УДК 513.88:513.83 + 519.48

А. И. Векслер, д-р физ.-мат. наук

УСЛОВИЯ БАНАХОВОЙ И ДЕДЕКИНДОВОЙ ПОЛНОТЫ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Настоящая работа посвящена главным образом подробному изложению некоторых результатов заметки [1].

Пусть B — произвольный бикомпакт. Через $C_0^*(B)$ будем обозначать совокупность всех классов вещественных функций, заданных, непрерывных и ограниченных на открытых плотных в B подмножествах, соотнося две функции в один класс, если они совпадают на пересечении их областей задания. В дальнейшем станем обозначать функции малыми буквами f, g, e, f_n, ..., а соответствующие классы функций такими же буквами, но набранными полужирным шрифтом. Различая функции и классы, мы тем не менее во избежание ненужной громоздкости будем, как это обычно делается в подобных случаях, считать, что и сами функции принадлежат $C_0^*(B)$. Область задания функции f будем обозначать через $D(f)$. Очевидно, в каждом классе $\boldsymbol{f}$ существует f с наибольшей областью задания. Такие функции будут называться *непродолжимыми.*

Очевидно, $C_0^*(B)$ является линейным нормированным пространством (и даже нормированной алгеброй) относительно sup-нормы

$$\|\boldsymbol{f}\| = \sup\{|f(t)| : t \in B\},$$

где f — произвольная функция из $\boldsymbol{f}$, и K-линеалом (векторной структурой) относительно естественного частичного порядка.

Нормированное пространство $C_0^*(B)$ может не быть банаховым, например, если $B = [0, 1]$. В теореме 3 даются условия, необходимые и достаточные для банаховости $C_0^*(B)$. Они заключаются в том, что в B всякое множество категории 1/2 должно быть нигде не плотным; при этом множеством категории 1/2 называется всякое множество, погружаемое в объединение какой-либо последовательности границ регулярных открытых (канонически открытых) множеств. При соблюдении этого условия (и лишь при этом) $C_0^*(B)$ оказывается K-пространством (условно полной векторной структурой), которое можно отождествить с K-пополнением (пополнением по Дедекинду) K-линеала $C(B) = C^*(B)$. Далее в теореме 4 приводится конструкция такого пополнения для $C(B)$ в случае произвольного B (оно, кстати, здесь совпадает и с банаховым пополнением пространства $C_0^*(B)$). Именно, оказывается, что K-пополнение $C(B)$ можно отождествить с пространством всех классов функций, заданных, непрерывных и ограниченных на множествах из B, дополнительных к множествам категории 1/2. Этот результат является некоторым усилением известного результата К. Накано и Т. Шимогаки [2], которые получили соответствующую теорему, но с заменой слов «категории 1/2» на «1 категории» (отметим, к примеру, что существуют бикомпакты, имеющие плотные множества 1 категории, но не имеющие непустых множеств категории 1/2).

В последней части работы с помощью полученных результатов рассматривается вопрос, когда K-пополнение K_σ-пространства (условно σ-полной векторной структуры) можно получить точно таким же образом, как получается из произвольной булевой алгебры ее пополнение по Дедекинду.

В части, касающейся теории полуупорядоченных пространств, в основном будем пользоваться терминологией Б. З. Вулиха [3]. Через N обозначим множество натуральных, а через R — множество вещественных чисел.

2. Напомним сначала некоторые определения и факты из теории полуупорядоченных пространств. *Компонентой* (полосой) в K-линеале X называется всякое множество из X, являющееся дизъюнктным дополнением какого-либо $M \subset X$. Если в X всякая компонента является прямым слагаемым, то X называется *K-линеалом с проекциями*. Осколком элемента $x \in X$ называется всякий x', для которого $|x'| \wedge |x - x'| = 0$. K-линеал называется *дизъюнктно-полным*, если в нем всякое ограниченное множество попарно дизъюнктных положительных элементов имеет супремум. Архимедов дизъюнктно-полный K-линеал является K-линеалом с проекциями [4, теорема 8]. Наименьший из дизъюнктно-полных K-линеалов, содержащихся между архимедовым X и его K-пополнением называется *дизъюнктным пополнением* X. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *сходящейся с регулятором* или *(r)-сходящейся* к $x \in X$ (соответственно *(r)-фундаментальной*), если существуют $y \in X^+$ и $\{\varepsilon_n\} \subset R^+$ такие, что $\varepsilon_n \to 0$ и $|x_n - x| \leqslant \varepsilon_n y$ (соответственно $|x_{n+p} - x_n| \leqslant \varepsilon_n y$ при всех $p \in N$). Архимедов X, полный относительно (r)-сходимости, называется *(r)-полным*.

В [4] в теореме 11 предложена конструкция дизъюнктного пополнения, из которой сразу вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. *K-линеал $C_0^*(B)$ может быть отождествлен с дизъюнктным пополнением K-линеала $C(B)$ и, в частности, является K-линеалом с проекциями.*

Заметим, что в K-линеале $C_0^*(B)$ $(ч)$-сходимость совпадает с равномерной сходимостью. Поэтому $C_0^*(B)$ является (r)-полным тогда и только тогда, когда он полон по Банаху. Далее архимедов K-линеал является K-пространством тогда и только тогда, когда он есть (r)-полный K-линеал с проекциями [5]. Отсюда получается, что $C_0^*(B)$ полно по Банаху тогда и только тогда, когда оно полно по Дедекинду.

Прежде чем формулировать теорему об условиях полноты (банаховой и дедекиндовой) $C_0^*(B)$, установим общий вид границы регулярного открытого множества в B.

Лемма 2. Для того чтобы множество $\Gamma \subset B$ было границей некоторого регулярного открытого множества, необходимо и достаточно, чтобы нашлась единичная (т. е. принимающая лишь значения 0 и 1) непродолжимая функция $e \in C_0^*(B)$, для которой $D(e) = B \setminus \Gamma$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть Γ-граница регулярного открытого $G_0 \subset B$. Тогда $G_1 = \operatorname{Int}(B \setminus G_0) = B \setminus \overline{G}_0$ — тоже регулярное открытое множество и Γ — граница G_1. В качестве искомой непродолжимой функции теперь можно взять $e(t) = i$ на G_i $(i = 0, 1)$.

Достаточность. Пусть e — непродолжимая единичная функция и $D(e) = B \setminus \Gamma$. Положим $G_i = \{t \in B : e(t) = i\}$ $(i = 0, 1)$. Так как e непродолжима, то $\Gamma \subset \overline{G}_i$ $(i = 0, 1)$. Значит, Γ — общая граница открытых G_0 и G_1. Пусть G открыто и $\overline{G} = \overline{G}_0 = G_0 \cup \Gamma$. Тогда $G \cap G_1 = \varnothing$, $G \cap \overline{G}_1 = \varnothing$, т. е. $\overline{G} \subset B \setminus G_1 = G_0$. Отсюда G_0 регулярно (конечно, и G_1 регулярно). Этим завершается доказательство.

Определение. *Произвольное подмножество регулярного пространства T будем называть множеством категории 1/2, если его можно погрузить в объединение некоторого счетного семейства границ регулярных открытых множеств из T.*

Теорема 3. *Для произвольного бикомпакта B равносильны следующие утверждения:*

а) *$C_0^*(B)$ — банахово пространство;*

б) *K-линеал $C_0^*(B)$ (r)-полон;*

в) *$C_0^*(B)$ — K_σ-пространство;*

г) *$C_0^*(B)$ — K-пространство;*

д) *$C_0^*(B)$ — P_1-пространство в смысле теории банаховых пространств;*

е) *$C_0^*(B)$ — K-пополнение K-линеала $C(B)$;*

ж) *в B всякое множество категории 1/2 нигде не плотно.*

Доказательство. Равносильность условий а), б) и г) уже установлена. Далее, поскольку в $C_0^*(B)$ имеется сильная единица, то равносильность г) и д) — следствие хорошо известных результатов теории банаховых пространств. Кроме того, очевидно, г) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ г). Наконец, импликация е) $\Rightarrow$ г) очевидна, а обратная импликация сразу следует из предложения 1, ибо дизъюнктное пополнение, по определению, заключено между K-линеалом и его K-пополнением. Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно установить равносильность а) и ж).

ж) $\Rightarrow$ а). Пусть в B всякое множество категории 1/2 нигде не плотно. Покажем, что нормированное пространство $C_0^*(B)$ полно по Банаху. Достаточно проверить, что всякая (b) — фундаментальная последовательность $\{f_n\}$ положительных элементов имеет (b)-предел.

Поскольку K-линеал $C_0^*(B)$ содержит единицу 1 (класс, в который входит функция, равная 1 на B) и является K-линеалом с проекциями (предложение 1), то можно применить известную теорему Г. Фрейденталя об интегральном представлении элементов K-линеала (см., например, [3]). В силу этой теоремы каждый элемент из $C_0^*(B)$ является (r)-пределом последовательности ступенчатых элементов из $C_0^*(B)$ (напомним, что *единичным* элементом называется всякий осколок 1, а *ступенчатым* — линейная комбинация единичных). Ввиду совпадения (r)-сходимости и (b)-сходимости в $C_0^*(B)$ отсюда вытекает, что для всякой (b)-фундаментальной последовательности из $C_0^*(B)$ существует эквивалентная ей последовательность ступенчатых элементов. Поэтому, не умаляя общности, можно сразу считать, что исходная последовательность $\{\boldsymbol{f}_n\}$ состоит из ступенчатых элементов.

Пусть $f_n \in \boldsymbol{f}_n$. Тогда найдутся единичные функции e_{nk} и $\lambda_{kn} \in R^+$ такие, что $f_n = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant m_n} \lambda_{kn} e_{kn}$. Можно, конечно, считать все e_{kn} непродолжимыми. В силу леммы 2 множества $\Gamma_{kn} = B \setminus D(e_{kn})$ являются границами регулярных открытых множеств. В силу ж) открытое множество $D = B \setminus \overline{\bigcup \{\Gamma_{kn} : k \leqslant m_n, n \in N\}}$ плотно в B. Но все f_n определены на D, а поскольку $\{\boldsymbol{f}_n\}$ фундаментальна, то $\{f_n\}$ равномерно сходится в себе на D. Значит, $\{f_n\}$ на D равномерно сходится к некоторой $f \in C_0^*(B)$. Тогда $\boldsymbol{f}_n \xrightarrow{(b)} \boldsymbol{f} \in C_0^*(B)$. Значит, $C_0^*(B)$ банахово.

а) $\Rightarrow$ ж). Пусть Γ_k — граница регулярного открытого множества и в B существует непустое открытое $G_0 \subset \overline{\bigcup \{\Gamma_k : k \in N\}}$. Пользуясь леммой 2, построим для каждого $k \in N$ непродолжимую единичную функцию e_k, для которой $\Gamma_k = B \setminus D(e_k)$. Положим $g_k = e_k/3^k$ и $f_n = \sum\limits_{k \leqslant n} g_k$. Тогда $\boldsymbol{f}_n = \sum\limits_{k \leqslant n} \boldsymbol{g}_k$ и последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна. Покажем, что она не имеет предела в $C_0^*(B)$.

Для произвольной функции, заданной на плотном в B множестве, и любой $t \in B$ через $\omega_h t$ будем обозначать колебание h в t: $\omega_h(t) = \inf \{\sup [h(t') : t' \in G(t) \cap D(h)] - \inf [h(t'') : t'' \in G(t) \cap D(h)]\}$, где inf берется по фундаментальной системе $\{G(t)\}$ окрестностей точки t. Очевидно, что если $g \in C_0^*(B)$ и $t \in D(g)$, то $\omega_g(t) = 0$. Ясно также, что если две различные функции g' и g'' определяют один и тот же элемент в $C_0^*(B)$, то $\omega_{g''}(t) = \omega_{g'}(t)$ для любой $t \in D$. Колебание любой $g \in C_0^*(B)$ можно вычислить и следующим образом. Пусть M плотно в некоторой окрестности G точки t. Тогда $M_g = M \cap D(g)$ плотно в G и

$$\omega_g(t) = \inf \{\sup [g(t') : t' \in G(t) \cap M_g] - \\ - \inf [g(t'') : t'' \in G(t) \cap M_g]\}. \tag{1}$$

Теперь допустим, что в $C_0^*(B)$ существует $\boldsymbol{f} = (b) - \lim \boldsymbol{f}_n$ и пусть $f \in \boldsymbol{f}$. Покажем, что $\omega_f(t) > 0$ на плотном в G_0 множестве, чего, конечно, ни для одной функции из $C_0^*(B)$ быть не может.

Заметим сначала, что $\omega_{g_k}(t) = 1/3^k$ для $t \in \Gamma_k$. Зафиксируем $m \in N$ и пусть $t_0 \in \Gamma_m \setminus \bigcup \{\Gamma_k : k < m\}$, а $n > m$. Тогда

$$\omega_{f_n}^{(t_0)} \geqslant \omega_{g_m}(t_0) - \sum_{m+1 \leqslant k \leqslant n} \omega_{g_k}(t_0) \geqslant 1/3^m -$$
$$- \sum_{m+1 \leqslant k \leqslant n} 1/3^k > 1/(2 \cdot 3^m) > 0. \tag{2}$$

Множество $M = \bigcup \{\Gamma_k : k \in N\} \cap D(f)$ плотно в G_0. В силу (1) и (2) для всякой $t \in M$, как нетрудно понять, найдется $m \in N$ такое, что для любой окрестности $G(t)$ точки t и любого $n > m$ существуют $t_1, t_2 \in G(t) \cap M \cap D(f_n)$, для которых $f_n(t_1) - f_n(t_2) > > 1/(2 \cdot 3^m) = \varepsilon > 0$.

Далее, так как $\boldsymbol{f}_n \xrightarrow{(b)} \boldsymbol{f}$, возрастая, то можно взять n столь большим, чтобы было $\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_n \leqslant (\varepsilon/3)\,\mathbf{1}$. Тогда $0 \leqslant f(t_i) - - f_n(t_i) \leqslant \varepsilon/3$ $(i = 1, 2)$. Отсюда $|f(t_1) - f(t_2)| = |[f_n(t_1) - f_n(t_2)] + + [f(t_1) - f_n(t_1)] - [f(t_2) - f_n(t_2)]| \geqslant |f_n(t_1) - f_n(t_2)| - |f(t_1) - - f_n(t_1)| - |f(t_2) - f_n(t_2)| > \varepsilon - \varepsilon/3 - \varepsilon/3 = \varepsilon/3$. Поэтому $\omega_f(t) \geqslant \geqslant \varepsilon/3$. Следовательно, действительно, f разрывна на плотном в G_0 множестве M, т. е $f \,\overline{\in}\, C_0^*(B)$. Значит, $\{\boldsymbol{f}_n\}$ не имеет предела в $C_0^*(B)$, а само $C_0^*(B)$ не банахово.

Теорема доказана.

В связи с этой теоремой естественно возникает вопрос, в каких бикомпактах всякое множество категории 1/2 нигде не плотно. Очевидно, таким бикомпактом будет, в частности, всякий экстремально несвязный бикомпакт Q (ибо в нем все открытые регулярные множества замкнуты и, значит, их границы пусты), для него $C_0^*(Q) = = C(Q)$. Ясно также, что если в B существует плотное множество изолированных точек, то в нем всякое множество категории 1/2 нигде не плотно. Не вдаваясь в детали, приведем еще некоторые примеры пространств, в которых любое множество категории 1/2 нигде не плотно. Такими будут, например, пространства $\beta N \setminus N$, $\beta R \setminus R$ (и вообще $\beta T \setminus T$ для всякого небикомпактного, локально бикомпактного, вещественно компактного T), конечные их степени, а также конечные степени их абсолютов (проективных расширений), любой B, для которого банахово $C(B)$ является P_λ-пространством в смысле теории банаховых пространств (по поводу квазиэкстремально несвязных бикомпактов, в которых всякое множество категории 1/2 нигде не плотно, см. последний раздел работы). С другой стороны, в любом метрическом компакте без изолированных точек имеется плотное множество категории 1/2; то же верно для любой нетривиальной степени его абсолюта и для любой степени, по крайней мере начиная с третьей, гиперстоунова бикомпакта (т. е. бикомпакта с мерой, строго положительной на непустых открытых и аннулирующейся на нигде не плотных множествах) без изолированных точек.

Замечание. Для произвольного вполне регулярного пространства T определим $C_0^*(T)$ как совокупность классов вещественных функций, каждая из которых задана и непрерывна на плотном в T открытом множестве и мажорируется на этом множестве некоторой функцией из $C(T)$. Тогда теорема 3 может быть обобщена, например, для случая локального бикомпакта T, именно для T равносильны условия б), в), г), е), ж) этой теоремы.

3. Хорошо известна теорема о функциональном представлении K-пополнения K-линеала $C(B)$, впервые, видимо, полученная К. Накано и Т. Шимогаки [2]: *K-пополнение K-линеала $C(B)$ можно отождествить с пространством всех классов функций, заданных, непрерывных и ограниченных на множествах в B, дополнительных к множествам* 1 *категории*.

Следующая характеристика K-пополнения $C(B)$, на наш взгляд, более удобна и, по-видимому, не может быть непосредственно выведена из характеристики К. Накано — Т. Шимогаки.

Теорема 4. *Пусть B — произвольный бикомпакт. Тогда K-пополнение K-линеала $C(B)$ может быть отождествлено с пространством $C_1^*(B)$ всех классов функций, заданных, непрерывных и ограниченных на множествах в B, дополнительных к множествам категории* 1/2.

Доказательство. Пусть Z — K-пополнение $C(B)$. Очевидно, $C_0^*(B)$ имеет то же самое K-пополнение, т. е. можна считать $C(B) \subset \subset C_0^*(B) \subset Z$. При этом, как мы надеемся, то обстоятельство, что элементами в $C(B)$, в отличие от $C_0^*(B)$ и $C_1^*(B)$, являются просто функции, а не классы функций, не должно вызвать дополнительных затруднений.

К-линеал $C_0^*(B)$ является K-линеалом с проекциями, а потому всякий элемент z из его K-пополнения Z есть (r)-предел некоторой $\{f\} \subset C_0^*(B)$ [6, лемма 3]. Но в данном случае это означает, что $z = (b) - \lim f_n$. Далее, как было показано при доказательстве справедливости импликации ж) $\Rightarrow$ а) в теореме 3, можно считать все элементы f_n ступенчатыми. Сохраняя обозначения из доказательства теоремы 3, видим, что существует функция u, заданная, непрерывная и ограниченная на $B \setminus \bigcup \{\Gamma_{kn}\}$, к которой на этом множестве равномерно сходится $\{f_n\}$. Соответствующий класс $\boldsymbol{u} \in \in C_1^*(B)$ и сопоставляем элементу z. Так, определенное отображение τ, очевидно, является мономорфизмом из Z в $C_1^*(B)$. Покажем, что τ — эпиморфизм.

Отождествим Z с K-пространством $C(Q)$, где Q — абсолют B. Пусть φ —соответствующее неприводимое отображение $Q \to B$, $\boldsymbol{u} \in \in C_1^*(B)$, $u \in \boldsymbol{u}$ и $D(u) = B \setminus \Gamma$, где Γ — множество категории 1/2. Рассмотрим функцию, заданную, непрерывную и ограниченную на плотном в Q множестве $\varphi^{-1}(D(u))$, принимающую значение $u(t)$ в каждой точке из $\varphi^{-1}(t)$ $(t \in D(u))$. В силу экстремальной несвязности Q эта функция допускает единственное распространение до некоторой функции из $C(Q)$, очевидно, не зависящей от выбора $u \in \boldsymbol{u}$. Для элемента z, отождествляемого с этой функцией из $C(Q)$, и выполнено $\tau z = \boldsymbol{u}$. Ясно теперь, что τ устанавливает изоморфизм K-линеалов Z и $C_1^*(B)$ (очевидно, сохраняющий на месте элементы из $C_0^*(B)$). Теорема доказана.

Замечание. Отметим, кстати, что пространство $C_1^*(B)$ является банаховым пополнением для $C_0^*(B)$ при естественном вложении.

Удобство конструкции, даваемой теоремой 4, по сравнению с конструкцией К. Накано — Т. Шимогаки заключается в том, что множеств категории 1/2 в бикомпакте B, вообще говоря, существенно меньше, чем множеств 1 категории, и поэтому, в частности, элементы-классы из $C_1^*(B)$ состоят из меньших множеств функций, чем соответствующие классы у К. Накано — Т. Шимогаки. Например, в экстремально несвязном бикомпакте Q непустых множеств категории 1/2 вообще нет, и $C_1^*(Q)$ совпадает с $C(Q)$, т. е. каждый класс из $C_1^*(Q)$ состоит из единственной функции из $C(Q)$. В то же время в Q могут даже существовать плотные множества 1 категории (например, в абсолюте $[0, 1]$), и результат К. Накано — Т. Шимогаки для этого случая выглядит не очень естественным.

4. В качестве приложения полученных результатов рассмотрим вопрос, относящийся чисто к теории полуупорядоченных пространств.

Пусть E — произвольная булева алгебра, а $\hat{E}$ — ее пополнение по Дедекинду. Тогда всякий ненулевой $\hat{e} \in \hat{E}$ имеет ненулевой осколок $e \in E$. Отсюда, в частности, следует, что любой $\hat{e}$ является *соединением* некоторого $E' \subset E$, т. е. $\hat{e} = \sup E'$ и $e' \wedge e'' = 0$ для любых различных e', e'' из E'.

Совершенно иначе обстоит дело в случае архимедова K-линеала X и его K-пополнения Z. Может оказаться, что $0 < z \in Z$, но z не имеет ни одного ненулевого осколка в X.

Определение. *Архимедов K-линеал X будем называть осколочно насыщенным, если всякий ненулевой элемент из его K-пополнения имеет ненулевой осколок в X.*

По некоторым соображениям представляет интерес вопрос об осколочной насыщенности K_σ-пространств. Так, известно, что для того чтобы всякая реализация K_σ-пространства X на экстремально несвязном бикомпакте $Q = Q(X)$ (стоуновом бикомпакте полной булевой алгебры $A = A(X)$ — компонент в X) порождала достаточно хорошее функциональное частичное умножение, необходимо и достаточно, чтобы X было осколочно насыщенным [7, предложение 3].

Очевидно, X осколочно насыщено тогда и только тогда, когда осколочно насыщен любой его главный идеал вида $X(x) = \{x' \in X : |x'| \leqslant \lambda x$ при некотором $\lambda = \lambda(x') \in R^+\}$ $(x \in X^+)$. С помощью этого простого факта и следующего нехитрого предложения сразу устанавливается наличие связи между вопросом об осколочной насыщенности K_σ-пространства и вопросами, рассмотренными выше.

Лемма 5. *Пусть $C(B)$ — K_δ-пространство, т. е. бикомпакт B квазиэкстремально несвязен (базисно несвязен). Для того чтобы $C(B)$ было осколочно насыщенным, необходимо и достаточно, чтобы K-линеал $C_0^*(B)$ был K-пространством (и, значит, K-пополнением $C(B)$).*

Доказательство. *Необходимость.* Имеем $C(B) \subset C_0^*(B) \subset Z$, где Z — K-пополнение $C(B)$. Из осколочной насыщенности $C(B)$ следует, что любой $z \in Z^+$ есть соединение некоторого множества попарно дизъюнктных элементов из $C(B)$. Но это означает, что z попадает в дизъюнктное пополнение $C_0^*(B)$ K_σ-пространства $C(B)$. Отсюда $C_0^*(B) = Z$ и потому — K-пространство.

Достаточность. Пусть $C_0^*(B)$ — K-пространство. Тогда $C_0^*(B) = Z$. Поэтому любой элемент из Z есть некоторый класс $\mathbf{g} \in C_0^*(B)$. Пусть $\mathbf{g} \neq 0$, $g \in \mathbf{g}$, $B_0 \subset D(g)$ — непустое открыто-замкнутое, $t_0 \in B_0$ и $g(t_0) \neq 0$. Положим

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{при } t \in B_0, \\ 0 & \text{при } t \in B \setminus B_0. \end{cases}$$

Тогда очевидно, $f \in C(B)$ и является ненулевым осколком $\mathbf{g}$. Лемма доказана.

Напомним, что совокупность $A_0 = A_0(X)$ всех главных компонент K_σ-пространства X является σ-полным булевым подкольцом в полной булевой алгебре $A = A(X)$ всех компонент из X. При этом A является пополнением булева кольца A_0 по Дедекинду. Стоунов квазиэкстремально несвязный локальный бикомпакт H булева кольца A_0 будем называть собственным σ-пространством K_σ-пространства X. Хорошо известно [8], что X реализуется в виде пространства расширенных непрерывных функций на H.

Теорема 6. *Для произвольного K_σ-пространства X равносильны следующие утверждения:*

а) *X осколочно насыщено;*

б) *дизъюнктное пополнение Y K_σ-пространства X (r)-полно;*

в) *Y является K-пространством;*

г) *Y совпадает с K-пополнением Z K_σ-пространства X;*

д) *в собственном σ-пространстве H всякое множество категории $^1/_2$ нигде не плотно.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что дизъюнктное пополнение всякого главного идеала $X(x)$ может быть отождествлено с главным идеалом в Y:

$$Y(x) = \{y \in Y : |y| \leqslant \lambda x \text{ при некотором } \lambda = \lambda(y) \in R\} \quad (x \in X^+).$$

Утверждения б), в), г) равносильны по тем же соображениям, что и соответствующие условия б), г), е) из теоремы 3.

а) $\Rightarrow$ в). Пусть X осколочно насыщено. Тогда осколочно насыщен любой его главный идеал $X(x)$. В этом случае в силу леммы 5 его дизъюнктное пополнение $Y(x)$ является K-пространством (ибо $X(x)$ изоморфно некоторому K_σ-пространству вида $C(B)$. Поэтому и Y — K-пространство.

в) $\Rightarrow$ д). Пусть H' — произвольное открыто-замкнутое бикомпактное подмножество в H. Тогда найдется $x \in X^+$, для которого K_σ-пространство $X(x)$ изоморфно $C(H')$. В силу леммы 5 и предложения 1 K-пространство $Y(x)$ изоморфно $C_0^*(H')$. Но тогда по теореме 3 в H' всякое множество категории $^1/_2$ нигде не плотно. Поскольку в H можно найти такие непересекающиеся открыто-замкнутые бикомпактные подмножества, объединение которых плотно в H, то и в самом H всякое множество категории $^1/_2$ нигде не плотно.

д) $\Rightarrow$ а). Пусть в H всякое множество категории $^1/_2$ нигде не плотно. Так как любой главный идеал $X(x) \subset X$ изоморфен некоторому $C(H')$ на открыто-замкнутом бикомпактном $H' \subset H$, то его дизъюнктное пополнение $Y(x)$ изоморфно $C_0^*(H')$ и по теореме 3 является K-пространством. Тогда в силу леммы 5 $X(x)$ осколочно насыщен. Значит, и X осколочно насыщено. Теорема доказана.

Переведем последнее условие доказанной теоремы на язык чистой теории булевых колец. Сначала укажем общий вид границы регулярного открытого множества в H. Отождествим A_0 с σ-кольцом всех открыто-замкнутых бикомпактных подмножеств в H. Каждому идеалу $I \subset A_0$ сопоставим замкнутое $F = H \setminus \bigcup \{H' : H' \in I\}$ — дефектное множество для I. Очевидно, такое соответствие устанавливает изоморфизм между множеством всех идеалов (всех плотных идеалов) в A_0 и множеством всех замкнутых (соответственно всех замкнутых нигде не плотных) подмножеств в H. Пусть теперь $I = J_1 \vee J_2$, где J_1 и J_2 — σ-идеалы в A_0, причем J_i — наибольший σ-идеал в A_0, не пересекающийся с $J_k (i, k = 1, 2;\ i \neq k)$, т. е. J_i — дизъюнктное дополнение J_k. Будем в этом случае плотный σ-идеал называть *бипорожденным* (очевидно, один и тот же бипорожденный I может порождаться разными J_1 и J_2). Легко сообразить, что дефектное множество бипорожденного I является общей границей регулярных открытых множеств $G_i = \bigcup \{H' : H' \subset J_i\}$ $(i = 1, 2)$. Верно и обратное: всякая граница регулярного открытого множества является дефектным множеством некоторого бипорожденного плотного σ-идеала. Отметим еще, что, очевидно, в полной булевой алгебре нет собственных бипорожденных плотных идеалов.

Пусть $\{\Gamma_n\}$ — последовательность границ регулярных открытых множеств в H, а $\{I_n\}$ — последовательность бипорожденных плотных σ-идеалов с дефектными множествами Γ_n. Тогда, очевидно, $I_0 = \bigcap I_n$ — σ-идеал в A_0 с дефектным множеством $\overline{\bigcup \Gamma_n}$. Ясно, что $\bigcup \Gamma_n$ нигде не плотно тогда и только тогда, когда плотен

σ-идеал I_0. Таким образом из теоремы 6 получаем следующее утверждение

Теорема 7. *K_σ-пространство осколочно насыщено тогда и только тогда, когда в его σ-кольце главных компонент пересечение любой последовательности бипорожденных плотных σ-идеалов плотно.*

Итак, как показано в теоремах 6 и 7, свойство осколочной насыщенности K_σ-пространства X целиком определяется свойствами его булева кольца $A_0(X)$. Полная булева алгебра $A(X)$, являясь пополнением σ-кольца $A_0(X)$, несет значительно меньше информации об X, чем $A_0(X)$. В частности, может оказаться, что X не является осколочно насыщенным (кстати, впервые пример такого K_σ-пространства был построен В. А. Гейлером [9]), в то время как его K-пополнение Z, будучи K-пространством, осколочно насыщено; при этом, конечно, $A(X) = A(Z)$.

Приведем случай, когда свойства булевой алгебры $A(X)$ уже влекут осколочную насыщенность X.

Определение. *Будем говорить, что полная булева алгебра обладает свойством D, если в ней пересечение любой последовательности плотных σ-идеалов плотно.*

Нетрудно сообразить, что полная булева алгебра обладает свойством D тогда и только тогда, когда в ее стоуновом бикомпакте объединение любой последовательности нигде не плотных P-множеств нигде не плотно (замкнутое множество F называется P-множеством в смысле [10], если в пересечении любой последовательности открытых окрестностей F содержится еще одна такая окрестность).

Теорема 8. *Пусть X — K_σ-пространство, полная булева алгебра A компонент которого обладает свойством D. Тогда X осколочно насыщено.*

Доказательство. Сначала заметим, что граница Γ регулярного открытого подмножества стоунова пространства σ-кольца всегда является P-множеством. Это сразу следует из того, что она является дефектным множеством некоторого σ-идеала. Впрочем, этот же факт следует и из того, что регулярное открытое множество в квазиэкстремально несвязном пространстве имеет несчетный нижний характер [11].

Пусть теперь H — собственное σ-пространство для X, а Q — стоунов экстремально несвязный бикомпакт для $A = A(X)$. Тогда в Q найдется плотное открытое S, являющееся абсолютом H. Пусть φ — соответствующее совершенное неприводимое отображение S на H. Стандартным образом устанавливается, что прообраз при отображении φ P-множества в H есть P-множество в S (на самом деле это свойство любого замкнутого отображения). Пусть $\{\Gamma_n\}$ — последовательность границ регулярных открытых множеств в H, $F_n = \varphi^{-1}(\Gamma_n)$. Тогда F_n — нигде не плотное P-множество в S. Но так как в Q (а значит, и в S) объединение последовательности нигде не плотных P-множеств нигде не плотно (в силу условия D), то $\bigcup F_n$ нигде не плотно в S. А тогда

$\bigcup \Gamma_n = \varphi(\bigcup F_n)$ нигде не плотно в H. Отсюда в H всякое множество категории $^1/_2$ нигде не плотно. Для завершения доказательства остается сослаться на теорему 6.

Что можно сказать о полных булевых алгебрах, удовлетворяющих условию D? Из результатов З. Т. Дикановой [12, теорема 3] следует, что A удовлетворяет D тогда и только тогда, когда в K-пространстве $C_\infty(Q)$ всех расширенных функций на ее стоуновом бикомпакте Q всякое порядково неограниченное множество содержит счетное неограниченное подмножество. Последнее условие выполнено, например, тогда, когда $C_\infty(Q)$ — K^+-пространство, и, в частности, тогда, когда в исходном K_σ-пространстве X имеется достаточное множество вполне линейных функционалов (или даже фундамент с таким множеством) [3]. Отсюда получается такое утверждение.

Следствие. *Если максимальное расширение K-пополнения K_σ-пространства X является K^+-пространством либо в X имеется фундамент с достаточным множеством вполне линейных функционалов, то X осколочно насыщено.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Векслер А. И. О банаховой и дедекиндовой полноте пространств непрерывных функций, векторных структур и максимальных колец частных. — «Докл. АН СССР», 1971, т. 196, № 1, с. 20—23.
2. Nakano K,. Shimogaki T. A note the cut extension of C-space. — «Proc. Japan. Acad.», 1962, vol. 38, № 8, p. 473—477.
3. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961. 407 с.
4. Векслер А. И., Гейлер В. А. О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полуупорядоченных пространств. — «Сиб. мат. ж.», 1972, т. 13, № 1, с. 43—51.
5. Векслер А. И. Понятие нормальной в себе линейной структуры и некоторые приложения этого понятия к теории линейных и линейных нормированных структур. — «Изв. вузов. Математика», 1966, № 4, с. 13—22.
6. Векслер А. И. О новой конструкции дедекиндова пополнения векторных структур и l-групп с делением. — «Сиб. мат. ж.», 1969, № 6, с. 1206—1213.
7. Векслер А. И., Роткович Г. Я. Частичные умножения в счетно полных векторных структурах. — «Современный анализ и геометрия» [Ленингр. пед. ин-т им. А. И. Герцена], 1972, с. 12, 13.
8. Nakano H. Modern spectral theory. Maruzen Co, 1950 323 p.
9 Гейлер В. А. Пример K_σ-пространства, не содержащего единичных элементов своего K-пополнения. — «Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена», 1972, т. 496 с. 200—204.
10. Векслер А. И. P-множества в топологических пространствах. — «Докл. АН СССР» 1970, т. 193, № 3, с. 510—513.
11. Сикорский Р. Булевы алгебры. М., «Мир», 1969, 375 с.
12. Диканова З. Т. Об условиях ограниченности множеств в расширенном K-пространстве. — «Сиб. мат. ж.», 1968, т. 9, № 4, с. 804—815.