm{E}_\sigma^{(k)}(f) + kF(f)], \quad g_0(f) = \| f \|.$$

Образуем, следуя [4], в X^* эквивалентную норму $|||f||| = J_2(Qf)$, где $Q: X^* \to c_0(\Delta)$; $J_2(h)$ — функционал Дэя; $\Delta = \{0, 1, 2, \ldots\} \cup A \cup \Gamma$; $Qf = \{2^{-k} g_k(f)\}_1^\infty \cup \{t_\alpha(f)\}_{\alpha \in A} \cup \{(Tf)(\beta)\}_{\beta \in \Gamma}$. В [4] показано, что эта норма локально равномерно выпукла. Проверим, что введенные выше функционалы w^*-снизу полунепрерывны.

Пусть $f_\xi \overset{w^*}{\to} f$. Тогда существует такая константа C, что $\| f_\xi \| \leqslant C$. Рассмотрим в пространстве $\overline{\mathrm{sp}}\, \{v_i^\alpha\}_{\alpha \in \sigma}^{i=1, \ldots k} = V_k^\sigma$ шар радиуса $3C$:

$$S_k^\sigma = \{ f \in V_k^\sigma : \| f \| \leqslant 3C \}.$$

Так как S_k^σ — компакт, то для любого f_ξ существует $v_\xi \in S_k^\sigma$ такая, что

$$\| f_\xi - v_\xi \| = \inf_{a_i^\alpha} \| f_\xi - \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_1^k a_i^\alpha v_i^\alpha \|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$,

$$\{v_m^\varepsilon\}_{m=1}^{N(\varepsilon)} \text{ — } \varepsilon\text{-сеть в } S_k^\sigma,$$

$$\lim_\xi E_\sigma^{(k)}(f_\xi) = \varliminf_\xi \| f_\xi - v_\xi \| \geqslant \varliminf_\xi \| f_\xi - v_{m(\xi)}^\varepsilon \| - \varepsilon,$$

где $m(\xi)$ выбрано так, что

$$\| v_{m(\xi)}^\varepsilon - v_\xi \| \leqslant \varepsilon, \quad v_{m(\xi)}^\varepsilon \in \{v_m^\varepsilon\}_1^{N(\varepsilon)}.$$

Так как $(f_\xi - v_m^\varepsilon) \overset{w^*}{\to} f - v_m^\varepsilon$, то $\varliminf_\xi \| f_\xi - v_m^\varepsilon \| \geqslant \| f - v_m^\varepsilon \|$. Поскольку $\{v_m^\varepsilon\}_1^{N(\varepsilon)}$ — конечное множество, то $\exists d$ такое, что $\forall r > d$ $\| f_r - v_m^\varepsilon \| \geqslant \| f - v_m^\varepsilon \| - \varepsilon$. Поэтому $\varliminf_\xi \| f_\xi - v_{m(\xi)}^\varepsilon \| - \varepsilon \geqslant \| v_f - f \| - 3\varepsilon$, где $\| f - v_f \| = E_\sigma^{(k)}(f)$; следовательно, $\varliminf_\xi E_\sigma^{(k)}(f_\xi) \geqslant E_\sigma^{(k)}(f)$, w^*-снизу полунепрерывность $F(f)$ и $t_\alpha(f)$ следует из w^*-снизу полунепрерывности нормы $\| \cdot \|$. Проверим, что $g_k(f)$ обладает тем же свойством:

$$\varliminf_\xi g_k(f_\xi) \geqslant \sup_{\sigma \in \sigma_k} [\varliminf_\xi E_\sigma^{(k)}(f_\xi) + \varliminf_\xi kF(f_\xi)] \geqslant g_k(f),$$

аналогично

$$\varliminf_\xi J_2(Qf_\xi) = \varliminf_\xi \sup_{\sigma \in \sigma_k} \Big[\sum_1^k 2^{-i} |\zeta_\xi(\gamma_i)|^2\Big]^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\sigma \in G_k} \Big[\sum_{1}^{k} \underline{\lim}_{\xi} 2^{-i} \, |\zeta_\xi(\gamma_i)|^2 \Big]^{1/2} \geqslant J_2(Qf).$$

Здесь $\zeta_\xi(\gamma_i)$ — соответствующие компоненты Qf_ξ. Таким образом, $\underline{\lim}_{\xi} |||f||| \geqslant |||f|||$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Ловалья [6] показал, что если X^* локально равномерно выпукло, то норма пространства X дифференцируема по Фреше. Условие сопряженности пространства X^* эквивалентно w^*-снизу полунепрерывности его нормы, однако именно такая норма построена в предложении 4.

Следствие. *Если X — B-пространство со свойством A, содержащее слабо компактное фундаментальное подмножество, то в X существует эквивалентная локально равномерно выпуклая норма, дифференцируемая по Фреше.*

Доказательство. Известно [5], что в X можно ввести эквивалентную локально равномерно выпуклую норму $\|\cdot\|_1$. Пусть $\|\cdot\|_2$ — норма, построенная в теореме 2. Используя метод Асплунда [7], построим норму $\|\cdot\|_{12}$, которая была бы эквивалентной $\|\cdot\|_2$, локально равномерно выпуклой и $\|\cdot\|_{12}^*$ локально равномерно выпуклой в X^*, что эквивалентно дифференцируемости по Фреше нормы $\|\cdot\|_{12}$, что и требовалось доказать.

Неизвестно, можно ли ослабить условия теоремы 2, не требуя наличия в X слабо компактного фундаментального подмножества. Неясно также, эквивалентно ли свойство A следующему равенству: $\operatorname{dens} Y = \operatorname{dens} Y^*$ для всех подпространств $Y \subset X$.

Автор выражает глубокую благодарность М. И. Кадецу за помощь в решении задачи и обсуждении смежных вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадец М. И. Условия дифференцируемости нормы банахова пространства.— УМН, 1965, т. 20, № 3, с. 183—187.
2. Restrepo G. Differentiable norms in Banach spaces.— "Bull. Amer. Math. Soc.", 1964, vol. 70, N 3, p. 413—414.
3. Tacon D. G. The conjugate of a smooth Banach space.— "Bull. Austral. Math. Soc.", 1970, vol. 2, N 3, p. 415—425.
4. Trojanski S. On locally uniformly convex and differentiable norms in certain unseparable Banach spaces.— "Studia Math.", 1971, vol. 37, p. 20—35.
5. Amir D., Lindenstrauss J. The structure of weakly compact sets in Banach spaces.—"Ann. of Math". 1968, vol. 88, N 2, p. 35—46.
6. Lovaglia A. R. Locally uniformly convex Banach spaces.— "Trans. Amer. Math. Soc.", 1955, vol. 78, p. 225.
7. Asplund E. Averaged norms.—"Israel J. of Math.", 1967, N 5, p. 227—233