УДК 517.535.4

Б. Н. Гинзбург

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГОМЕРНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

Будем придерживаться следующих обозначений: R^n — вещественное, C^n-комплексное n-мерные эвклидовы пространства; $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — их векторы; $\operatorname{Re} x = (\operatorname{Re} x_1, \ldots, \operatorname{Re} x_n)$, $\operatorname{Im} x = (\operatorname{Im} x_1, \ldots, \operatorname{Im} x_n)$; $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$; S_n — единичная сфера в R^n, $S^n = \{x : |x| = 1, x \in R^n\}$; $\|x\| = x_1 + \cdots + x_n$, $(x_i \geqslant 0)$.

Меру $P(E)$, определенную на классе борелевских множеств в R_n и нормированную условием $P(R_n) = 1$, назовем n-мерным вероятностным законом, или для краткости просто законом. Характеристической функцией (х. ф.) закона P назовем функцию, определенную при $t \in R^n$ равенством

$$\varphi(t) = \varphi(t, P) = \int_{R^n} e^{i(t, x)} P(dx).$$

Если функция $\varphi(t)$ продолжается как голоморфная в некоторую область $G \subset C^n$ такую, что $0 \in G$, будем говорить, что функция $\varphi(t)$ голоморфна в G, и обозначать ее снова через $\varphi(t)$. В частности, если $G = C^n$, то станем говорить, что х. ф. $\varphi(t)$ является целой.

Настоящая работа посвящена изучению роста целых х. ф. многомерных законов.

§ 1. Исследуем связь между ростом целой х. ф. многомерного закона и ростом х. ф. проекций этого закона. Напомним, что проекцией n-мерного закона P на орт $\xi \in S^n$ называется одномерный вероятностный закон, определяемый равенством

$$P_\xi(E) = P(\{x : (x, \xi) \in E\})$$

(E — любое борелевское множество в R^1).

Легко видеть, что х. ф. проекции связана с х. ф. самого закона равенством

$$\varphi(t; P_\xi) = \varphi(t\xi; P).$$

Очевидно, если х. ф. закона P — целая функция в C^n, то х. ф. всех проекций этого закона — целые функции в C^1. Как показано в работе [1, гл. VI, § 1], обратное утверждение также справедливо (более того, х. ф. закона P будет целой, если целые х. ф. проекций на n линейно независимых векторов).

Основной характеристикой роста целой функции одного переменного является порядок. Порядком целой функции $f(z)$, $z \in C^1$ называется величина

$$\rho = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r},$$

при $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Для целых функций многих переменных понятие, аналогичное понятию порядка, можно ввести многими способами.

А. А. Гольдберг [2, гл. 3, § 1] называет порядком целой функции $f(z)$, $z \in C^n$ число ρ, определяемое следующим образом. Пусть $D \in C^n$ — ограниченная полная n-круговая сбласть. Порядком функции $f(z)$ называем число

$$\rho = \rho_D = \overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{\ln \ln M_{fD}(R)}{\ln R},$$

где $M_{fD}(R) = \sup_{z \in D_R} |f(z)|$, а $D_R = \left\{z : \frac{z}{R} \in D\right\}$. А. А. Гольдберг [2, гл. 3, § 1] доказал, что число ρ не зависит от выбора области D.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(t, P)$ — целая х. ф. n-мерного закона P, ξ, $\xi_1, \ldots, \xi_k$, векторы из S^n, причем вектор ξ представим в виде линейной комбинации векторов ξ_i. Предположим, что х. ф. $\varphi(t, P_\xi)$, $\varphi(t, P_{\xi_1}), \ldots, \varphi(t, P_{\xi_k})$ проекций закона имеют порядки $\rho(\xi)$, $\rho(\xi_1), \ldots, \rho(\xi_k)$. Тогда справедливо равенство $\rho(\xi) \leqslant \max[\rho(\xi_1), \ldots, \rho(\xi_k)]$.*

Вначале докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(t; P)$ — целая х. ф. n-мерного закона P и $M(r, \varphi) = M(r_1, \ldots, r_n; \varphi) = \max_{\substack{|t_i|=r_i \\ i=1, \ldots, n}} |\varphi(t)|$. Тогда $\ln M(r; \varphi)$*

является выпуклой функцией по совокупности переменных $r_1, \ldots, r_n$.

Заметим, что выпуклость $\ln M(r; \varphi)$ относительно $r_1, \ldots, r_n$ — конечно, более сильное требование, чем выпуклость относительно $\ln r_1, \ldots, \ln r_n$, которая в силу классической теоремы Валирона [2, гл. 2, § 1, с. 138] имеет место для любой целой функции $\varphi(t)$, не обязательно х. ф.

Доказательство леммы. Пусть $\eta', \eta'' \in R^n$. Из неравенства Гельдера вытекает, что при $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$ справедливо

$$\ln \varphi(i\lambda\eta' + i\mu\eta'') = \ln \int_{R^n} e^{-\lambda(\eta', x)} e^{-\mu(\eta'', x)} P(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \ln \left\{ \left[\int_{R^n} e^{-(\eta', x)} P(dx) \right]^{\lambda} \left[\int_{R^n} e^{-(\eta'', x)} P(dx) \right]^{\mu} \right\} =$$

$$= \lambda \ln \int_{R^n} e^{-(\eta', x)} P(dx) + \mu \ln \int_{R^n} e^{-(\eta'', x)} P(dx).$$

Следовательно, $\ln \varphi(i\eta)$ является выпуклой функцией по совокупности переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Справедливо равенство

$$M(r_1, \ldots, r_n) = \max_{\substack{|t_l| = r_l \\ l = 1, \ldots, n}} \left| \int_{R^n} e^{i(t, x)} P(dx) \right| =$$

$$= \max_{\substack{|t_l| = r_l \\ l = 1, \ldots, n}} \int_{R^n} e^{-(\operatorname{Im} t, x)} P(dx) = \max_{\substack{|\operatorname{Im} t_l| = r_l \\ l = 1, \ldots, n}} \int_{R^n} e^{-(\operatorname{Im} t, x)} P(dx) = \tag{1}$$

$$= \max \{\varphi(\pm r_1, \ldots, \pm r_n)\}$$

(последний max берется по всевозможным комбинациям знаков + и —).

Отсюда видно, что $\ln M(r; \varphi)$ также является выпуклой функцией $r_1, \ldots, r_n$.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть $M(r; \varphi_\xi) = \max_{|t|=r} |\varphi(t; P_\xi)|$, а $\xi = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_k\xi_k$. Положим $a_0 = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_k|$, $a_j = \frac{|\alpha_j|}{a_0}$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда $a_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{k} a_j = 1$.

С помощью леммы 1 получаем

$$\ln \varphi(i\Theta\xi) = \ln \varphi\left(i \sum_{j=1}^{k} a_j (\Theta a_0 \operatorname{sgn} \alpha_j) \xi_j\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} a_j \ln \varphi(i\Theta(a_0 \operatorname{sgn} \alpha_j) \xi_j), \quad \Theta \in R^1.$$

Отсюда видно, что

$$\ln M(r; \varphi_\xi) \leqslant \sum_{j=1}^{v} a_j \ln M(a_0 r; \varphi_{\xi_j}).$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r, \varphi_\xi)}{\ln r} \leqslant \max\left[\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(a_0 r;\ \varphi_{\xi_j})}{\ln r}\right]$$

и, значит,

$$\rho(\xi) \leqslant \max[\rho(\xi_1),\ \ldots,\ \rho(\xi_k)].$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Функция $\rho(\xi)$ на сфере S^n может принимать не более n различных значений. Неравенство*

$$\rho(\xi') < \max_{\xi\in S^n} \rho(\xi) \tag{2}$$

может выполняться только на подмножестве из S^n, лежащем в подпространстве размерности $\leqslant n-1$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Предположим, что оно неверно. Пусть

$$\rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_{n+1} \tag{3}$$

— какие-либо значения функции $\rho(\xi)$, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$ — соответствующие им единичные векторы, которые, очевидно, линейно зависимы. Следовательно, найдется вектор ξ_{j+1}, $1 \leqslant j \leqslant n$, представимый в виде $\xi_{j+1} = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_j\xi_j$. Тогда по теореме 1 имеем $\rho_{j+1} \leqslant \max[\rho_1, \ldots, \rho_j]$, что противоречит (3).

Докажем второе утверждение. Если оно неверно, то можно указать n линейно независимых векторов $\xi_1, \ldots, \xi_2$ из множества, на котором выполняется (2). Пусть ξ_0 — вектор, для которого $\rho(\xi_0) = \max\limits_{\xi\in S^n} \rho(\xi)$. Тогда $\xi_0 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$, и, применяя теорему 1, получаем противоречие.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(t;\ P)$ — целая х. ф. n-мерного закона P, ρ — ее порядок. Тогда $\rho = \max\limits_{\xi\in S^n} \rho(\xi)$.*

Доказательство. Как отмечалось выше, порядок не зависит от выбора области D. Выберем в качестве D полицилиндр $\{t: |t_j| \leqslant R,\ j = 1, \ldots, n\}$. В силу (1)

$$\ln M(R, \ldots, R;\ \varphi) = \max[\ln\varphi(\pm iR, \ldots, \pm iR]. \tag{4}$$

Обозначим через ν_j векторы вида $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$, $\eta_j = \dfrac{\nu_j}{|\nu_j|}$. Тогда равенство (4) можно переписать в виде $\ln M\ (R, \ldots, R;\ \varphi) = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant 2^n} \ln\varphi(i\nu_j R) = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant 2^n} \ln M(\sqrt{n}R;\ \varphi_{\eta_j})$. Следовательно, $\rho = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant 2^n} \rho(\eta_j) \leqslant \max\limits_{\xi_S\in^n} \rho(\xi)$.

Неравенство $\rho(\xi) \leqslant \rho$, $\xi \in S^n$ очевидно. Теорема доказана.

§ 2. Как и в случае одного переменного, порядок функции относится к числу наиболее простых и в то же время наиболее грубых характеристик роста. Л. И. Ронкин [2, гл. 3, § 1] ввел более тонкие характеристики, получаемые путем сравнения роста функции $\ln M(r_1, \ldots, r_n; f)$ с ростом функции $r_1^{a_1} + \cdots + r_n^{a_n}$.

Пусть $B_\rho = B_\rho(f)$ — множество точек $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R_+^n$, для которых выполняется асимптотическое неравенство

$$\ln M(r; f) = \ln M(r_1, \ldots, r_n; f) < r_1^{a_1} + \cdots + r_n^{a_n}. \qquad (5)$$

Очевидно, если $(a_1', \ldots, a_n') \in B_\rho$, то $\{a = (a_1, \ldots, a_n) : a_j \geqslant a_j', j = 1, \ldots, n\} \subset B_\rho$. Наоборот, если $(a_1', \ldots, a_n') \overline{\in} B_\rho$, то все точки области $\{a : a_j < a_j', j = 1, \ldots, n\}$ не принадлежат множеству B_ρ. Граница $\partial B_\rho = S_\rho$ разделяет все пространство R_+^n на две части: для одной из них неравенство (5) выполняется, для другой — нет.

Граница S_ρ множества B_ρ называется гиперповерхностью сопряженных порядков функции $f(z)$. Любая система чисел $\rho_1, \ldots, \rho_n$ называется системой сопряженных порядков функции $f(z)$, если точка $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ принадлежит S_ρ.

Сопряженные порядки характеризуют рост рассматриваемых функций по совокупности переменных. В то же время в ряде вопросов теории целых функций многих переменных возникает необходимость в характеристике роста функции по одной из переменных.

Порядок функции $\ln M(r; f)$ по переменной r_j при каких-нибудь фиксированных положительных значениях переменных r_i, $i \neq j$ называется величина

$$\bar{\rho}_j = \bar{\rho}_j(f) = \overline{\lim_{r_j \to \infty}} \frac{\ln \ln M(r; f)}{\ln r_j}.$$

Это определение корректно, поскольку $\bar{\rho}_j(f)$ не зависит от способа фиксации переменных r_i, $i \neq j$ [2, гл. 2, § 6].

Л. И. Ронкиным была доказана теорема, характеризующая свойства гиперповерхности сопряженных порядков целой функции:

Теорема. [2, гл. 3, § 1]. *Для того чтобы гиперповерхность $S \in R_+^n$, являющаяся границей некоторой области $B \subset R_+^n$, была гиперповерхностью сопряженных порядков хотя бы одной целой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы образ B^{-1} области B при отображении $a_j' = \dfrac{1}{a_j}$, $j = 1, \ldots, n$ был полной выпуклой областью.*

Для целых характеристических функций вероятностных законов гиперповерхностью сопряженных порядков может быть лишь граница гипероктанта.

Теорема 4. *Граница гипероктанта $B\{b : b_j \geqslant \bar{\rho}_j(\varphi), j = 1, \ldots, n\}$ совпадает с гиперповерхностью сопряженных порядков х. ф. $\varphi(t; P)$.*

Доказательство. Из выпуклости функции $\ln M(r; \varphi)$ следует, что

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln M(0, \ldots, r_i, \ldots, 0; \varphi) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} [\ln M(0, \ldots, r_i, \ldots, 0,$$

$$\varphi)] \leqslant \ln M(r_1, \ldots, r_n; \varphi) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln M(0, \ldots, nr_i, \ldots, 0; \varphi)$$

и, значит,

$$r_1^{\bar\rho_1-\varepsilon_1} + \cdots + r_n^{\bar\rho_n-\varepsilon_n} < \ln M(r_1, \ldots, r_n) < r_n^{\bar\rho_1+\varepsilon_1} + \cdots + r_n^{\bar\rho_n+\varepsilon_n},$$

причем правое неравенство выполняется асимптотически, а левое — для некоторой последовательности, стремящейся к бесконечности. Это показывает, что $(\bar\rho_1, \ldots, \bar\rho_n) \in S_\rho$. Тем самым теорема доказана.

Как известно [1, гл. 2, § 3], порядок ρ непостоянной целой х. ф. одного переменного не меньше 1. Если $\varphi(t) = \varphi(t_1 \ldots t_n; P)$ — целая х. ф. n-переменных, то $\varphi(t_1, 0, \ldots, 0; P), \ldots, \varphi(0, \ldots, 0, t_n; P)$ — целые х. ф. одной переменной. Отсюда вытекает, что если $\varphi(t_1, \ldots, t_n; P)$ не является постоянной по переменной t_k, то ее порядок по t_k не меньше 1.

Следовательно, порядок любой непостоянной целой х. ф. $\varphi(t)$ не может быть меньше 1.

Для целой х. ф. одного переменного существует связь между порядком роста и характеристикой убывания функции:

$$W(r) = P(\{x : |x| \geqslant r\}).$$

Теорема. (Рамачандран [1, гл. 2, § 3]). *Пусть $\varphi(t; P)$ — целая х. ф. одномерного закона P. Тогда справедливо равенство*

$$\varkappa = \frac{\rho}{\rho - 1},$$

где ρ — порядок $\varphi(t; P)$, а $\varkappa = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\ln\ln \frac{1}{W(r)}}{\ln r}$.

Для целой х. ф. многих переменных можно получить аналогичное утверждение.

Пусть $W(r_1, \ldots, r_n) = \prod\limits_{j=1}^{n} P(\{x : |x_j| \geqslant r_j\})$. Обозначим через $K(\varphi)$ множество точек $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R_+^n$, для которых выполняется асимптотическое неравенство

$$W(r_1, \ldots, r_n) < \exp\{-r_1^{a_1} - \cdots - r_n^{a_n}\}.$$

Теорема 5. *Пусть $\varphi(t; P)$ — целая х. ф. n-мерного закона P. Тогда граница множества $K(\varphi)$ совпадает с границей гипероктанта* $\left\{a : a_j \leqslant \dfrac{\bar\rho_j}{\bar\rho_j - 1},\ j = 1, \ldots, n\right\}$.

Доказательство. Обозначим $W(r_j) = P(\{x : |x_j| \geqslant r_j\})$. Тогда из теоремы Рамачандрана вытекают неравенства

$$\exp\left\{\frac{\bar{\rho}_j}{r_j^{\bar{\rho}_j - 1}} - \varepsilon_j\right\} < \frac{1}{W(r_j)} < \exp\left\{\frac{\bar{\rho}_j}{r_j^{\bar{\rho}_j - 1}} + \varepsilon_j\right\},$$

причем левое неравенство выполняется асимптотически, а правое — для некоторой последовательности, стремящейся к бесконечности. Это показывает, что

$$\left\{\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_1 - 1}, \ldots, \frac{\bar{\rho}_n}{\bar{\rho}_n - 1}\right\} \in \partial K(\varphi).$$

Тем самым теорема доказана.

§ 3. Пользуясь теоремой 4, можно охарактеризовать рост некоторого класса целых функций малого роста.

Пусть $D_\rho = D_\rho(f)$ — множество точек $a \in R_+^n$, для которых выполняется асимптотическое неравенство $\ln M(r; f) < (\ln r_1)^{a_1} + \cdots + (\ln r_n)^{a_n}$.

Границу $\partial D_\rho = L_\rho$ назовем гиперповерхностью сопряженных логарифмических порядков функции $f(z)$. Любая система чисел $\rho_1, \ldots, \rho_n$ называется системой сопряженных логарифмических порядков функции $f(z)$, если точка $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ принадлежит L_ρ.

Установим связь сопряженных логарифмических порядков с тейлоровскими коэффициентами функции.

Теорема 6. *Для того чтобы числа $\rho_1, \ldots, \rho_n$, $(\rho_i > 1)$ образовывали систему сопряженных логарифмических порядков целой функции*

$$f(z) = \sum_{\|k\|=1}^{\infty} c_k z^k,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{\|k\| \to \infty} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{\rho_i}{\rho_i - 1}}\right)}{\ln \ln \frac{1}{|c_k|}} = 1.$$

Доказательство*. Вначале докажем лемму.

Лемма. *Для того чтобы точка $(b_1, \ldots, b_n)$ принадлежала множеству D_ρ^0 внутренних точек множества D_ρ, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{\|k\| \to \infty} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{\rho_i}{\rho_i - 1}}\right)}{\ln \ln \frac{1}{|c_k|}} < 1.$$

* Это доказательство лишь в деталях отличается от доказательства соответствующих формул в случае системы обычных сопряженных порядков [2, гл. 3, § 1].

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное малое число; выберем $(a_1, \ldots, a_n) \in D_\rho^\circ$, так, чтобы для всех $i = 1, \ldots, n$ выполнялось

$$(1-\varepsilon)\frac{b_i}{b_i-1} < \frac{a_i}{a_i-1}.$$

По известному неравенству для коэффициентов степенного разложения имеем

$$|c_k| \leqslant \frac{M(r;\ f)}{\prod_{i=1}^{n} r_i^{k_i}},$$

и, следовательно, асимптотически

$$|o_k| < \prod_{i=1}^{n} \frac{\exp[(\ln r_i)^{a_i}]}{r_i^{k_i}}.$$

Пользуясь обычными приемами отыскания экстремума, легко убедиться, что функция $x^{-n}\exp[(\ln x)^b]$ принимает на полуоси $x > 0$ наименьшее значение при

$$\ln x = \left[\frac{n}{b}\right]^{\frac{1}{b-1}},$$

и, следовательно, асимптотически при $\|k\| > B > 0$

$$|c_k| < \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_i}{a_i}\right)^{\frac{a_i}{a_i-1}}(1-a_i)\right].$$

Из этой оценки следует, что

$$\varliminf_{\|k\|\to\infty} \frac{\ln\ln\frac{1}{|c_k|}}{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{a_i}{a_i-1}}\right)} \geqslant \varliminf_{\|k\|\to\infty} \frac{\ln\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_i}{a_i}\right)^{\frac{a_i}{a_i-1}}(a_i-1)\right]}{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{a_i}{a_i-1}}\right)} \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{\|k\|\to\infty} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{a_i}{a_i-1}}\right) + 0(1)}{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{a_i}{a_i-1}}\right)} = 1.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{\|k\|\to\infty} \frac{\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i^{\frac{a_i}{a_i-1}}\right)}{\ln\ln\frac{1}{|c_k|}} \leqslant 1$$

и, значит,

$$\varlimsup_{\|k\|\to\infty} \frac{(1-\varepsilon)\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i^{\frac{b_i}{b_i-1}}\right)}{\ln\ln\frac{1}{|c_k|}} \leqslant 1,$$

а

$$\varlimsup_{\|k\|\to\infty} \frac{\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i^{\frac{b_i}{b_i-1}}\right)}{\ln\ln\frac{1}{|c_k|}} < 1.$$

Необходимость доказана.

Предположим, теперь, что числа $b_1, \ldots, b_n$ удовлетворяют условию

$$\varlimsup_{\|k\|\to\infty} \frac{\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i^{\frac{b_i}{b_i-1}}\right)}{\ln\ln\frac{1}{|c_k|}} < 1.$$

Тогда найдутся такие числа $\varepsilon_1 > 0$, $m_{\varepsilon_1} > 0$, что при $\|k\| > m_{\varepsilon_1}$ выполняется неравенство

$$\frac{\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i^{\frac{b_i}{b_i-1}}\right)}{\ln\ln\frac{1}{|c_k|}} \leqslant 1-\varepsilon_1,$$

и, следовательно,

$$|c_k| \leqslant \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{1}{1-\varepsilon_1}\frac{b_i}{b_i-1}}\right] = \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{b_i-\varepsilon_2}{b_i-\varepsilon_2-1}}\right].$$

Из этих оценок коэффициентов c_k следует, что

$$M(r;f) \leqslant \sum_{\|k\|\leqslant m_{\varepsilon_1}} |c_k|\, r^k + \sum_{\|k\|=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \exp\left[-k_i^{\frac{b_i-\varepsilon_2}{b_i-\varepsilon_2-1}}\right] r_i^{k_i} =$$

$$= \sum_{\|k\|\leqslant m_{\varepsilon_1}} |c_k|\, r^k + \prod_{i=1}^{n} \sum_{k_i=0}^{\infty} \exp\left[-k_i^{\frac{b_i-\varepsilon_2}{b_i-\varepsilon_2-1}}\right] r_i^{k_i}.$$

При $k_i > m_{r_i} = [(\ln 2r_i)^{b_i-\varepsilon_2-1} + 1]$ выполняется

$$\exp\left[-k_i^{\frac{b_i-\varepsilon_2}{b_i-\varepsilon_2-1}}\right] r_i^{k_i} < 2^{-k_i}$$

и, следовательно,

$$M(r; f) < \sum_{\|k\| \leqslant m_{\varepsilon_1}} |c_k| r^k + \prod_{i=1}^{n} \left[\sum_{k_i=0}^{m_{r_i}} \exp\left(-k_i^{\frac{b_i-\varepsilon_2}{b_i-\varepsilon_2-1}}\right) r_i^{k_i} + 2^{-m_{r_i}}\right].$$

Если ввести обозначения

$$\mu(r_i) = \max_{k_i}\left[\exp\left(-k_i^{\frac{b_i-\varepsilon_2}{b_i-\varepsilon_2-1}}\right) r_i^{k_i}\right],$$

то получится

$$M(r; f) < \sum_{\|k\| < m_{\varepsilon_1}} |c_k| r^k + \prod_{i=1}^{n} \{[1 + (\ln 2r_i)^{b_i-\varepsilon_2-1}] \mu(r_i) + 2^{-m_{r_i}}\}.$$

Как легко видеть,

$$\max_x\left[\exp\left(-x^{\frac{b_i-\varepsilon_2}{b_i-\varepsilon_2-1}}\right) r_i^x\right]$$

достигается при

$$x = \left(\frac{b_i - \varepsilon_2 - 1}{b_i - \varepsilon_2} \ln r_i\right)^{b_i-\varepsilon_2-1},$$

и, следовательно,

$$\mu(r_i) \leqslant \exp\left[\left(\frac{b_i - \varepsilon_2 - 1}{b_i - \varepsilon_2}\right)^{b_i-\varepsilon_2-1} \frac{1}{b_i - \varepsilon_2} (\ln r_i)^{b_i-\varepsilon_2}\right],$$

а значит, асимптотически

$$M(r; f) < \prod_{i=1}^{n} \exp\left[(\ln r_i)^{b_i-\varepsilon_3}\right].$$

Отсюда заключаем, что $b \in D_\rho^\circ$. Лемма доказана. Теперь пусть

$$\overline{\lim_{\|k\| \to \infty}} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{\rho_i}{\rho_i-1}}\right)}{\ln\ln \frac{1}{|c_k|}} = 1.$$

Согласно лемме, точка $(\rho_1, \ldots, \rho_n) \overline{\in} D_\rho^\circ$ и, как нетрудно видеть, при $t \to 1 + 0$ она является предельной для точек $(\rho_1 t, \ldots, \rho_n t) \in D_\rho^\circ$. Следовательно, точка $(\rho_1, \ldots, \rho_n) \in L_\rho$.

Наоборот, пусть $(\rho_1, \ldots, \rho_n) \in L_\rho$ и $\rho_1 > 1, \ldots, \rho_n > 1$. Тогда, по той же лемме,

$$\overline{\lim_{\|k\|\to\infty}} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{\rho_i}{\rho_i - 1}}\right)}{\ln\ln\frac{1}{|c_k|}} \geqslant 1. \tag{6}$$

Так как множество $\overline{D}_\rho$ октантообразно, при $t > 1$ получаем

$$\overline{\lim_{\|k\|\to\infty}} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{1}{t}\frac{\rho_i}{\rho_i - 1}}\right)}{\ln\ln\frac{1}{|c_k|}} < 1 \ \forall t > 1.$$

и

$$\overline{\lim_{\|k\|\to\infty}} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{\rho_i}{\rho_i - 1}}\right)}{\ln\ln\frac{1}{|c_k|}} < t \ \forall t > 1.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{\|k\|\to\infty}} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{\rho_i}{\rho_i - 1}}\right)}{\ln\ln\frac{1}{|c_k|}} \leqslant 1.$$

Отсюда и из (6) вытекает, что

$$\overline{\lim_{\|k\|\to\infty}} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\frac{\rho_i}{\rho_i - 1}}\right)}{\ln\ln\frac{1}{|c_k|}} = 1.$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Гиперповерхности сопряженных логарифмических порядков целых функций* $f(z) = \sum_{\|k\|=1}^{\infty} c_k z^k$ и $f_1(z) = \sum_{\|k\|=1}^{\infty} |c_k| z^k$ *совпадают.*

Теорема 7. *Гиперповерхность сопряженных логарифмических порядков целой функции* $f(z) = \sum_{\|k\|=1}^{\infty} c_k z^k$ *совпадает с границей некоторого гипероктанта.*

Доказательство. Рассмотрим закон P, определяемый равенством

$$P(\{k_1, \ldots, k_n\}) = \frac{|c_{k_1, \ldots, k_n}|}{A},$$

где $A = \sum_{\|k\|=1}^{\infty} |c_k|$.

Его х. ф. равна

$$\varphi(t; P) = \frac{1}{A} \sum_{\|k\|=1}^{\infty} |c_k| e^{i(t, k)}.$$

Так как $M(r_1, \ldots, r_n; \varphi) = \frac{1}{A} M(e^{r_1}, \ldots, e^{r_n}; f)$, то, очевидно, гиперповерхность сопряженных логарифмических порядков функции $f(z)$ совпадает с гиперповерхностью сопряженных порядков функции $\varphi(t; P)$. Следовательно, из теоремы 5 вытекает, что гиперповерхность сопряженных логарифмических порядков $f(z)$ совпадает с границей гипероктанта.

Замечание. Теорему 7 можно было бы получить с помощью теоремы Валирона [2, гл. 2, § 1, с. 138].

Автор выражает глубокую благодарность И. В. Островскому за постановку задачи и научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложение случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972. 476 с.
2. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.