УДК 517.948.324—517.518.6.

Г. Н. Гестрин

ФОРМУЛА КЕЛДЫША — СЕДОВА В СЛУЧАЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

Рассматривается задача об определении в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ аналитической почти-периодической функции по значениям ее вещественной и мнимой частей, задаваемых на почти-периодическом множестве отрезков оси ox и на смежных с ними интервалах соответственно, а также по некоторым дополнительным условиям, характеризующим поведение искомой функции при $\operatorname{Im} z \to +\infty$ и в окрестностях концов упомянутых отрезков.

Решение представляется формулой, являющейся распространением на рассматриваемый случай формулы Келдыша — Седова.

В частности, когда обе заданные на действительной оси функции равны нулю, указанная задача может быть истолкована как *«контактная электростатическая задача» о перераспределении заряда* между почти-периодической ленточной решеткой и равномерно заряженной плоскостью при их соприкосновении с последующим разделением.

Переходим к точной постановке вопроса.

Пусть в плоскости z на оси ox задана бесконечная система отрезков

$$\begin{gathered} \ldots, [-b_k, -a_k], \ldots, [-b_1, -a_1], \\ [a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k], \ldots \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, a_{k-1} < b_{k-1} < a_k, \ a_k \to +\infty \text{ при } k \to \infty).$$

Предполагаются выполненными следующие условия:

а) числовая последовательность $\{c_s\} = \{\ldots -b_2, \ -b_1 \ a_1, a_2, \ldots\}$ почти-периодична, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $l = l(\varepsilon)$ такое, что каждый интервал длины l содержит τ, для которого

$$|c_s + \tau - c_{s+r}| < \varepsilon, \tag{1.2}$$

где r не зависит от s;

б)

$$d = \inf_k (b_k - a_k) > 0; \tag{1.3}$$

в) точка $\lambda = 0$ принадлежит множеству L таких λ, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_{|c_s| < T} e^{i\lambda c_s} \neq 0 \tag{1.4}$$

как изолированная.

определение точечного почти-периодического множества более общее, чем в пункте а), см. в кн. [1].

Требуется построить аналитическую при $\operatorname{Im} z > 0$ функцию $f(z)$, обладающую свойствами:

1) $f(z)$ — равномерная почти-периодическая функция от x при каждом $y > 0$;

2) $\operatorname{Re} f(z) = \varphi(x)$ на интервалах

$$\ldots(-b_k, -a_k), \ldots, (-b_1, -a_1),$$
$$(a_1 b_1), \ldots, (a_k, b_k), \ldots; \tag{1.5}$$

$\operatorname{Im} f(z) = \psi(x)$ на смежных интервалах, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные боровские почти-периодические функции*;

3) существует последовательность окружностей $|z| = R_n$, $R_n \to \infty$, на которых $f(z)$ при достаточно большом $|x|$ допускает оценку вида

$$|f(z)| < A + B \ln \frac{R_n}{y} \tag{1.6}$$

(A и B — постоянные);

4

$$g(z) = (f(z) + i\pi Q)\sqrt{\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{a_k^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{b_k^2}\right)}^{**}, \tag{1.7}$$

где Q — заданная действительная постоянная, равномерно по x стремится к нулю при $y \to +\infty$ и ограничена в точках $\pm a_k \pm b_k$.

§ 2. Формальное решение задачи.

Предположив существование решения сформулированной задачи, легко найти его в явном виде, установив тем самым его единственность и выяснив, какие моменты нуждаются в обосновании.

Фиксируя z и выбирая R_n и y_0 так, чтобы было $|z| < y_0 < R_n$, имеем очевидную оценку

$$\left| \int_{C_{R_n}} \frac{g(\eta)\, d\eta}{\eta - z} \right| \leqslant \frac{\pi R_n \max\limits_{\operatorname{Im}\eta \geqslant y_0} |g(\eta)|}{\min\limits_{\operatorname{Im}\eta \geqslant y_0} |R_n e^{i\theta} - z|} +$$
$$+ \max_{\operatorname{Im}\eta \leqslant y_0} \left| \sqrt{\prod_1^\infty \left(1 - \frac{\eta^2}{a_k^2}\right)\left(1 - \frac{\eta^2}{b_k^2}\right)} \right| \left[\pi |Q| + A + B \ln R_n\right) +$$
$$+ \frac{2R_n \alpha_n}{\min\limits_{\operatorname{Im}\eta \leqslant y_0} |R_n e^{i\theta} - z|} + \frac{2R_n B}{\min\limits_{\operatorname{Im}\eta \leqslant y_0} |R_n e^{i\theta} - z|} \int_0^{\alpha_n} |\ln y|\, d\theta \Big], \tag{2.1}$$

---

* Необходимые дополнительные свойства функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будут указаны в конце работы.

** Ветвь корня выбирается ниже, сходимость произведения под корнем вытекает из (1.3).

где α_n — центральный угол, отвечающий дугам C_{R_n} при $Im\,\eta <$ $< y_0 \left(\alpha_n = \arcsin \frac{y_0}{R_n}\right)$.

Если корень в (2.1) равномерно ограничен в каждой полосе $0 \leqslant Im\,\eta \leqslant y_0$, то первое слагаемое в правой части (2.1) можно сделать как угодно малым, выбрав достаточно большим y_0 (условие (1.7)), а малости второго можно добиться последующим увеличением R_n. Следовательно, интегралы

$$\int\limits_{C_{R_n}} \frac{g(\eta)\,d\eta}{\eta - z}; \qquad \int\limits_{C_{R_n}} \frac{g(\eta)\,d\eta}{\eta - z} \tag{2.2}$$

исчезают при $R_n \to \infty$, и справедливы равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\eta)\,d\eta}{\eta - z} = 2\pi i\, g(z), \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\eta)\,d\eta}{\eta - \bar{z}} = 0.$$

Переходя во втором из них к комплексно сопряженным величинам и вычитая его из первого, сразу получаем формулу Келдыша — Седова*

$$f(z) = -i\pi Q + \frac{1}{\pi\sqrt{\Phi(z)}} \sum_k \left(\int\limits_{\Delta_k} \frac{\varphi(\xi)\,\mathrm{Im}\sqrt{\Phi(\xi)}^{+} d\xi}{\xi - z} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\delta_k} \frac{(\psi(\xi) + \pi Q)\,\mathrm{Re}\sqrt{\Phi(\xi)}^{+} d\xi}{\xi - z} \right), \tag{2.3}$$

где Δ_k — заданные отрезки, δ_k — смежные интервалы.

Если, в частности, $\varphi = 0$ и $\psi = 0$, то

$$f(z) = -i\pi Q + \frac{Q}{\sqrt{\Phi(z)}} \sum_k \int\limits_{\delta_k} \frac{\mathrm{Re}\sqrt{\Phi(\xi)}^{+}\, d\xi}{\xi - z}, \tag{2.4}$$

и, полагая

$$f(z) = i\pi Q + \frac{Q}{\sqrt{\Phi(z)}} \sum_k \int\limits_{\delta_k} \frac{\mathrm{Re}\sqrt{\Phi(\xi)}^{+} d\xi}{\xi - z} \quad (\mathrm{Im}\, z < 0), \tag{2.5}$$

продолжим аналитически $f(z)$ в нижнюю полуплоскость через интервалы δ_k. В предположении почти-периодичности и равномерного по x убывания интегральных слагаемых в (2.4) и (2.5) приходим к формуле

$$M(v^{+} - v^{-}) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \sum_{\Delta_k = \in [-T, +T]} \int\limits_{\Delta_k} (v^{+} - v^{-}) \times$$
$$\times dx = 2\pi Q, \tag{2.6}$$

---

* $\Phi(z)$ означает подкоренное произведение в (1.7), $\sqrt{\Phi(z)}^{+}$ — предельное значение $\sqrt{\Phi(z)}$ при подходе из верхней полуплоскости к вещественной оси.

где v^+ и v^- — предельные значения на оси ox мнимой части $f(z)$, равные нулю на интервалах δ_k.

Именно формула (2.6) позволяет интерпретировать рассматриваемый частный случай задачи электростатически в соответствии с введением.

Пусть система тонких проводящих лент с краями, перпендикулярными к осям ox и oy, пересекает ось ox по отрезкам (1.1). Естественно предположить, что при соприкосновении такой системы с равномерно заряженной плоскостью, заряд, остающийся на лентах после удаления плоскости, возбудит в пространстве почти-периодическое поле $f(z) = E_x - iE_y$. При этом среднее значение Q плотности заряда на лентах будет равно убыли его плотности на плоскости. Компоненты вектора напряженности следует подчинить требованиям:

1) $E_x(x, y) = -E_x(-x, y)$; $E_x(x, -y) = E_x(x, y)$;

$$E_y(x, y) = E_y(-x, y);\ E_y(x, -y) = -E_y(x, y);$$

2) $E_x = 0$ на металле и стремится к нулю при $|y| \to \infty$;

3) $E_y = 0$ на щелях и стремится к $\pm \pi Q$ при $y \to \pm\infty$ (гипотезы о поведении E_x и E_y на бесконечности, заменяющие предположение о характере распределения заряда на лентах, заимствуются из рассмотрения случая сплошной равномерно заряженной плоскости);

4) E_x и E_y вблизи краев лент имеют корневые особенности (это согласуется с наличием такого рода особенностей в задаче о свободном распределении заряда на одиночной ленте и с конечностью энергии поля в окрестностях концов лент).

С точки зрения приведенной интерпретации условия (1.6) представляют собой обобщения того факта, что на последовательности окружностей, проходящих через середины щелей, ширина которых не стремится к нулю, поле остается ограниченным.

Требование (1.7) непосредственно не диктуется физическими или геометрическими соображениями, а вводится для обеспечения единственности и в этом смысле напоминает условия излучения в электродинамике, которые содержат в себе большее, чем наличие распространяющейся волны на бесконечности.

Из сказанного в настоящем параграфе следует, что обоснованию подлежат лишь следующие утверждения.

1. Почти-периодичность произведения

$$\Phi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{a_k^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{b_k^2}\right) \tag{2.7}$$

и функции $\sqrt{\Phi(z)}$ (с должным образом выбранной ветвью).

2. Почти-периодичность функций

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \sqrt{\Phi(\xi)}^{+} d\xi}{\xi - z}, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi) \operatorname{Im} \sqrt{\Phi(\xi)}^{+} d\xi}{\xi - z},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\xi) \operatorname{Re} \sqrt{\Phi(\xi)}^{+} d\xi}{\xi - z} \tag{2.8}$$

и их равномерное по x убывание при $\operatorname{Im} z \to +\infty$.

3. Существование окружностей с неограниченно увеличивающимся радиусом, на которых $(\sqrt{\Phi(z)})^{-1}$ остается равномерно ограниченной, а также существование оценки вида (1.6) для интегралов, входящих в формулу (2.3).

Выяснив попутно условия, налагаемые на $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, установим для функции $f(z)$, определенной формулой (2.3), свойства 1), 3), 4).

Проверка свойства 2) может быть проведена так же, как и в случае обычного вывода формулы Келдыша — Седова (см., например, [3]).

§ 3. Основные леммы

Исследование свойств $\Phi(z)$ основывается на очевидной связи с функцией

$$\Phi_0(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - c_s} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{z + b_k} \right); \tag{3.1}$$

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = -2z \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_k^2 - z^2} + \frac{1}{b_k^2 - z^2} \right) = \Phi_0(z) - \Phi_0(-z) \tag{3.2}$$

(так как $a_k > (k-1)d$, $0 < b_k - a_k < a_{k+1} - a_k$ и в силу пункта а разности $a_{k+1} - a_k$ ограничены сверху, то ряд (3.1) сходится равномерно во всякой конечной области, не содержащей точек a_k, $-b_k$).

Лемма 1. *$\Phi_0(z)$ — равномерная почти-периодическая функция от x при каждом $y \neq 0$, и ее показатели Фурье принадлежат множеству L.*

Доказательство первого утверждения леммы почти не отличается от доказательства аналогичного утверждения из [1, с. 583], где предполагается более определенное поведение последовательности $\{c_s\}$ ($c_k = ck + \psi(k)$), где c — константа; $\psi(k)$ — ограниченная функция). Оно воспроизводится здесь, поскольку является весьма кратким.

Пусть τ — ε — почти-период последовательности $\{c_s\}$.

Тогда

$$\Phi_0(z-\tau)-\Phi_0(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-\tau-c_s}-\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-c_s}=$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-c_{s+r}+\nu_s}-\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-c_{s+r}},$$

где $|\nu_s|<\varepsilon$. Поэтому

$$|\Phi_0(z-\tau)-\Phi_0(z)|<\varepsilon\frac{1}{\sqrt{[(x-c_s+\nu_{s-r})^2+y^2]\,[(x-c_s)^2+y^2]}}.$$

Если $c_j\leqslant x<c_{j+1}$, то при достаточно малом ε точка $x+\nu_{s-r}$ находится в одном из соседних интервалов (c_{j-1}, c_j), (c_j, c_{j+1}), (c_{j+1}, c_{j+2}) и по свойству б) можно записать

$$|\Phi_0(z)-\Phi_0(z-\tau)|<\varepsilon\left\{\frac{3}{y^2}+2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2d^2+y^2}\right\}, \tag{3.3}$$

что и доказывает почти-периодичность $\Phi_0(z)$.

Для доказательства второго утверждения оценим рассматриваемую функцию $\Phi_0(z)$ на окружности C_{R_m} с центром в начале координат и радиусом $R_m=\frac{1}{2}(a_m+b_m)$. Из (3.1) следует

$$|\Phi_0(z)|_{C_{R_m}}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2R_m+\sup\limits_k(b_k-a_k)}{\sqrt{(R_m^2-2xa_k+a_k^2)(R_m^2+2xb_k+b_k^2)}}.$$

Так как на промежутке $(-R_m, R_m)$ находящийся под корнем квадратный трехчлен неотрицателен и $a_kb_k>0$, то он достигает минимума на одном из концов промежутка, и этот минимум равен меньшему из чисел $(R_m-a_k)^2(R_m+b_k)^2$ и $(R_m-b_k)^2(R_m+a_k)^2$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что при $a_kb_k>R_m^2$ он равен первому из них, а при $a_kb_k<R_m^2$ — второму.

Продолжая оценку (3.4), получаем

$$\begin{aligned}|\Phi_0(z)|_{C_{R_m}}&\leqslant(2R_m+\sup_k(b_k-a_k))\left\{\frac{1}{(R_m+a_m)(b_m-R_m)}+\right.\\&\left.+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{(R_m+a_k)(R_m-b_k)}+\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{(a_k-R_m)(b_k+R_m)}\right\}\leqslant\\&\leqslant(2R_m+\sup_k(b_k-a_k))\left\{\frac{3}{R_md}+\frac{1}{R_m}\left(\frac{1}{(m-2)d}+\frac{1}{(m-3)d}+\right.\right.\\&\left.\left.+\dots+\frac{1}{d}+\frac{2}{d}\right)+\left(\frac{1}{d(2R_m+2d)}+\frac{1}{2d(2R_m+3d)}+\dots\right)\right\}<\\&<\mathrm{const}\ln R_m.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Возьмем теперь контур, составленный из части окружности c_{R_m} и ее хорды $\operatorname{Im} z = a$ $(a > 0)$, расположенной ниже хорды. Пусть $\lambda > 0$. Вычисляя вычеты функции $\Phi_0(z)e^{-i\lambda z}$ и деля результат на $2R_m$, находим

$$\frac{1}{2R_m}\int\limits_{-\sqrt{R_m^2-a^2}}^{+\sqrt{R_m^2-a^2}} \Phi_0(x+ia)\,e^{-i\lambda x}\,dx e^{\lambda a} + \int\limits_{CR_m} \frac{\Phi_0(\eta)\,e^{-i\lambda\eta}\,d\eta}{2\,|\eta|} = -\frac{\pi i}{R_m}\sum_{|c_s|<R_m} e^{-i\lambda c_s}.$$

Согласно оценке (3.5), множитель $\Phi_0(\eta)\,|\eta|^{-1}$ равномерно стремится к нулю при $R_m \to \infty$ и второй интеграл исчезает по лемме Жордана. Используя уже доказанную выше почти-периодичность $\Phi_0(x+ia)$, можем записать

$$M_x\{\Phi_0(x+ia)\,e^{-i\lambda x}\} = \begin{cases} -2\pi i e^{-\lambda a}\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\sum\limits_{|c_s|<T} e^{-i\lambda c_s} & (\lambda > 0), \\ 0 & (\lambda < 0). \end{cases} \tag{3.6}$$

Аналогично

$$M_x\{\Phi_0(x-ia)\,e^{-i\lambda x}\} = \begin{cases} 0 & (\lambda > 0), \\ 2\pi i e^{\lambda a}\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\sum\limits_{|c_s|<T} e^{-i\lambda c_s} & (\lambda < 0). \end{cases} \tag{3.7}$$

Этим завершается доказательство леммы.

Отметим существенную для дальнейшего формулу. Пусть $\xi > 0$. Тогда

$$M_x\{\Phi_0(x+i\xi)\,e^{-i\lambda x}\} - M_x\{\Phi_0(-x-i\xi)\,e^{-i\lambda x}\} =$$
$$= \begin{cases} -2\pi i\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{e^{-\lambda\xi}}{2T}\sum\limits_{|c_s|<T} 2\cos\lambda c_s & (\lambda \geqslant 0), \\ 0 & (\lambda < 0), \end{cases} \tag{3.8}$$

т. е. спектр функции $\Phi_0(x+i\xi) - \Phi_0(-x-i\xi)$ неотрицателен, содержится в L и $\lambda = 0$ — его изолированная точка.

Лемма 2. *$\Phi(z)$ при всех y является равномерной почти-периодической функцией от x. Существует последовательность окружностей неограниченно увеличивающегося радиуса, на которых $\Phi(z)$ равномерно ограничена снизу.*

Доказательство. Пусть, например, $y_0 > 0$. Интегрируя тождество (3.2), получаем

$$\Phi(z) = \Phi(x_0+iy_0)\exp\left\{i\int\limits_{y_0}^{y}[\Phi_0(x_0+i\xi) - \Phi_0(-x_0-i\xi)]\,d\xi + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{x_0}^{x}[\Phi_0(\xi+iy) - \Phi_0(-\xi-iy)]\,d\xi\right\}. \tag{3.9}$$

Так как среднее значение аналитической почти-периодической функции $\Phi_0(\xi+iy)$ от y не зависит (при $y\to\infty$ она равномерно относительно x стремится к этому среднему, имея только неотрицательные показатели Дирихле [2]), то

$$M(\Phi_0(\xi+iy)-\Phi_0(-\xi-iy))=M(\Phi_0(\xi+iy))-\overline{M(\Phi_0(\xi+iy))}= = 2ic_0,$$

где c_0 — вещественное число. Поэтому функция $\Phi_0(\xi+iy)-\Phi_0(-\xi-iy)-2ic_0$ в силу (3.8) имеет только положительные показатели Дирихле и притом ограниченные снизу (см. § 1, условие в)). Следовательно, по теореме Фавара [2] интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{x}[\Phi_0(\xi+iy)-\Phi_0(-\xi-iy)-2ic_0]\,d\xi$$

есть равномерная почти-периодическая функция. Отсюда вытекает равномерная почти-периодичность при $y>0$ функции $\Phi(z)$. Ввиду четности по z ей отвечает ряд Дирихле

$$\Phi(z)\sim\sum_k\Phi_k\cos\lambda_k z. \tag{3.10}$$

Если $y=\pm\sigma$ — две фиксированные прямые, то с помощью коэффициентов Φ_k можно образовать последовательность полиномов Бохнера — Фейера, равномерно сходящуюся к $\Phi(z)$ в полосах $\varepsilon\leqslant y\leqslant\sigma$ и $-\sigma\leqslant y\leqslant-\varepsilon$ с произвольно малым ε (см. [2, ч. II, гл. 1, теорема 1. 3. 5]).

Однако из равномерной сходимости на прямых $y=\pm\sigma$ указанной последовательности следует ее равномерная сходимость в полосе $|y|\leqslant\sigma$ (см. [2, ч. II, гл. 1, теорема 1. 1. 6]). Поэтому, с одной стороны, на вещественной оси получаем равномерную почти-периодическую функцию. С другой стороны, из интегральной формулы Коши ясно, что на каждом конечном интервале вещественной оси она совпадает с $\Phi(z)$, так что последняя почти-периодична и при $y=0$. Отсюда же видно, что $\Phi(x+iy)\to\Phi(x)$, когда $y\to0$ равномерно на всей оси ox.

Перейдем к доказательству второго утверждения леммы. Рассмотрим легко проверяемое тождество

$$\Phi(\tau+i)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\tau}{a_k}\right)\left(1+\frac{\tau}{a_k}\right)\left(1-\frac{\tau}{b_k}\right)\left(1+\frac{\tau}{b_k}\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{i}{a_k-\tau}\right)\left(1+\frac{i}{a_k+\tau}\right)\left(1-\frac{i}{b_k-\tau}\right)\left(1+\frac{i}{b_k+\tau}\right)= \tag{3.11}$$

$$=\Phi(\tau)\lim_{N\to\infty}\prod_{-N}^{+N}\left(1+\frac{i}{c_s+\tau}\right)\lim_{N\to\infty}\prod_{-N}^{+N}\left(1-\frac{i}{c_s-\tau}\right).$$

Пусть ε — произвольно малое число. Выберем τ в соответствии с пунктом а) определения почти-периодичности последовательности $\{c_s\}$. Тогда (3.11) можно переписать в виде

$$\Phi(\tau+i)=\Phi(\tau)\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{i}{c_{s+r}+\nu_s}\right)\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{i}{c_{s+r}-\tau}\right)=$$

$$=\Phi(\tau)\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{i}{c_s+\nu_{s-r}}\right)\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{i}{c_s+\nu_s}\right)=$$

$$=\Phi(\tau)\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{i(\nu_s-\nu_{s-r})+1}{(c_s+\nu_{s-r})(c_s+\nu_s)}\right),$$

где $|\nu_s|<\varepsilon$.

Из ограниченности последнего произведения вытекает оценка

$$|\Phi(\tau+i)|\leqslant C|\Phi(\tau)|. \tag{3.12}$$

Устремим $\varepsilon=\varepsilon_n$ к нулю, выбирая соответствующие $\tau=\tau_n$ неограниченно возрастающими почти-периодами функции $\Phi_0(x+iy)$ увеличивающейся точности. (Это можно осуществить даже равномерно по $y>y_0, >0$, учитывая (3.2)). Те же τ_n будут последовательностью почти-периодов увеличивающейся точности и для $\Phi(x+i)$ (в силу (3.9) и теоремы о неопределенном интеграле равномерной почти-периодической функции), т. е. $\Phi(\tau_n+i)\to\Phi(i)$. Неравенство (3.12) показывает, что $|\Phi(\tau_n)|$ ограничена снизу при $\tau_n\to\infty$. Теперь легко доказать существование требуемой последовательности окружностей. Действительно, при $|z|=\tau_n$

$$|\Phi(z)|^2=\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{2x^2-\tau_n^2}{a_k^2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{4x^2(\tau_n^2-x^2)}{a_k^4}\right\}\left\{\left(1-\frac{2x^2-\tau_n^2}{b_k^2}\right)^2+\frac{4x^2(\tau_n^2-x^2)}{b_k^4}\right\}.$$

Каждый множитель, находящийся в фигурных скобках, убывает с ростом x^2. Следовательно,

$$|\Phi(z)|^2_{C_{\tau_n}}\geqslant\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\tau_n^2}{a_k^2}\right)^2\left(1-\frac{\tau_n^2}{b_k^2}\right)^2=|\Phi(\tau_n)|^2. \tag{3.13}$$

Этим завершается доказательство леммы 2.

Перейдем к непосредственным следствиям из доказанных утверждений. Положим

$$\sqrt{\Phi(z)}=\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{\left(1-\frac{z^2}{a_k^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{b_k^2}\right)}, \tag{3.14}$$

определив множитель с номером k как однозначную аналитическую функцию в плоскости с разрезами вдоль отрезков $[-b_k, -a_k]$, $[a_k, b_k]$ и приписав ему значение $+1$ при $z=0$. Тогда получим однозначную функцию во всей плоскости с разрезами вдоль системы (1.1). При этом удовлетворяется уравнение

$$\frac{2(\sqrt{\Phi(z)})'}{\sqrt{\Phi(z)}} = \Phi_0(z) - \Phi_0(-z), \tag{3.15}$$

вытекающее прямо из (3.2) и приводящее к соотношению

$$\sqrt{\Phi(z)} = \sqrt{\Phi(x_0 + iy_0)} \exp\left\{\frac{i}{2}\int_{y_0}^{y} [\Phi_0(x_0 + i\xi) - \Phi_0(-x_0 - i\xi)\, d\xi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} [\Phi_0(\xi + iy) - \Phi_0(-\xi - iy)]\, d\xi\right\}, \tag{3.16}$$

аналогичному (3.9). Из (3.16), как и выше, заключаем, что $\sqrt{\Phi(z)}$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$ является почти-периодической функцией, причем ее спектр не сгущается к нулю. Наконец, согласно определению (3.14), $\sqrt{\Phi(z)}$ есть четная функция от z, так как при замене z на $-z$ отдельные множители сохраняют знак.

При доказательстве леммы 2 отмечалось, что $\Phi(z) \to \Phi(x)$ равномерно на всей вещественной оси, когда $y \to 0$. Отсюда легко заключить, что $\sqrt{\Phi(z)} \to \sqrt{\Phi(x)^+}$ также равномерно на всей оси, и, значит, $\operatorname{Re}\sqrt{\Phi(x)^+}$ является четной почти-периодической функцией с несгущающимся в нуле спектром.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}\sqrt{\Phi(\xi)}^+\, d\xi}{\xi - z} = \sum_k \int_{\delta_k} \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}^+\, d\xi}{\xi - z}. \tag{3.17}$$

Интегрирование по частям дает (при $\operatorname{Im} z \neq 0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}\sqrt{\Phi(\xi)}^+\, d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z}\int_0^{\xi} \operatorname{Re}\sqrt{\Phi(t)}^+\, dt \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\xi} \operatorname{Re}\sqrt{\Phi(t)}^+\, dt\, \frac{d\xi}{(\xi - z)^2}. \tag{3.18}$$

Внеинтегральное слагаемое исчезает в силу существования среднего значения $M\{\operatorname{Re}\sqrt{\Phi(t)}^+\}$ и четности функции $\operatorname{Re}\sqrt{\Phi(t)}^+$. Остающийся интеграл существует и представляет собой почти-периодическую функцию, равномерно убывающую по x при $y \to +\infty$.

Второе утверждение леммы 2 позволяет легко проверить, что функция $\left(\sqrt{\Phi(z)}\right)^{-1}$ равномерно относительно x стремится к нулю при $y \to +\infty$. Достаточно взять контур, состоящий из дуги верхней полуокружности C_{τ_n} и хорды, параллельной вещественной оси. Если $\lambda > 0$, то

$$\lim_{\tau_n \to \infty} \frac{1}{2\tau_n} \int\limits_{-\sqrt{\tau_n^2 - y^2}}^{+\sqrt{\tau_n^2 - y^2}} \frac{e^{i\lambda\xi} d\xi}{\Phi(\xi + iy)} + \lim_{\tau_n \to \infty} \int\limits_{C_{\tau_n}} \frac{e^{i\lambda\eta} d\eta}{\sqrt{\Phi(\eta)\, 2\,|\eta|}} = 0. \tag{3.19}$$

Так как $\left|\left(\sqrt{\Phi(\eta)}\right)\right|^{-1} < \text{const}$ на дуге C_{τ_n}, то второй интеграл стремится к нулю по лемме Жордана, и получаем

$$M_\xi \left\{ \frac{e^{i\lambda\xi}}{\sqrt{\Phi(\xi + iy)}} \right\} = 0. \tag{3.20}$$

Таким образом, показатели Дирихле $\left(\sqrt{\Phi(z)}\right)^{-1}$ в верхней полуплоскости неотрицательны, и вдоль мнимой оси она стремится к нулю. Отсюда и следует требуемое.

По аналогии с (3.17) можно рассмотреть другие интегральные слагаемые, содержащиеся в (2.3).

Имеет место

Лемма 3. *Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — боровские почти-периодические функции, причем первая нечетна, а вторая — четна и интегралы*

$$\int\limits_0^\xi \varphi(t) \operatorname{Im} \sqrt{\Phi(t)}^+ dt \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\xi \psi(t) \operatorname{Re} \sqrt{\Phi(t)}^+ dt \tag{3.21}$$

ограничены, то функции

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\eta) \operatorname{Im} \sqrt{\Phi(\eta)}^+ d\eta}{\eta - z} \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\eta) \operatorname{Re} \sqrt{\Phi(\eta)}^+ d\eta}{\eta - z}$$

при каждом $y > 0$ почти-периодичны и равномерно стремятся к нулю при $y \to +\infty$. Кроме того,

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\eta) \operatorname{Im} \sqrt{\Phi(\eta)}^+ d\eta}{\eta - z} \right| < \frac{A_1}{|x|} + 2B_1 \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} + C_1 \tag{3.22}$$

(A_1, B_1, C_1 — некоторые постоянные).

Такая же оценка верна и для второго интеграла.

Доказательство. Первое утверждение немедленно вытекает из тождества

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\eta) \operatorname{Im} \sqrt{\Phi(\eta)}^+ d\eta}{\eta - z} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^\eta \varphi(t) \operatorname{Im} \sqrt{\Phi(t)}^+ dt \frac{d\xi}{(\xi - z)^2} \tag{3.23}$$

(внеинтегральное слагаемое обращается в нуль ввиду того, что $\operatorname{Im}\sqrt{\Phi(t)}^+$ — нечетная функция; почти-периодичность и равномерное убывание интеграла в правой части при $y \to +\infty$ является непосредственным следствием ограниченности интегралов (3.21).

Обозначив для краткости через $q(\xi)$ почти-периодическую функцию $\int\limits_0^{\xi} \varphi(t) \operatorname{Im}\sqrt{\Phi(t)}^+ dt$, перепишем (3.23) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\eta) \operatorname{Im}\sqrt{\Phi(\eta)}^+ d\eta}{\eta - z} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi) - q(x)}{(\xi - z)^2} d\xi =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{-2x} + \int\limits_{2x}^{+\infty} \right) \frac{q(\xi) - q(x)}{(\xi - z)^2} d\xi + \int\limits_{-2x}^{+2x} \frac{q(\xi) - q(x)}{(\xi - z)^2} d\xi. \tag{3.24}$$

Отсюда получаем очевидную оценку, считая, например, $x > 0$:

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t) \operatorname{Im}\sqrt{\Phi(t)}^+ dt}{t - z} \right| \leqslant 4 \max_{-\infty < \xi < +\infty} |q(\xi)| \int\limits_{x}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + y^2} +$$

$$+ \max_{-\infty < \xi < +\infty} |\varphi(\xi) \operatorname{Im}\sqrt{\Phi(\xi)}^+| \int\limits_{-2x}^{+2x} \frac{|\xi - x|\, d\xi}{[\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}]^2} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \max_{-\infty < \xi < +\infty} |q(\xi)| \frac{1}{y} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} \right) +$$

$$+ \max_{-\infty < \xi < +\infty} |\varphi(\xi) \operatorname{Im}\sqrt{\Phi(\xi)}^+| \int\limits_{-3x}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + y^2}} \leqslant \frac{A_1}{y} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} \right) +$$

$$+ B_1 \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) + \ln\left(3x + \sqrt{9x^2 + y^2}\right) + 2 \ln\frac{1}{y} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_1}{x} + 2B_1 \ln\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} + B_1 \ln 12.$$

Лемма доказана.

Оценка (3.22) в соединении с ограниченностью функции $\left(\sqrt{\Phi(z)}\right)^{-1}$ на последовательности окружностей C_{τ_n} показывает, что для $f(z)$ определенной формулой (2.3) действительно выполняется условие (1.6).

Поскольку все интегралы, входящие в (2.3), равномерно стремятся к нулю при $y \to +\infty$, условие (1.7) также выполнено. Помимо требований, предъявляемых к функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ леммой 3, необходимо еще, чтобы они удовлетворяли условию Гельдера с показателем $\mu \leqslant 1$, что обеспечивает проверку пункта (1.5).

Итак, доказана следующая

Теорема. *Если функции* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *являются боровскими почти-периодическими функциями, удовлетворяющими условию*

Гельдера с показателем $\mu \leqslant 1$, *причем* $\varphi(t)$ *нечетна, а* $\psi(t)$ *четна и интегралы*

$$\int_0^\xi \varphi(t)\,\mathrm{Im}\sqrt{\Phi(t)}^+\,dt,\quad \int_0^\xi \psi(t)\,\mathrm{Re}\sqrt{\Phi(t)}^+\,dt$$

ограничены, то решение задачи 1)—4) *единственно и дается формулой* (2.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956. 632 с.
2. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953. 396 с.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., ГИТТЛ, 1951. 220 с.