УДК 517.97

Ш. Асади, **канд. физ.-мат. наук**

СИММЕТРИЧНО-ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ОПЕРАТОРНЫЕ УЗЛЫ

§ 1. Симметрично-вещественные операторы

Отображение K комплексного гильбертова пространства H на себя называется инволюцией, или оператором комплексного сопряжения, если $(Kf, Kg) = \overline{(f, g)}$, $K^2 = I$, где I — единичный оператор [1]. Если для ограниченного линейного оператора $T \in [H, H]$ существует инволюция K, которая связана с ним одним из условий

$$KT = TK; \tag{А}$$

$$KT = -TK; \tag{Б}$$

$$KT = T^*K, \tag{В}$$

то оператор T называется K-вещественным (А), K-мнимым (Б), K-симметричным (В) [2, с. 287]. Если существует пара инволюций K_1 и K_2, связанных с оператором T условиями (А) и (Б), то оператор называется бисимметричным [3].

Определение. *Оператор T будем называть симметрично-вещественным (с.-в. оператором), если существует пара таких инволюций, которые связаны с T условиями* (В) *и* (А). *Оператор T будем называть симметрично-мнимым (с.-м. оператором), если существует пара таких инволюций, которые связаны с T условиями* (В) *и* (Б).

Очевидно, если T — с.-м. оператор, то iT — с.-в. оператор, и наоборот.

Пример 1. Оператор $Tf = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ является с.-в. оператором в $L_2\,[0;\,1]$ относительно инволюций $K_1 f(t) = \overline{f(t)}$, $K_2 f(t) = \overline{f(1-t)}$.

Пример 2. Пусть $H = H_1 \oplus H_2$, а оператор T изометрически отображает H_1 на H_2 и равен нулю на H_2. Тогда T — с.-в. оператор.

Пример 3. Оператор двойного сдвига является как с.-в., так и с.-м. оператором.

Из результатов работ [5, 7] вытекает

Теорема 1. *Для того чтобы нормальный оператор T был с.-в. (с.-м.) оператором, необходимо и достаточно:*

а) *чтобы существовал такой унитарный оператор U, что $UTU^{-1} = T^*$ $(UTU^{-1} = -T^*)$; или* б) *чтобы спектральная функция оператора T была симметрична относительно вещественной (мнимой) оси.*

Очевидно, произведение двух инволюций есть унитарный оператор, причем его спектр состоит из двух точек, когда эти инволюции коммутируют. Оператор, симметрично-вещественный относительно таких инволюций, может быть неприводимым (пример 1), однако справедлива

Теорема 2. *Если оператор T связан с инволюциями K_1 и K_2 условиями* (В) *и* (А), *а $K_1K_2 \neq K_2K_1$, то*

а) *$T = T_1 \oplus T_2$, где T_1 и T_2 также удовлетворяют условиям* (В) *и* (А);

б) *существует инволюция K_3 такая, что $K_1K_3 = K_3K_1$ и K_3 связан с T условием* (А). *Аналогичным свойством обладает и с.-м. оператор.*

Доказательство этой теоремы подобно доказательству аналогичной теоремы для бисимметричных операторов [8]. С помощью теоремы 2 может быть доказана

Теорема 3. *Для того чтобы T был с.-в. оператором, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой ортонормированный базис, в котором T задается блочной матрицей вида*

$$[T] = \begin{bmatrix} A & iB \\ iC & D \end{bmatrix},$$

где A, B, C, D — вещественные матрицы, а сама матрица $[T]$, симметрична, т. е. совпадает с транспонированной.

§ 2. Симметрично-вещественные операторные узлы

Операторным узлом M называется [4] совокупность гильбертовых пространств H, E и операторов $T \in [H, H]$, $\Gamma \in [E, H]$, $J \in [E, E]$ таких, что

$$\Gamma J \Gamma^* = \frac{1}{2i}(T - T^*) = T_I, \; J = J^*, \; J^2 = I.$$

При этом оператор T называется основным оператором узла, $\overline{\Gamma(E)}$ — каналовым подпространством, а $T_1(H) \subset \Gamma(E) \subset H$. Если замыкание линейной оболочки векторов вида $T^n\Gamma g$ ($n = 0, 1, \ldots, g \in E$) совпадает с H, то узел носит название простого. Для любого подпространства R такого, что $T_1(H) \subseteq R \subseteq H$, можно построить узел M, у которого T — основной оператор, а R — каналовое подпространство [4]. При этом можно положить $\Gamma g = g$ для $g \in R \ominus T_1(H)$. Такой узел станем называть *стандартным R-узлом.*

Над любым операторным узлом $M = [(H, T), \Gamma, (E, J)$ можно производить операции, снова переводящие его в операторный узел (здесь K_1, K_1' — инволюции в H и E):

$$M_- = [(H, -T), \Gamma, (E, -J)];$$
$$M^* = [(H, T^*), \Gamma, (E, -J)];$$
$$M_K = [(H, K_1TK_1), K_1\Gamma K_1', (E, K_1'JK_1')].$$

Узел M называется K-вещественным (соответственно K-мнимым, K-симметрическим), если существует такая пара инволюций K_1, K_1', что соответственно выполняются равенства

$$M_K = M; \qquad (А)$$

$$M_K = M_-; \qquad (Б)$$

$$M_K = M^*. \qquad (В)$$

Определение. *Операторный узел будем называть симметрично-вещественным (симметрично-мнимым), если существуют две пары таких инволюций, что выполняются соответственно условия* (В) *и* (А) *или* (В) *и* (Б).

Теорема 4. *Если M—с.-в. узел, то его основной оператор T—с.-в., а каналовое подпространство $\overline{\Gamma(E)}$ приводит инволюции K_1, K_2. Наоборот, если T — с.-в. оператор, а подпространство $R\,[T_I(H) \subseteq R \subseteq H]$ приводит соответствующие инволюции, то стандартный R-узел является с.-в. узлом. В частности, всякий с.-в. оператор можно включить в простой с.-в. узел. Аналогичное утверждение справедливо и для с.-м. узлов.*

Каждому операторному узлу соответствует характеристическая оператор-функция, которая определяет простой узел с точностью до унитарной эквивалентности [4]:

$$W_M(\lambda) = I - 2i\Gamma^*(T - \lambda I)^{-1}\Gamma J.$$

Эта функция называется [6] вещественной (соответственно мнимой, симметрической), если в пространстве E существует инволюция K такая, что

$$KW(\overline{\lambda}) = W(\lambda)K; \quad KJ = -JK; \qquad (А)$$

$$KW(-\overline{\lambda}) = W(\lambda)K; \quad KJ = JK; \qquad (Б)$$

$$KW^*(\lambda) = W(\lambda)K; \quad KJ = -JK. \qquad (В)$$

Определение. *Характеристическую оператор-функцию $W(\lambda)$ будем называть симметрично-вещественной или симметрично-мнимой, если в пространстве E существует пара таких инволюций, которые связаны с $W(\lambda)$ и J условиями* (В) *и* (А) *или соответственно* (В) *и* (Б).

Теорема 5. *Для того чтобы простой узел был симметрично-вещественным, необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая оператор-функция была симметрично-вещественной.*

Аналогичная теорема справедлива для симметрично-мнимых узлов.

Узел называется конечномерным, если пространство E конечномерно. Такому узлу ставится в соответствие семейство матричных узлов, определяемых выбором ортонормированного базиса $\{e_n\}$ в E [4]. При этом каждому матричному узлу соответствует характеристическая матрица — функция $\omega(\lambda) = [(W(\lambda)e_k, e_m)]$.

Теорема 6. *Для того чтобы конечномерный операторный узел был симметрично-вещественным, необходимо и достаточно, чтобы среди его матричных узлов существовал узел с характеристической матрицей — функцией вида*

$$\omega(\lambda) = \begin{bmatrix} \omega_1(\lambda) & i\omega_2(\lambda) \\ i\omega_3(\lambda) & \omega_4(\lambda) \end{bmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

где $\overline{\omega_K(\bar{\lambda})} = \omega_K(\lambda)$, $\omega_4(\lambda) = \omega_1(\lambda)$, $\omega_3(\lambda) = \omega_2^\tau(\lambda)$ (ω^τ — *транспортированная матрица). Для симметрично-мнимых узлов эти матрицы имеют вид*

$$\overline{\omega_K(-\bar{\lambda})} = \omega_K(\lambda), \quad \omega_K^\tau(\lambda) = \omega_K(\lambda), \quad j = \begin{pmatrix} j_1 & 0 \\ 0 & j_2 \end{pmatrix}; \quad j = \bar{j}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., Физматгиз, 1966. 543 с.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М., Физматгиз, 1967. 448 с.
3. Годич В. И. Об инвариантных подпространствах вполне непрерывных операторов. — «Укр. мат. журнал», 1966, т. 18, № 3, с. 103—107.
4. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969. 287 с.
5. Асади Ш., Луценко И. Е. Антиунитарные преобразования линейных операторов. — «Вестник Харьк. ун-та», 1972, № 83. Математика и механика, вып. 37, с. 13—20.
6. Асади Ш., Луценко И. Е. Антиунитарные преобразования операторных узлов. — Там же, с. 21—26.
7. Асади Ш. Симметрия спектральной функции нормального оператора. — Там же, с. 27—30.
8. Годич В. И., Луценко И. Е. О структуре бисимметричных операторов.— В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 16. Харьков, 1972, с. 138—139.