УДК 517.55

Е. Н. Бут

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ МИНИМАЛЬНОГО РОСТА, ОБРАЩАЮЩИХСЯ В НУЛЬ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ

Для некоторого класса целых функций произвольного числа переменных построим аналог канонического произведения Вейерштрасса.

Пусть последовательности комплекных чисел $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ имеют конечные показатели сходимости λ_1 и λ_2.

Очевидно, что любая функция $f(z_1, z_2)$, $z_1 \in C^1$, $z_2 \in C^1$, обращающаяся в нуль на плоскостях $1 + a_j z_1 + b_j z_2 = 0$, удовлетворяет условиям*

$$\lim_{r_1 \to \infty} \frac{\ln \ln M_j (r_1, r_2)}{\ln r_1} \geqslant \lambda_1;$$
$$\lim_{r_2 \to \infty} \frac{\ln \ln M_j (r_1, r_2)}{\ln r_2} \geqslant \lambda_2.$$

Множество $B_\rho(f)$, фигурирующее в определении кривой сопряженных порядков функции** $f(z_1, z_2)$ таково, что

$$B_\rho(f) \subset \{(a_1, a_2):\ a_1 \geqslant \lambda_1;\ a_2 \geqslant \lambda_2\}. \tag{1}$$

Возникает вопрос, каков минимальный рост указанных функций, или каково максимальное множество $B_\rho(f)$. Здесь частичный ответ был дан Л. Баумгартнером. В предположении, что числа a_j и b_j удовлетворяют при $j \to \infty$ дополнительным условиям

$$|a_j|^{\lambda_1+\varepsilon} \underset{ac}{<} \frac{1}{j};\quad |b_j|^{\lambda_2+\varepsilon} \underset{ac}{<} \frac{1}{j} \tag{2}$$

($\varepsilon > 0$ — произвольное), Л. Баумгартнер показал существование целой функции $f(z_1, z_2)$, обращающейся в нуль на плоскостях

$$1 + a_j z_1 + b_j z_2 = 0,\quad j = 1, 2, \ldots$$

и удовлетворяющей условию $B_\rho(f) = \{(a_1 : a_2):\ a_1 \geqslant \lambda_1,\ a_2 \geqslant \lambda_2\}$, которое в сопоставлении с (1) показывает, что $f(z_1; z_2)$ имеет минимальный рост. Такую функцию Л. Баумгартнер строил в виде бесконечного произведения множителей, по своему характеру близких первичным множителям Вейерштрасса.

В данной работе строятся функции минимального роста, обращающиеся в нуль на алгебраических множествах

$$N_f^m = \left\{z : z \in C^n,\ 1 - \sum_{\|k\| < m} \frac{z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}}{a^{(j)}_{k_1, \ldots, k_n}} = 0\right\}$$

(m — фиксировано). При этом в случае $m = 1$, $n = 2$ получается то же утверждение, что и у Баумгартнера, но при менее ограничительных предположениях относительно чисел a_j, b_j (выполнение условий (2) не требуется). Отметим также, что при $m = 1$ исполь-

---

* Как обычно, $M_f(r_1, \ldots, r_n) = \max |f(z_1, \ldots, z_n)|$, $|z_1| = r_1, \ldots$ $\ldots, |z_n| = r_n$.

** Гиперповерхностью (кривой, если $n = 2$) сопряженных порядков целой функции $f(z_1, \ldots, z_2)$ называется граница множества $B_\rho(f) = \{a;\ a \in R^n,$ $M_f(r_1, \ldots, r_n) \underset{ac}{<} \sum_{i=1}^{n} r_i^{a_i}\}$ (см. [1]).

зуемый нами способ построения целой функции принадлежит Баумгартнеру, а метод оценки указанных функций существенно отличен от метода Баумгартнера.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — векторы из пространства C^n или R^n. Будем использовать следующие обозначения:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right);$$

$\alpha^\beta = \alpha_1^{\beta_1}, \ldots, \alpha_n^{\beta_n}$ (здесь $\beta \in R_+^n$);

$$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i; \ \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \beta_i;$$

$k = (k_1, \ldots, k_n)$; $k_i = 1, 2, \ldots, i = 1, \ldots, n$; $I = (1, \ldots, 1)$. Как и в [2], здесь в качестве аналога первичного множителя Вейерштрасса применяется функция

$$E(\lambda, u) = (1 - \|u\|) \exp\Big\{ \sum_{\left\|\frac{k}{\lambda}\right\| \leqslant 1} C_k u^k \Big\},$$

где $u \in C^n$, $\lambda \in R_+^n$, а C_k — коэффициенты разложения функции $-\ln(1 - \|u\|)$ в ряд по степеням $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Теорема 1. *Пусть точки* $a^j \in C^n$, $j = 1, 2, \ldots$ *таковы, что при любом* $i = 1, \ldots, n$ *последовательность координат* $\{a_i^j\}_{j=1}^{\infty}$ *имеет конечный показатель сходимости* λ_i. *Тогда произведение* $\prod_{j=1}^{\infty} E\left(\lambda; \frac{z}{a^{(j)}}\right)$, *где* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $z \in C^n$, *сходится к некоторой целой функции, гиперповерхность сопряженных порядков которой есть граница гипероктанта*

$$\{a : a \in R_+^n, \ a_i \geqslant \lambda_i, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Доказательство этой теоремы в значительной степени основывается на оценке функции $E(\lambda, u)$, содержащейся в следующей лемме.

Лемма 1. *При любых* $u \in C^n$, $\lambda \in R_+^n$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *имеет место неравенство*

$$\ln|E(\lambda; u)| \leqslant C \sum_{i=1}^{n} |u_i|^{\lambda_i + \varepsilon}, \tag{3}$$

где $C = C(n, \lambda, \varepsilon)$.

Доказательство. 1. Вначале рассмотрим случай, когда множество Q тех значений индекса i, для которых $|u_i| \geqslant \frac{1}{2n}$, является пустым. Тогда имеем

$$\ln|E(\lambda, u)| = -\mathrm{Re} \sum_{\left\|\frac{k}{\lambda}\right\| > 1} C_k u^k \leqslant \sum_{\left\|\frac{k}{\lambda}\right\| > 1} C_k |u^k|. \tag{4}$$

При любом достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\left\{k : \left\| \frac{k}{\lambda} \right\| > 1\right\} = \left\{k : \left\| \frac{k}{\lambda + \varepsilon I} \right\| \geqslant 1\right\}.$$

Положим $t = \left\| \frac{k}{\lambda + \varepsilon I} \right\|$, $p_i = t \frac{\lambda_i + \varepsilon}{k_i}$. Тогда для любого $k \in \left\{k : \left\| \frac{k}{\lambda + \varepsilon} \right\| \geqslant 1\right\}$ запишем

$$|u|^k = \prod_{i=1}^{n} |u_i|^{k_i} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^{p_i k_i}\Big)^{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}} = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^{t(\lambda_i + \varepsilon)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u_i|^{\lambda_i + \varepsilon}, \quad (5)$$

причем полученное неравенство имеет место не только при $|u_i| \leqslant \frac{1}{2n}$, $i = 1, \ldots, n$, но и при $|u_i| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$. Очевидно также, что это неравенство имеет место и в том случае, когда $k \in \left\{k : \left\| \frac{k}{\lambda} \right\| > 1\right\}$.

Из (4), (5) следует, что при $Q = \varnothing$

$$\ln |E(\lambda, u) \leqslant \sum_{\left\| \frac{k}{\lambda} \right\| \geqslant 1} \left\{ \frac{C_k}{(2n)^{\|k\|}} \prod_{i=1}^{n} (2n |u_i|)^{k_i} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\|k\| < \infty} \frac{C_k}{(2n)^{\|k\|}} \sum_{i=1}^{n} (2n |u_i|)^{\lambda_i + \varepsilon} \leqslant A_1 \sum_{i=1}^{n} |u_i|^{\lambda_i + \varepsilon}, \quad (6)$$

где $A_1 = \max (2n)^{\lambda_i + \varepsilon} \ln 2$.

2. Рассмотрим случай, когда $Q \neq \varnothing$.

Функция $\ln |u|^{\xi}$, $\xi \in R_+^n$ — линейная функция переменного ξ. Поэтому $\max\limits_{\left\| \frac{\xi}{\lambda} \right\| = t} |u^{\xi}| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i|^{t\lambda_i}$. С учетом этого при $\left\| \frac{k}{\lambda} \right\| \leqslant 1$ имеем

$$|u^k| \leqslant \prod_{i \in Q} |u_i|^{k_i} \prod_{i \notin Q} u_i|^{k_i} \leqslant \prod_{i \in Q} |u_i|^{k_i} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \max_{\sum\limits_{i \in Q} \frac{\xi_i}{\lambda_i} = t} \prod_{i \in Q} |u_i|^{\xi_i} \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \max_{i \in Q} |u_i|^{t\lambda_i} =$$

$$= \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \max_{i \in Q} \{|u_i|^{\lambda_i + \varepsilon} |u_i|^{-\lambda_i(1-t) - \varepsilon}\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \max_{i \in Q} \{|u_i|^{\lambda_i + \varepsilon} (2n)^{\lambda_i(1-t) + \varepsilon)} \leqslant \max_{i \in Q} \{|u_i|^{\lambda_i + \varepsilon} (2n)^{\lambda_i + \varepsilon}\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (2n)^{\lambda_i + \varepsilon} \sum_{i=1}^{n} |u_i|^{\lambda_i + \varepsilon}.$$

Отсюда следует, что при $Q \neq \varnothing$

$$\sum_{\left\|\frac{k}{\lambda}\right\|<1} C_k |u^k| \leqslant A_2 \sum_{i=1}^{n} |u_i|^{\lambda_i+\varepsilon}, \tag{7}$$

где $A_2 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} (2n)^{\lambda_i+\varepsilon} \sum\limits_{\left\|\frac{k}{\lambda}\right\|<1} C_k$.

Оценим $\ln(1+\|u\|)$. Для этого рассмотрим отношение

$$\frac{\ln\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}|u_i|\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}|u_i|^{\lambda_i+\varepsilon}}.$$

Очевидно, что это отношение ограничено на каждом ограниченном множестве, не пересекающемся с поликругом $\left\{u : u\in C^n, |u_i| \leqslant \leqslant \frac{1}{2n}, \forall i\right\}$. В то же время

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\ln\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}|u_i|\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}|u_i|^{\lambda_i+\varepsilon}} \leqslant \lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\ln(1+n \max\limits_{i\leqslant 1\leqslant n}|u_i|)}{(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|u_i|)^{\varepsilon}} = 0.$$

Следовательно,

$$\sup_{u\in\{u:Q\neq\varnothing\}} \frac{\ln\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}|u_i|\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}|u_i|^{\lambda_i+\varepsilon}} \overset{\text{def}}{=\!=} A_3 < \infty,$$

и, значит, при $Q \neq \varnothing$

$$\ln\left(1+\sum_{i=1}^{n}|u_i|\right) \leqslant A_3 \sum_{i=1}^{n}|u_i|^{\lambda_i+\varepsilon}. \tag{8}$$

Из (7), (8) вытекает, что при $Q \neq \varnothing$

$$\ln|E(\lambda, u)| \leqslant \ln\left(1+\sum_{i=1}^{n}|u_i|\right) + \sum_{\left\|\frac{k}{\lambda}\right\|<1} C_k u^k \leqslant$$

$$\leqslant (A_2 + A_3)\sum_{i=1}^{n}|u_i|^{\lambda_i+\varepsilon}. \tag{9}$$

В случае произвольного u, учитывая (6) и (9), заключаем, что неравенство (3) имеет место, как только $C \geqslant (A_1 + A_2 + A_3)$. Лемма доказана.

Оценим с помощью неравенства (3) произведение

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} E\left(\lambda, \frac{z}{a^{(j)}}\right).$$

Имеем

$$\ln|f(z)| = \sum_{j=1}^{\infty} \ln\left|E\left(\lambda, \frac{z}{a^{(j)}}\right)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} C \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{z_i}{a_i^{(j)}}\right|^{\lambda_i+\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{n} |z_i|^{\lambda_i+\varepsilon} \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_i^{(j)}}\right|^{\lambda_i+\varepsilon}. \qquad (10)$$

Согласно определению чисел, λ_i, $\sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_i^{(j)}}\right|^{\lambda_i+\varepsilon} < \infty$. Поэтому из (10) следует, во-первых, что рассматриваемое произведение абсолютно сходится в C^n и, таким образом, $f(z)$ — целая функция, и, во-вторых, что множество $B_\rho(f)$, фигурирующее в определении гиперповерхности сопряженных порядков, удовлетворяет условию

$$B_\rho(f) \supset \{a : a \in R_+^n,\ a_i \geqslant \lambda_i,\ i = 1, \ldots, n\}. \qquad (11)$$

Покажем, что обратное включение также имеет место. Действительно, согласно теореме 2.6.4 [1],

$$B_\rho(f) \subset \{a : a \in R_+^n,\ a_i \geqslant \bar{\rho}_i,\ i = 1, \ldots, n\}, \qquad (12)$$

где $\bar{\rho}_i$ — порядок* функции $M_f(r_1, \ldots, r_n)$ по переменной r_i.

Очевидно, что при любых $z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n$ порядок $\bar{\rho}_i$ не меньше, чем порядок $\rho_i(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n)$ функции $f(z_1, \ldots, z_n)$ по переменной z_i. В частности, $\rho_i \geqslant \rho_i(0, \ldots, 0)$. Заметим теперь, что функция $f(0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, 0)$ обращается в нуль в точках $z_i = a_i^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$ Следовательно, $\rho_i(0, \ldots, 0) \geqslant \lambda_i$ и $\rho_i \geqslant \lambda_i$, откуда

$$\{a : a \in R_+^n,\ a_i \geqslant \bar{\rho}_i,\ i = 1, \ldots, n\} \subset \{a : a \in R_+^n,\ a_i \leqslant \rho_i,\ i = 1, \ldots, n\}. \qquad (13)$$

На основании (10), (13) заключаем, что

$$B_\rho(f) \subset \{a : a \in R_+^n,\ a_i \geqslant \rho_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}. \qquad (14)$$

Сопоставляя (11) и (14), получаем

$$B_\rho(f) = \{a : a \in R_+^n,\ a_i \geqslant \lambda_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

---

* Этот порядок не зависит от выбора фиксированных значений переменных.

и, значит, гиперповерхностью сопряженных порядков функции $f(z)$ является граница гипероктанта $\{a : a \in R^n_+\ a_i \geqslant \lambda_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Теорема доказана.

Рассмотрим последовательность алгебраических множеств[1]

$$N_{(j)} = \left\{z : z \in C^n, \quad 1 - \sum_{\|k\|=1}^{m} \frac{z^k}{a_k^{(j)}} = 0\right\}$$

при фиксированном m, в предположении, что каждая последовательность $\{a_k^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ имеет конечный показатель сходимости λ_k. Обозначим через J множество всех целых функций $f(z) \not\equiv 0$, для которых

$$\{z : f(z) = 0\} \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} N_{(j)},$$

а через J^* — множество тех целых функций $f(z) \not\equiv 0$, для которых $\{z : f(z) = 0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_{(j)}$. Покажем, что существует оценка снизу роста функций $f \in J$, зависящая только от чисел λ_k. Для получения этой оценки, составляющей содержание теоремы 2, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть последовательности комплексных чисел $\{b_l^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, $l = 1, \ldots, L$ имеют соответственно конечные показатели сходимости μl. Тогда показатель сходимости μ последовательности, образованной корнями полиномов*

$$1 + \sum_{l=1}^{L} \frac{w^l}{b_l^{(j)}} = 0, \ w \in C^1, \ j = 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяет условию $\mu \geqslant l \cdot \mu_e$, $1 \leqslant l \leqslant L$.

Доказательство. Обозначим корни полинома $1 + \sum_{l=1}^{L} \frac{w^l}{b_l^{(j)}} = 0$ через $\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_L^{(j)}$. Так как $b_l^{(j)} \to \infty$ при $j \to \infty$, то при любом $l = 1, \ldots, L$ и любом $\eta > 0$, начиная с некоторого j_0, имеем

$$\left|\frac{1}{b_l^{(j)}}\right|^{\eta} \leqslant \left|\sum (\alpha_{\nu_1}^{(j)} \ldots \alpha_{\nu_l}^{(j)})^{-1}\right|^{\eta} \leqslant \binom{L}{l}^{\eta} \max_{\nu_1 < \cdots < \nu_l} |\alpha_{\nu_1}^{(j)} \ldots \alpha_{\nu_l}^{(j)}|^{-\eta} \leqslant$$

$$\leqslant \binom{L}{l}^{\eta} \frac{1}{l} \sum_{l=1}^{L} |\alpha_l^{(j)}|^{-l\eta},$$

откуда немедленно следует, что $\mu \geqslant l\mu_l$.
Лемма доказана.

[1] Каждая точка рассматриваемых нулевых множеств в данной работе считается с учетом кратности.

Теорема 2. *Каждая функция $f(z) \in J$ удовлетворяет условию*

$$B_\rho(f) \subset \bigcap_{1 \leqslant \|k\| \leqslant m} \left\{a : a \in R^n_+,\ \lambda_k \left\| \frac{k}{a} \right\| \leqslant 1.\right.$$

Доказательство. Известно, что значение $t_\nu(f)$, $\nu \in R^n_+$, определяющее точку пересечения гиперповерхности сопряженных порядков функции $f(z)$ (т. е. $\partial B_\rho(f)$) с прямой $L = \left\{a : a_i = \frac{t}{\nu_i}, \right.$ $\left. i = 1, \ldots, n\right\}$, равно порядку функции $\Phi(R) = M_f(R^{\nu_1}, \ldots, R^{\nu_n})$ Обозначим через t^*_ν значение параметра t, определяющее точку пересечения прямой L_ν с границей области $\bigcap_{1 \leqslant \|k\| \leqslant m} \left\{a : a \in R^n_+,\ \lambda_k \left\| \frac{k}{a} \right\| \leqslant 1\right\}$. Теорема будет доказана, если покажем что $t^*_\nu \leqslant t_\nu$ при любом $\nu \in R^n_+$.

Заметим, что, согласно определению числа t^*_ν, оно равно точной нижней грани тех чисел t, для которых $\lambda_k \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \nu_i}{t} < 1$ при всех K таких, что $\|k\| \leqslant m$. Следовательно,

$$t^*_\nu = \max_{1 \leqslant \|k\| \leqslant m} \lambda_k \langle k, \nu \rangle. \tag{15}$$

Обозначим через Ω множество всех точек ν, имеющих целочисленные координаты и таких, что числа $\langle k, \nu \rangle$ различны при разных $k \in \{k : \|k\| \leqslant m\}$. Обозначим также $f_\nu(w) = f(w^{\nu_1}, \ldots, w^{\nu_n})$, $(w \in C^1,\ \nu \in \Omega)$. Очевидно, что порядок $\rho_\nu(f)$ функции $f_\nu(w)$ не превосходит порядка функции $\ln M_f(R^{\nu_1}, \ldots, R^{\nu_n})$, который, как отмечалось выше, равен t_ν. Заметим далее, что поскольку $f(z) \in J$, множество корней функции $f_\nu(w)$ не уже, чем множество корней всех полиномов $1 + \sum_{1 \leqslant \|k\| \leqslant m} \frac{w^{\langle k, \nu \rangle}}{a^n_k} = 0$. Так как, по предположению, все числа $\langle k, \nu \rangle$ различны, показатель сходимости $\lambda^*_\nu(f)$ указанного множества оценивается, согласно лемме 2, неравенством

$$\lambda^*_\nu(f) \geqslant \max_{1 \leqslant \|k\| \leqslant m} (\lambda_k \langle k, \nu \rangle).$$

Отсюда, учитывая (15) и отмеченные выше неравенства $\rho_\nu(f) \geqslant \lambda^*_\nu(f)$, $t_\nu \geqslant \rho_\nu(f)$, заключаем, что $t_\nu \geqslant t^*_\nu\ \forall_\nu \in \Omega$. Нетрудно видеть, что при $\nu \in \Omega$ прямые L_ν образуют множество, всюду плотное в R^n_+. Следовательно, неравенство $t_\nu \geqslant t^*_\nu$ имеет место всюду в R^n_+. Теорема доказана.

Теорема 3. *Существует такая целая функция* $f(z) \in J^*$, *что*

$$B_\rho(f) = \bigcap_{0<\|k\|<m} \left\{a : \lambda_k \left\| \frac{k}{a} \right\| \leqslant 1\right\}. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть L — число слагаемых в сумме $\sum\limits_{1\leqslant\|k\|\leqslant m} \frac{z^k}{a_k^{(j)}}$, а $\sigma : k \to i = \sigma(k)$ — какое-нибудь взаимно-однозначное отображение множества $\{k : \|k\| \leqslant m\}$ на множество $\{i : i = 1, \ldots, L\}$. Согласно теореме 1, существует такая функция $f(\zeta) \not\equiv 0$, $\zeta \in C^1$, что

$$\{\zeta : \varphi(\zeta) = 0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{\zeta : 1 - \sum_{1\leqslant\|k\|<m} \frac{\zeta_{\sigma}(k)}{a_k^{(j)}} = 0\right\}$$

и

$$\ln M_\varphi(r_1, \ldots, r_n) \underset{ac}{<} \sum_{i=1}^{n} r_i^{\lambda_k + \varepsilon}, \quad k = \overset{-1}{\sigma}_{(i)}. \tag{17}$$

Очевидно, что функция

$$f(z) = \varphi(\zeta)\Big|_{\substack{\zeta_i = z^{\overset{-1}{\sigma}(i)} \\ i=1, \ldots, L}},$$

принадлежит множеству J^*. Оценим ее рост. Из (17) следует, что

$$\overline{B}_\rho(\varphi) \supset \bigcap_{j=1}^{L} B_\rho(\psi_j),$$

где $\psi_i = \psi_{\sigma(k)} = (r_1^{k_1}; \ldots r_n^{k_n})^{\lambda_k}$. Известно [1, с. 176], что для функции $\prod\limits_{i=1}^{n} r_i^{k_i}$ соответствующее множество $B_\rho = \left\{a : a \in R_+^n, \ \lambda_k \left\| \frac{k}{a} \right\| \leqslant 1\right\}$.

Ввиду этого из (18) следует, $B_\rho(f) \supset \bigcap\limits_{1\leqslant\|k\|<m} \left\{a : \lambda_k \left\| \frac{k}{a} \right\| \leqslant 1\right\}$. Обратное включение вытекает из теоремы 2. Следовательно, функция $f(z)$ удовлетворяет условию (16). Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность Л. И. Ронкину за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.
2. Baumgartner L. Beiträge zur Theorie der ganzen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. — In: Monatshefte für Mathematik und Physik. Wien, 1914, S. 18—39.