УДК 517.544

И. В. Говоров, д-р физ.-мат. наук,
Н. К. Кузнецов

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ РАЗОМКНУТОГО КОНТУРА

Будем обозначать: L — ограниченная простая гладкая разомкнутая дуга ab; $\tilde{L} = L \setminus \{a, b\}$; H — класс функций, удовлетворяющих на L условию Гельдера; Z — расширенная комплексная плоскость; $D = Z \setminus L$; B — класс функций, аналитических и ограниченных в D; B_n — подкласс функций из B, имеющих n ($n = 0$, $1, 2, \ldots$) нулей в D; $\tilde{B}$ — класс функций, аналитических в D и ограниченных во всякой замкнутой области, не содержащей точек a и b; $\tilde{B}_0$ — подкласс функций из $\tilde{B}$, не имеющих нулей в D;

$\hat{B}$ — подкласс функций из $\tilde{B}$, вещественная часть которых ограничена сверху в окрестностях точек a и b.

Определение 1. *Функцию $F(z)$, аналитическую в D и удовлетворяющую в D условию*

$$\max |\ln |F(z)|| < M_D < \infty, \qquad (0.1)$$

будем называть логарифмически-ограниченной в D.

Очевидно, неравенство (0.1) *равносильно условию*

$$o < k_1 < |F(z)| < k_2 < \infty. \qquad (0.2)$$

Определение 2. *Функцию, однозначную и аналитическую в Z, за исключением точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, будем называть целой относительно точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и обозначать $\Omega_{z_1, z_2, \ldots, z_n}(z)$.*

Определение 3. *Будем говорить, что кривая L в точке $t \in L$ имеет касание порядка не ниже μ ($\mu > 1$), и записывать $\mu_t \geqslant \mu$, если*

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{h(r)}{r^{\mu}} = c, \ 0 \leqslant c < \infty, \ c = \text{const}, \qquad (0.3)$$

где $h(r)$ — расстояние от точки $\tau \in L$ до касательной к L в точке t, а $r = |\tau - t|$.

В настоящей работе рассматривается задача: найти функцию $\Phi(z) \in B_n$, если известно, что

$$\Phi^{+}(t) \cdot \Phi^{-}(t) = f(t), \quad t \in L, \qquad (0.4)$$

где $f(t) \in H$; $f(t) \neq 0$; $\forall t \in L$.

Задача (0.4) рассматривалась ранее в работах Г. П. Черепанова [5, 6], где для случая замкнутого контура L найдены все ограниченные решения с конечным числом нулей. Для случая же разомкнутого контура L получены только те ограниченные решения из класса B_n, которые логарифмически-ограничены в окрестностях концов контура. В данной работе находятся все решения задачи (0.4) в классе B_n. Класс этих решений существенно шире, чем тот, который получен в [5, 6]; при этом класс найденных решений зависит от порядка касания контура L в концевых точках.

§ 1. Рассмотрим предварительно частный случай задачи (0.4): найти функцию $\Phi(z) \in B_0$, для которой

$$\Phi^{+}(t) \cdot \Phi^{-}(t) = 1, \quad t \in \tilde{L}. \qquad (1.1)$$

Очевидно, что если $\Phi(z)$ — решение (1.1), то и $-\Phi(z)$ есть решение. Отметим сразу два тривиальных решения[1]

$$\Phi_1(z) \equiv 1; \quad \Phi_2(z) \equiv -1. \qquad (1.2)$$

Пусть $\Phi(z) \not\equiv \pm 1$ — решение задачи (1.1) из класса B_0. Тогда любая ветвь $\ln \Phi(z)$ будет однозначной в D и ограниченной в любой

[1] В работах [5, 6] для задачи (1.1) в классе B_0 найдены только эти решения

замкнутой области D_*, не содержащей точек a и b. После выбора ветви $\ln \Phi(z)$ и логарифмирования краевого условия (1.1) задача распадается на следующие[1]:

$$\ln \Phi^+(t) + \ln \Phi^-(t) = 0; \tag{1.3}$$

$$\ln \Phi^+(t) + \ln \Phi^-(t) = 2\pi i. \tag{1.4}$$

Решения задачи (1.4) отличаются от решений задачи (1.3) только знаком, поэтому ограничимся рассмотрением задачи (1.3).

Обозначив

$$\ln \Phi(z) = \Psi(z). \tag{1.5}$$

краевое условие (1.3) запишем в виде

$$\Psi^+(t) = (-1) \cdot \Psi^-(t), \quad t \in \tilde{L}. \tag{1.6}$$

Очевидно, $\Phi(z) \in B_0$ тогда и только тогда, когда $\Psi(z) \in \hat{B}$. Поэтому задачу Римана (1.6) необходимо решить в классе $\hat{B}$, в котором она нигде ранее не рассматривалась.

Сначала решим задачу (1.6) в классе $\tilde{B}$. Легко видеть, что ее общее решение в $\tilde{B}$ имеет вид

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) \cdot \Omega_{a,b}(z), \tag{1.7}$$

где $\Psi_0(z)$ — некоторое решение из $\tilde{B}_0$, а $\Omega_{a,b}(z)$ — функция, целая относительно точек a и b. Функцию $\Psi_0(z)$ легко найти из соотношения

$$\ln \Psi_0^+(t) - \ln \Psi_0^-(t) = \pi i, \tag{1.8}$$

откуда

$$\Psi_0(z) = \sqrt{\frac{z-b}{z-a}}, \tag{1.9}$$

где ветвь корня в D выбрана произвольно.

Перепишем (1.7) в виде

$$\Psi(z) = \frac{F_{a,b,\infty}(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}, \tag{1.10}$$

где $F_{a,b,\infty}(z)$ — функция, целая относительно точек a, b, ∞, причем на ∞ она имеет полюс не выше первого порядка. Выясним, каким дополнительным ограничениям должна удовлетворять $F_{a,b,\infty}(z)$, чтобы формула (1.10) давала все решения задачи (1.6) из класса $\hat{B}$.

---

[1] Любые из уравнений $\ln \Phi^+(t) + \ln \Phi^-(t) = 2\pi k i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ легко сводятся к одному из (1.3), (1.4).

Лемма 1. Пусть $\sqrt{w}$ — произвольная ветвь в плоскости W с разрезом по простой гладкой кривой Λ, соединяющей точки $w=0$ и $w=\infty$ и пусть $f(w)$ — целая функция, для которой

$$\sup_{w} \operatorname{Re}\left[\sqrt{w}\, f(w)\right] < \text{const}.$$

Тогда $f(w) \equiv \text{const}$.

Доказательство*). Предположим, что $f(w) \not\equiv \text{const}$. Исследуем два возможных случая.

1. Пусть $f(w)=\sum\limits_{k=0}^{n} b_k w^k$, $\quad n \neq 0$ — многочлен. Тогда при $w \to \infty$

$$\operatorname{Re}\left[\sqrt{w}\, f(w)\right] \geqslant \operatorname{Re}\left(b_n w^{n+\frac{1}{2}}\right) - \left| b_{n-1} w^{n-\frac{1}{2}} + \cdots + b_0 w^{\frac{1}{2}} \right| \geqslant$$
$$\geqslant r^{n+\frac{1}{2}} \left\{ r_n \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi + \alpha\right] - \frac{k}{r} \right\}, \qquad (1.11)$$

где $w = re^{i\varphi}$, $b_n = r_n e^{i\alpha}$. Так как $n \neq 0$, то для $\eta > 0$, $\eta = \text{const}$ на любой окружности $|w| = r$, $r > r_\eta$ всегда найдутся точки, в которых $r_n \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi + \alpha\right] - \frac{k}{r} > \eta > 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{|w|=r} \operatorname{Re}\left[\sqrt{w}\, f(w)\right] = \infty,$$

что противоречит условию леммы.

2. Пусть $f(w)$ — целая трансцендентная функция, $\nu(r)$ — ее центральный индекс и пусть $\zeta(r) = re^{i\varphi_0}$, $\varphi_0 = \varphi_0(r)$, таково, что $|f(\zeta(r))| = M(r, f) \equiv \max\limits_{|w|=r} |f(w)|$. Для всех r [4, с. 102], кроме множества E конечной логарифмической меры, выполняется

$$f(re^{i\varphi}) = e^{i(\varphi-\varphi_0)\nu(r)} \cdot f[\zeta(r)] \cdot [1 + \eta(r, \varphi)], \quad |\varphi - \varphi_0| < \nu(r)^{-\frac{15}{16}}. \quad (1.12)$$

где $|\eta(r, \varphi)| < K \cdot \nu(r)^{-\frac{1}{16}}$, $K = \text{const}$. Возьмем такое R, что при всех $r > R$ окружность $|w| = r$ пересекает Λ только в одной точке. Будем брать $r > R$, $r \bar{\in} E$. Пусть σ_r — та из половин дуги $|\varphi - \varphi_0| < \nu^{-\frac{15}{16}}$, которая не пересекает Λ. Тогда в силу (1.12) при больших $r \bar{\in} E$ приращение аргумента

$$\arg\left[\sqrt{w}\, f(w)\right] = \left[\nu(r) + \frac{1}{2}\right]\varphi + c_r + \arg\left[1 + \eta(r, \varphi)\right], \quad \varphi \in \sigma_r$$

*) Приводимое здесь доказательство принадлежит А. А. Гольдбергу.

на дуге σ_r будет больше 2π; следовательно, найдется точка $w_r \in \sigma_r$, для которой

$$\operatorname{Re} \sqrt{w_r}\, f(w_r) = \sqrt{|w_r|}\, |f(w_r)|,$$

и поэтому в соответствии с (1.12)

$$\lim_{r \to +\infty,\ r \overline{\in} E} \operatorname{Re} \sqrt{w_r}\, f(w_r) = +\infty.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 1. *Для того чтобы функция* (1.10) *принадлежала классу* $\hat{B}$, *необходимо, чтобы* $F_{a,b,\infty}(z)$ *была линейной*

$$F_{a,b,\infty}(z) = cz + d. \tag{1.13}$$

Доказательство. Поскольку $F_{a,b,\infty}(z)$ имеет при $z = \infty$ полюс порядка не выше первого, достаточно установить, что в разложениях Лорана

$$\frac{F_{a,b,\infty}(z)}{\sqrt{z-b}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad \frac{F_{a,b,\infty}(z)}{\sqrt{z-a}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-b)^n, \tag{1.14}$$

$a_n = 0$, $b_n = 0$ при всех $n = -1, -2, \ldots$. Ограничимся доказательством первого утверждения.

Пусть

$$\frac{F_{a,b,\infty}(z)}{\sqrt{z-b}} = \sum_{n=-\infty}^{0} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n \equiv F_1(z) + F_2(z). \tag{1.15}$$

Так как (1.10) должна принадлежать $\hat{B}$, необходимо

$$\sup_D \operatorname{Re} \frac{F_1(z)}{\sqrt{z-a}} < \text{const}, \tag{1.16}$$

где $\sqrt{z-a}$ — какая-либо ветвь в Z с разрезом вдоль L от a до ∞, а $F_1(z)$ регулярна в $0 < |z-a| \leqslant \infty$ [3, с. 167].

Сделаем преобразование

$$w = \frac{1}{z-a}. \tag{1.17}$$

Образ контура L в плоскости W обозначим через Λ, Λ — простая гладкая дуга, уходящая к ∞, а образ области D обозначим через T, $T = W \setminus \Lambda$. Функция

$$f(w) = F_1\left(a + \frac{1}{w}\right) \tag{1.18}$$

есть целая и, согласно (1.16), удовлетворяет условию

$$\sup_T \operatorname{Re}\left[\sqrt{w}\, f(w)\right] < \text{const}.$$

Тогда на основании леммы 1 $f(w) \equiv \text{const}$, а потому $F_1(z) \equiv \text{const}$, т. е. $a_n \equiv 0$ для $n = -1, -2, \ldots$

Следствие. *Для того чтобы функция* (1.10) *была решением задачи* (1.6) *из класса* $\hat{B}$, *необходимо, чтобы она имела вид*

$$\Psi(z) = \frac{c(z - z_0)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}, \tag{1.19}$$

где c, z_0 — *константы, а* $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ — *какая-либо ветвь в области* D.

Итак, функция (1.19) при любых значениях c и z_0 является решением задачи (1.6) из класса $\tilde{B}$. Для того чтобы функция (1.19) принадлежала классу $\hat{B}$, необходимо и достаточно, чтобы условие $\sup \operatorname{Re} \Psi(z) < \infty$ выполнялось в окрестностях точек a и b.

Пусть $l_a (l_b)$ — луч, выходящий из точки $z = a$ $(z = b)$ и образующий с L в точке $z = a$ $(z = b)$ угол π. Проведем в D разрез, соединяющий какую-либо точку $t \in \tilde{L}$ с точкой $z = \infty$. В полученной области возьмем любую ветвь функции $\arg \sqrt{(z-a)(z-b)}$ и пусть

$$\lim_{z \to a,\, z \in l_a} \arg \sqrt{(z-a)(z-b)} = \alpha, \tag{1.20}$$

$$\lim_{z \to b,\, z \in l_b} \arg \sqrt{(z-a)(z-b)} = \beta. \tag{1.21}$$

Рассмотрим поведение функции (1.19) в окрестностях точек $z = a$ и $z = b$. Очевидно, если $z_0 = a$ $(z_0 = b)$, то функция (1.19) ограничена в окрестности точки $z = a$ $(z = b)$.

Лемма 2. *Если функция* (1.19) *при* $z_0 \neq a$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{0 < |z-a| < \varepsilon} \operatorname{Re} \Psi(z) < \infty, \tag{1.22}$$

то

$$\arg c + \arg(a - z_0) = \alpha + \pi. \tag{1.23}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (1.22). Предположим, что (1.23) неверно, т. е.

$$\arg c + \arg(a - z_0) = \alpha + \pi + \theta, \quad 0 < |\theta| \leqslant \pi. \tag{1.24}$$

Рассмотрим случай $\theta > 0$. Обозначим через $l_{a,\theta}$ луч, выходящий из точки $z = a$ и такой, что

$$\arg(z-a)|_{z \in l_{a,\theta}} = \arg(\zeta - a)|_{\zeta \in l_a} - \pi + \theta. \tag{1.25}$$

Из (1.19) имеем

$$\operatorname{Re}\Psi(z) = |\Psi(z)| \cdot \cos \arg \Psi(z) =$$

$$= \frac{|c|\,|z - z_0|}{\sqrt{|z-a|\,|z-b|}} \cdot \cos[\arg c + \arg(z - z_0) - \arg\sqrt{(z-a)(z-b)}], \tag{1.26}$$

из (1.24) и (1.25) следует, что при $z \to a$, $\zeta \to a$

$$\operatorname{tg} \Psi(z)|_{z \in l_{a, \theta}} = \left[\arg c + \arg(\zeta - z_0) - \arg \sqrt{(\zeta - a)(\zeta - b)} + \frac{\pi}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\theta}{2} + o(1) \right]\Big|_{\zeta \in l_a} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\theta}{2} + o(1). \tag{1.27}$$

Так как, согласно (1.27),

$$\lim_{z \to a,\ z \in l_{a, \theta}} \cos \arg \Psi(z) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \eta > 0,$$

то при $z \in l_{a, \theta}$ и достаточно близких к a будет

$$\cos \arg \Psi(z) > \frac{\eta}{2} > 0,$$

а так как $z_0 \neq a$, то $|\Psi(z)| \to +\infty$ при $z \to a$ по любому пути. Отсюда, согласно (1.26), имеем

$$\lim_{z \in l_{a, \theta},\ z \to a} \operatorname{Re} \Psi(z) = +\infty,$$

что противоречит (1.22). Аналогично рассматривается случай $\theta < 0$.

Точно так же доказывается.

Лемма 3. *Если функция* (1.19) *при* $z_0 \neq b$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{0 < |z - b| < \varepsilon} \operatorname{Re} \Psi(z) < \infty, \tag{1.28}$$

то

$$\arg c + \arg(b - z_0) = \beta + \pi. \tag{1.29}$$

Из лемм 2 и 3 следует

Теорема 2. *Если функция* (1.19) *есть решение задачи* (1.6) *из класса* $\hat{B}$, *то*

$$\begin{aligned} \arg c + \arg(a - z_0) &= \alpha + \pi, \\ \arg c + \arg(b - z_0) &= \beta + \pi. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Замечание 1. Если из первого уравнения системы (1.30) вычесть второе, то получим

$$\arg(a - z_0) - \arg(b - z_0) = \alpha - \beta. \tag{1.31}$$

Отсюда следует, что точка z_0 лежит на закрытой дуге окружности, проходящей через точки a и b. При этом выбирается та дуга, для точек z_0 которой угол поворота от вектора $\overline{z_0 b}$ до вектора $\overline{z_0 a}$ равен $\alpha - \beta$. Так как на модуль z_0 ограничений не было, точку z_0 можно брать в любом месте указанной дуги. Выбрав точку z_0 из любого уравнения системы (1.30), определим $\arg c$. Величину $|c|$ можно брать произвольно, $0 \leqslant |c| < \infty$.

Замечание 2. Из доказательств лемм 2 и 3 следует, что если c и z_0 удовлетворяют системе (1.30), то условие $\operatorname{Re}\Psi(z) < \infty$ будет выполняться при $z \to a$ $(z \to b)$ по любому пути, не касательному с L в точке $z = a$ $(z = b)$, т. е. если z лежит в произвольном угле раствора меньше 2π с вершиной в точке $z = a$ $(z = b)$ и с биссектрисой l_a (l_b).

Лемма 4. *Пусть c и z_0 $(z_0 \neq a)$ удовлетворяют системе* (1.30). *Тогда для того чтобы функция* (1.19) *удовлетворяла условию*

$$\sup_{0<|z-a|<\varepsilon} \operatorname{Re} \Psi(z) < \infty, \tag{1.32}$$

необходимо и достаточно, чтобы L имела в точке $z = a$ касание порядка не ниже $\frac{3}{2}$, т. е. чтобы $\mu_a \geqslant \frac{3}{2}$.

Необходимость. Пусть функция (1.19) удовлетворяет условию (1.32). Для $0 < |z - a| < \varepsilon$ имеем

$$\arg \frac{c(z-z_0)}{\sqrt{z-b}} = \operatorname{Im} \ln \frac{c(z-z_0)}{\sqrt{z-b}} = \operatorname{Im}[c_0 + c_1(z-a) + \cdots] = \\ = \operatorname{Im} c_0 + O(r), \quad r \to 0, \tag{1.33}$$

где $r = |z - a|$. Из (1.30) и (1.33) следует, что

$$\operatorname{Im} c_0 = \lim_{\substack{z \to a \\ z \in l_a}} \left[\arg \frac{c(z-z_0)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{1}{2}\arg(z-a)\right] = \\ = \pi + \frac{1}{2}\arg(z-a)|_{z\in l_a}.$$

Следовательно,

$$\arg_{0<|z-a|<\varepsilon} \frac{c(z-z_0)}{\sqrt{z-b}} = \pi + \frac{1}{2}\arg(z-a)|_{z\in l_a} + O(r). \tag{1.34}$$

Обозначим через t^+ и t^- соответственно лево- правобережные точки L, а через $\omega(r)$ — угол между вектором $\overline{at}$, $t \in L$ и положительной касательной к L в точке $z = a$, $\omega(r) \to 0$ при $r \to 0$. В окрестности точки a имеем

$$\arg(t^+ - a) = \arg(z-a)|_{z\in l_a} - \pi + \omega(r), \tag{1.35}$$

$$\arg(t^- - a) = \arg(z-a)|_{z\in l_a} + \pi + \omega(r). \tag{1.36}$$

Используя (1.34) и (1.35), получим

$$\arg \Psi^+(t) = \arg \frac{c(t^+ - z_0)}{\sqrt{t^+ - b}} - \frac{1}{2}\arg(t^+ - a) = \\ = \pi + \frac{1}{2}\arg(z-a)|_{z\in l_a} - \frac{1}{2}\arg(z-a)|_{z\in l_a} + \frac{\pi}{2} - \frac{\omega(r)}{2} + O(r) = \\ = \frac{3\pi}{2} - \frac{\omega(r)}{2} + O(r), \quad r \to 0. \tag{1.37}$$

Аналогично

$$\arg \Psi^{-}(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega(r)}{2} + O(r), \quad r \to 0. \tag{1.38}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re} \Psi^{\pm}(t) = \frac{|c|\,|t - z_0|}{\sqrt{|t - b|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \left[\sin\left(\pm \frac{\omega(r)}{2} \right) + O(r) \right]. \tag{1.39}$$

Далее

$$\max\{\operatorname{Re}\Psi^{+}(t), \operatorname{Re}\Psi^{-}(t)\} = \frac{|c|\,|t - z_0|}{\sqrt{|t - b|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \left[\sin\frac{|\omega(r)|}{2} + O(r) \right] \geqslant$$
$$\geqslant A_1 \frac{\sin|\omega(r)|}{\sqrt{r}}, \quad 0 < A_1 < \infty. \tag{1.40}$$

Из условия (1.32) следует, что

$$\sup_{t \in L} \operatorname{Re} \Psi^{\pm}(t) < \infty, \quad 0 < |t - a| < \varepsilon,$$

а потому

$$A_1 \frac{\sin|\omega(r)|}{\sqrt{r}} < A_2 < \infty, \quad r \to 0.$$

Отсюда, принимая во внимание определение 3, имеем

$$\overline{\lim_{r \to 0}} \frac{h(r)}{r^{3/2}} < \infty,$$

т. е. кривая L в точке $z = a$ имеет касание порядка не ниже $3/2$ ($\mu_a \geqslant 3/2$).

Достаточность. Воспользуемся таким предложением: если функция $\Psi(z)$ аналитична в некоторой области

$$\Delta_\varepsilon = \{|z - a| < \varepsilon\} \setminus L, \ \varepsilon > 0, \tag{1.41}$$

непрерывна вплоть до ее границы, кроме, может быть, точки $z = a$, и удовлетворяет условиям

$$\sup_{z \in \Delta_\varepsilon} \operatorname{Re} \Psi(z) < \frac{k}{\sqrt{r}}, \ k = \text{const}, \ r \to 0, \tag{1.42}$$

$$\sup_{z \in l_a} \operatorname{Re} \Psi(z) < k, \tag{1.43}$$

$$\sup_{t \in L} \operatorname{Re} \Psi^{\pm}(t) < k, \tag{1.44}$$

то для $\Psi(z)$ справедлива оценка (1.32). Это предложение получается применением принципа Фрагмена—Линделефа [3, с. 357] к областям Δ_ε^{+} и Δ_ε^{-}, на которые разрез l_a делит область Δ_ε.

Для функции $\Psi(z)$ условия (1.42) и (1.43) вытекают из (1.19) и замечания 2, а (1.44) следует из предположения $\mu_a \geqslant 3/2$, в силу которого

$$\max\{\operatorname{Re}\Psi^+(t),\ \operatorname{Re}\Psi^-(t)\} = \frac{|c|\,|t-z_0|}{\sqrt{|t-b|}}\cdot\frac{1}{\sqrt{r}}\left[\sin\frac{|\omega(r)|}{2}+O(r)\right] \leqslant$$
$$\leqslant c_1\frac{\sin|\omega(r)|}{\sqrt{r}} = c_1\frac{h(r)}{r^{3/2}} < c_2 < \infty.$$

Следовательно, для $\Psi(z)$ справедливо (1.32). Лемма 4 доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 5. *Пусть c и $z_0\,(z_0 \neq b)$ удовлетворяют системе* (1.30). *Тогда для того чтобы функция* (1.19) *удовлетворяла условию*

$$\sup_{0<|z-b|<\varepsilon}\operatorname{Re}\ \Psi(z) < \infty, \tag{1.45}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mu_b \geqslant 3/2$.

Замечание 3. При $z_0 = a\,(z_0 = b)$ условие (1.32) (соответственно (1.45)) выполняется независимо от порядка касания в точке $z = a \times$ $\times\,(z = b)$.

Обозначим

$$\Psi(z,\ c,\ z_0) = \frac{c\,(z-z_0)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}, \tag{1.46}$$

где z_0 — любая точка закрытой дуги $\arg(a-z_0) - \arg(b-z_0) =$ $= \alpha - \beta$, а $c = \lambda\exp i[\alpha+\pi-\arg(a-z_0)] \equiv \lambda\exp i[\beta+\pi-$ $-\arg(b-z_0)]$, $0 \leqslant \lambda < \infty$. Здесь α и β определяются равенствами (1.20) и (1.21). Ясно, что функция $\Psi(z,\ c,\ z_0)$ является частным случаем функции вида (1.19).

Из лемм 4 и 5 и замечания 3 следует

Теорема 3. *Общее решение задачи* (1.6) *в классе B определяется функцией*

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Psi(z,\ c,\ z_0) & \text{при } \mu_a \geqslant 3/2,\ \mu_b \geqslant 3/2,\\ \Psi(z,\ c,\ a) & \text{при } \mu_a < 3/2,\ \mu_b \geqslant 3/2,\\ \Psi(z,\ c,\ b) & \text{при } \mu_a \geqslant 3/2,\ \mu_b < 3/2,\\ 0 & \text{при } \mu_a < 3/2,\ \mu_b < 3/2. \end{cases} \tag{1.47}$$

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. *Общее решение задачи* (1.1) *в классе B_0 определяется функцией*

$$\Phi(z) = \begin{cases} \pm\exp\Psi(z,\ c,\ z_0) & \text{при } \mu_a \geqslant 3/2,\ \mu_b \geqslant 3/2,\\ \pm\exp\Psi(z,\ c,\ a) & \text{при } \mu_a < 3/2,\ \mu_b \geqslant 3/2,\\ \pm\exp\Psi(z,\ c,\ b) & \text{при } \mu_a \geqslant 3/2,\ \mu_b < 3/2,\\ \pm 1 & \text{при } \mu_a < 3/2,\ \mu_b < 3/2. \end{cases} \tag{1.48}$$

Заметим, что из всех приведенных решений задачи (1.1), принадлежащих классу B_0, только два решения $\Phi(z) = \pm 1$ логарифмически-ограничены. Заметим еще, что ограничения, налагаемые на порядок касания контура L в концевых точках, выполняются в весьма широком классе случаев, например, для контура, являющегося вблизи концов аналитическим или кривой Ляпунова с показателем $\lambda \geqslant 1/2$ [2, с. 36].

§ 2. Рассмотрим задачу: найти функцию $\Phi(z) \in B_0$, для которой

$$\Phi^+(t) \cdot \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \tilde{L}, \tag{2.1}$$

где $f(t) \in H$, $f(t) \neq 0$, $\forall t \in L$.

Допустим, что задача (2.1) имеет некоторое логарифмически-ограниченное решение $\Phi_0(z)$. Тогда функция $\Phi_*(z) = \Phi(z)/\Phi_0(z)$, где $\Phi(z)$ — любое решение задачи (2.1) из класса B_0, будет удовлетворять условию $\Phi_*^+(t) \cdot \Phi_*^-(t) = 1$, $t \in \tilde{L}$. Обратно, если функция $\Phi_*(z)$ есть любое решение задачи $\Phi_*^+(t) \cdot \Phi_*^-(t) = 1$, $t \in \tilde{L}$ из класса B_0, то функция $\Phi(z) = \Phi_0(z) \cdot \Phi_*(z)$ является решением задачи (2.1) в классе B_0. Отсюда следует, что общее решение задачи (2.1) в классе B_0 имеет вид

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) \cdot \Phi_*(z), \tag{2.2}$$

где $\Phi_0(z)$ — некоторое решение задачи (2.1) из класса B_0, а $\Phi_*(z)$ — общее решение задачи (1.1) в классе B_0.

Функцию $\Phi_0(z)$ найдем из соотношения

$$\ln \Phi_0^+(t) = (-1) \ln \Phi_0^-(t) + \ln f(t), \quad t \in \tilde{L}, \tag{2.3}$$

где для $\ln \Phi_0(z)$ выбрана какая-либо ветвь в D, причем любая ветвь $\ln \Phi_0(z)$ есть функция, однозначная в D и ограниченная в любой замкнутой области D_*, не содержащей точек $z = a$ и $z = b$. Задача (2.3) есть неоднородная линейная относительно $\ln \Phi_0(z)$ краевая задача Римана для разомкнутого контура $L = ab$, коэффициент которой $G(t) = -1$, а свободный член $g(t) = \ln f(t) \in H$. Решение задачи (2.3), ограниченное в D, имеет вид [1, с. 484]

$$\ln \Phi_0(z) = \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i} \int_a^b \frac{\ln f(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}, \tag{2.4}$$

где $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ — любая ветвь в D, а $\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}$ — ее левобережное значение. Из (2.4) следует, что

$$\Phi_0(z) = \exp\left[\frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i} \int_a^b \frac{\ln f(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}\right]. \tag{2.5}$$

Решение $\Phi_0(z) \in B_0$ задачи (2.1) будет логарифмически-ограниченной в D функцией [1, с. 484].

Из (2.2) и теоремы 4 следует

Теорема 5. *Общее решение задачи* (2.1) *в классе* B_0 *имеет вид*

$$\Phi(z)=\begin{cases}\pm\Phi_0(z)\cdot\exp\Psi(z,c,z_0) & при\ \mu_a\geqslant {}^3/_2,\ \mu_b\geqslant {}^3/_2,\\ \pm\Phi_0(z)\cdot\exp\Psi(z,c,a) & при\ \mu_a< {}^3/_2,\ \mu_b\geqslant {}^3/_2,\\ \pm\Phi_0(z)\cdot\exp\Psi(z,c,b) & при\ \mu_a\geqslant {}^3/_2,\ \mu_b< {}^3/_2,\\ \pm\Phi_0(z) & при\ \mu_a< {}^3/_2,\ \mu_b< {}^3/_2,\end{cases} \qquad (2.6)$$

где $\Phi_0(z)$ *определяется равенством* (2.5), а $\Psi(z, c, z_0)$ *определяется равенством* (1.46).

Замечание. В [5, 6] получены только решения $\pm\Phi_0(z)$.

§ 3. Рассмотрим задачу: найти функцию $\Phi(z)\in B_n$, $n=1, 2, 3, \ldots$, для которой

$$\Phi^+(t)\cdot\Phi^-(t)=f(t),\ t\in\tilde{L}, \qquad (3.1)$$

где $f(t)\in H$, $f(t)\neq 0$, $\forall t\in L$.

Будем искать решения $\Phi(z)$, которые обращаются в нуль в точках $z_1, z_2, \ldots, z_s$, $s\leqslant n$, и $z=\infty$, причем в точке $z=\infty$ нуль порядка $n-s$, а некоторые или все $z_k\,(k=1, 2, \ldots, s)$ могут совпадать.

Прежде всего построим функцию $N(z)\in B_n$, имеющую те же нули и той же кратности, что и функция $\Phi(z)$. Такая функция не единственная. Для этого решим некоторую вспомогательную задачу Римана с индексом, равным n.

Дополним контур L до замкнутого некоторой простой гладкой дугой l такой, что замкнутый контур $L+l$ будет гладким и в точках $z=a$ и $z=b$. На $L+l$ зададим функцию $G(t)$ следующим условием:

$$G(t)=\begin{cases}e^{2\pi in\frac{t-a}{b-a}}, & t\in L,\\ 1, & t\in l.\end{cases} \qquad (3.2)$$

Легко видеть, что $G(t)$ непрерывна на $L+l$ и ее индекс по контуру $L+l$ равен

$$\mathrm{Ind}_{L+l}G(t)=\mathrm{Ind}_L G(t)=\frac{1}{2\pi}\arg\exp\left(2\pi in\frac{t-a}{b-a}\right)=n. \qquad (3.3)$$

Рассмотрим краевую задачу Римана

$$\chi^+(t)=G(t)\cdot\chi^-(t),\ t\in L+l. \qquad (3.4)$$

Возьмем такое ее решение [1, с. 488]

$$\chi(z)=\frac{1}{e^n(z-b)^n}\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b\frac{\ln G(\tau)}{\tau-z}\,d\tau\right]=$$
$$=\frac{1}{(z-b)^n}\exp\left[\frac{n}{b-a}(z-a)\ln\frac{b-z}{a-z}\right], \qquad (3.5)$$

где ветвь $\ln\frac{b-z}{a-z}$ определяется условием $\lim\limits_{z\to\infty}\ln\frac{b-z}{a-z}=0$. Легко проверить, что $\chi(z)$ ограничена и не имеет корней в D, за исключением корня в точке $z=\infty$ порядка n. Поэтому функция

$$N(z)=\chi(z)\cdot\prod_{k=1}^{s}(z-z_k) \tag{3.6}$$

ограничена в D и имеет те же нули и той же кратности, что и искомое решение $\Phi(z)$ задачи (3.1). Очевидно, $N^{\pm}(t)\in H$, так как $\chi^{\pm}(t)\in H$.

Далее пусть $\Phi(z)\in B_n$ — любое решение задачи (3.1), имеющее нули в точках $z_1, z_2, \ldots, z_s$, $s\leqslant n$, и $z=\infty$, причем в точке $z=\infty$ нуль порядка $n-s$. Тогда функция $\Gamma(z)=\Phi(z)/N(z)$, где $N(z)$ определяется условием (3,6), принадлежит классу B_0 и удовлетворяет краевому условию

$$\Gamma^{+}(t)\cdot\Gamma^{-}(t)=\frac{f(t)}{N^{+}(t)\quad N^{-}(t)},\quad t\in\widetilde{L}. \tag{3.7}$$

Функция $\dfrac{f(t)}{N^{+}(t)\quad N^{-}(t)}\in H$ и нигде на L не обращается в нуль.

С другой стороны, пусть $\Gamma(z)$ — любое решение задачи (3.7) из класса B_0. Тогда функция $\Phi(z)=\Gamma(z)\cdot N(z)$ будет решением задачи (3.1) из класса B_n, имеющим нули в точках $z_1, z_2, \ldots, z_s$ и $z=\infty$, причем в точке $z=\infty$ нуль порядка $n-s$.

Таким образом, общее решение задачи (3.1) в классе B_n имеет вид

$$\Phi(z)=N(z)\cdot\Gamma(z). \tag{3.8}$$

где $\Gamma(z)$ — общее решение задачи (3.7) в классе B_0. Задача (3.7) есть задача, рассмотренная в § 2. Согласно § 2, общее решение задачи (3.7) в классе B_0 имеет вид

$$\Gamma(z)=\Omega(z)\cdot\Gamma_0(z), \tag{3.9}$$

где

$$\Gamma_0(z)=\exp\frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i}\int_a^b\left[\ln\frac{f(\tau)}{N^{+}(\tau)\quad N^{-}(\tau)}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}, \tag{3.10}$$

а $\Omega(z)$ — общее решение задачи (1.1) в классе B_0. Из (3.8), (3.9) и теоремы 4 следует

Теорема 6. *Общее решение задачи* (3.1) *в классе* B_n *имеет вид*

$$\Phi(z)=\begin{cases}\pm N(z)\cdot\Gamma_0(z)\exp\Psi(z,c,z_0) & \text{при } \mu_a\geqslant{}^3/_2,\ \mu_b\geqslant{}^3/_2,\\ \pm N(z)\cdot\Gamma_0(z)\exp\Psi(z,c,a) & \text{при } \mu_a<{}^3/_2,\ \mu_b\geqslant{}^3/_2,\\ \pm N(z)\cdot\Gamma_0(z)\exp\Psi(z,c,b) & \text{при } \mu_a\geqslant{}^3/_2,\ \mu_b<{}^3/_2,\\ \pm N(z)\cdot\Gamma_0(z) & \text{при } \mu_a<{}^3/_2,\ \mu_b<{}^3/_2,\end{cases}$$

где $N(z)$, $\Gamma_0(z)$ *и* $\Psi(z,c,z_0)$ *определяются соответственно равенствами* (3.6), (3.10) *и* (1.46).

§ 4. Пусть L — неограниченный направленный простой гладкий контур с началом в точке $z=a$ и с концом в точке $z=\infty$ и $D=Z\diagdown L$. Не нарушая общности, будем считать, что точка $z=0$

не лежит на L. Под гладкостью контура L в бесконечно удаленной точке будем понимать гладкость его образа Λ в точке $w=0$ при отображении $w=\frac{1}{z}$. Аналогично будем говорить, что контур L имеет в точке $z=\infty$ касание порядка не ниже μ, и писать $\mu_\infty \geqslant \mu$, если его образ Λ при отображении $w=\frac{1}{z}$ имеет в точке $w=0$ касание порядка не ниже μ. Далее, если контур L в точке $z=a$ имеет порядок касания не ниже μ_a, то при отображении $w=\frac{1}{z}$ образ Λ в точке $w=\frac{1}{a}$ будет иметь также касание порядка не ниже μ_a.

Рассматривается задача: найти функцию $\Phi(z) \in B_n$, для которой

$$\Phi^+(t) \cdot \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \bar{L}, \tag{4.1}$$

где $f(t) \in H^*$, $f(t) \neq 0$, $\forall t \in L$.

Будем искать решения $\Phi(z)$, которые обращаются в нуль в точках $z_1, z_2, \ldots, z_s$, $s \leqslant n$, и $z=0$, причем в точке $z=0$ нуль порядка $n-s$, а некоторые или все $z_k (k=1, 2, \ldots, s)$ могут совпадать.

Задача (4.1) преобразованием

$$w=\frac{1}{z} \tag{4.2}$$

приводится к задаче, рассмотренной в § 3. Из результатов § 3 с учетом преобразования (4.2) следует

Теорема 7. *Общее решение задачи* (4.1) *в классе* B_n *имеет вид*

$$\Phi(z)=\begin{cases} \pm N(z)\cdot\Gamma_0(z)\cdot\exp\Psi(z, c, z_0) & \textit{при } \mu_a \geqslant {}^3/_2,\ \mu_\infty \geqslant {}^3/_2, \\ \pm N(z)\cdot\Gamma_0(z)\cdot\exp\Psi(z, c, a) & \textit{при } \mu_a < {}^3/_2,\ \mu_\infty \geqslant {}^3/_2, \\ \pm N(z)\cdot\Gamma_0(z)\cdot\exp\Psi(z, c, \infty) & \textit{при } \mu_a \geqslant {}^3/_2,\ \mu_\infty < {}^3/_2, \\ \pm N(z)\cdot\Gamma_0(z) & \textit{при } \mu_a < {}^3/_2,\ \mu_\infty < {}^3/_2, \end{cases}$$

где $N(z)=z^{n-s}\prod_{k=1}^{s}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left[\frac{na}{z}\left(1-\frac{z}{a}\right)\ln\left(1-\frac{z}{a}\right)\right]$; ветвь $\ln\left(1-\frac{z}{a}\right)$ определяется условием $\lim\limits_{z\to 0}\ln\left(1-\frac{z}{a}\right)=0$;

$$\Gamma_0(z)=\exp\frac{\sqrt{a-z}}{2\pi i}\int_a^\infty\left[\ln\frac{f(\tau)}{N^+(\tau)N^-(\tau)}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{a-\tau}}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z};$$

$$\Psi(z, c, z_0)=\frac{c\left(1-\frac{z}{z_0}\right)}{\sqrt{1-\frac{z}{a}}};$$

---

* Функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на бесконечном контуре L, не содержащем $z=0$, если $|f(t_2)-f(t_1)| \leqslant A\cdot\left|\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right|^\lambda$, $0<\lambda\leqslant 1$, $A=\mathrm{const}$.

точка z_0 лежит на закрытом луче $\arg(a - z_0) = \arg a + \alpha - \beta$; параметр c определяется равенством $c = \lambda \exp i[\beta + \arg z_0]$, $0 \leqslant \lambda < \infty$;

$$\alpha = \lim_{z\to a,\, z\in l_a} \arg \frac{1}{z}\sqrt{1-\frac{z}{a}};\quad \beta = \lim_{z\to\infty,\, z\in l_\infty} \arg \frac{1}{z}\sqrt{1-\frac{z}{a}};$$

$$l_\infty : \arg z|_{z\in l_\infty} = \pi + \lim_{z\to\infty,\, z\in L} \arg z.$$

Авторы выражают признательность А. А. Гольбергу за упрощение доказательства леммы 1 § 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., «Наука», 1963. 639 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1962. 419 с.
3. Евграфов М. А. Аналитические функции. М., «Наука», 1968. 471 с.
4. Valiron G. Lecturs of the general Theory of integral functions. Toulouse, 1923. 625 p.
5. Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача в условиях антиплоской деформации.— «Прикладная математика и механика». 1962, т. 26, вып. 4, с. 17—23.
6. Черепанов Г. П. Об одной нелинейной граничной задаче теории аналитических функций, встречающейся в некоторых упруго-пластических задачах.— «Докл. АН СССР», 1962, т. 147, № 3, с. 15—19.