УДК 513.88 517.55

В. П. Захарюта, **канд. физ.-мат. наук**

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ГИЛЬБЕРТОВЫ ШКАЛЫ И ИЗОМОРФИЗМ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.I

§ 1. Введение

1.1. В статье рассматриваются пространства $A(F)$ (определение см. п. 2.9) всех аналитических ростков на подмножестве F многообразия Штейна Ω размерности n. Изучаются следующие связанные между собой вопросы: условия изоморфизмов

$$A(D) \cong A(U^n), \tag{1}$$

$$A(K) \cong A(\overline{U^n}), \tag{2}$$

где U^n — единичный полидиск в C^n; поведение гильбертовой шкалы, натянутой на пару гильбертовых пространств аналитических функций; существование и свойства общего базиса в

$$A(K) \text{ и } A(D),\ K \subset D \ll \Omega.$$

Основные результаты сформулированы в § 4 и доказаны в последующих параграфах[1]. Предварительно следует просмотреть § 2, где приведены обозначения и некоторые известные факты, а также § 3, где вводятся и обсуждаются важные для дальнейшего определения (экстремальные функции $\omega(D, k, z)$, $\gamma(D, k, z)$, C^n-регулярность, сильная и усиленная псевдовыпуклость), в терминах которых формулируется большинство результатов. Ряд результатов имеет вспомогательный характер, но представляют самостоятельный интерес, например, результаты о локально-выпуклых пространствах с гильбертовыми нормами и безусловным базисом (леммы 5.3, 9.1).

[1] §§ 5—10 составляют вторую часть настоящей статьи и будут опубликованы в следующих выпусках сборника.

В § 10 приводятся некоторые нерешенные задачи и их обсуждение. Часть результатов (наиболее существенные из них — предложения 3.6, 10.1, 10.3, 10.2, 10.4. 10.6) приводится без доказательств.

Большинство результатов данной статьи было анонсировано в заметках [23, 24].

Ниже приводится обзор близких результатов (в основном касающихся вопроса об изоморфизме [1], обсуждаются некоторые связи и идейная сторона исследования.

1.2. В 1960 г. независимо Л. А. Айзенберг и Б. С. Митягин [4], С. Ролевич [46], С. Д. Окунь [43][1] доказали изоморфизм (1), (2) в случае, когда D — ограниченная полная краткокруговая область, $K = \overline{D}$. Л. А. Айзенберг [3] получил изоморфизм (1) для ограниченных (p, q)-круговых областей (при некоторых добавочных ограничениях). С. Г. Гиндикин [17] исследовал изоморфизм (1) для трубчатых областей. Во всех процитированных работах по существу используется наличие достаточно широкой группы биголоморфных автоморфизмов области D. Б. С. Митягин [38, предложение 23], подводя итог такого рода результатам, утверждает, что для изоморфизма (1) достаточно существования богатого семейства псевдоконформных отображений области D в себя.

Г. М. Бездудный [5] получил необходимые и достаточные условия изоморфизма (1) для класса всех (не обязательно полных и ограниченных) кратнокруговых областей в C^n. Из его результатов следует существование ограниченной (неполной) краткокруговой области голоморфности, для которой не выполняется (1).

Важную роль в исследовании вопроса об изоморфизме (1) сыграло следующее.

Предложение 1.1. [38, с. 127]. *Пусть D — ограниченная область голоморфности в C^n. Тогда* (1) *вытекает из изоморфизма пространства $A(D)$ какому-либо конечному центру гильбертовой шкалы.*

Подробное доказательство этого утверждения приведено в [41, с. 105—110]; там же доказано более общее.

Предложение 1.1а. *Пусть D — псевдовыпуклая область на многообразии Штейна Ω размерности n. Тогда* (1) *вытекает из изоморфизма $A(D)$ какому-либо конечному центру гильбертовой шкалы.*

В конце § 4 мы дадим другое доказательство этого предложения.

Предложение 1.1 использовалось в [25], где с помощью предложения 1.1. следовал изоморфизм (1). Важную роль при этом выполняло удачное представление сопряженного пространства для выпуклых областей [2, 36, 37].

Используя в качестве одного из моментов доказательства результаты [25], Б. С. Митягин и Г. М. Хенкин получили в [40] общие достаточные условия изоморфизма (1); этим условиям удовлетворяет, в частности, всякая строго псевдовыпуклая область в C^n.

[1] В [43] рассмотрен случай $n = 2$.

Подробные доказательства результатов [40] опубликованы в обзорной статье тех же авторов [41][1].

В наших заметках [23, 24] для областей в C^n были даны необходимые и близкие к ним достаточные условия изоморфизмов (1), (2), естественно обобщающие наши результаты [29] для $n = 1$. Достаточные условия в [40, 41] и в [23, 24] пересекаются, но не вытекают друг из друга.

В настоящей статье приводятся, в частности, подробные доказательства результатов [23, 24] в усиленной форме (для областей и компактов на произвольных многообразиях Штейна).

1.3. Полное решение вопроса об изоморфизме (1), (2) для $n = 1$ было дано в [29] в терминах теории потенциала в $R^2 = C^1$. Поскольку (суб) гармонические функции в $R^{2n} = C^n$ при $n > 1$ уже не связаны с голоморфными функциями так тесно, как при $n = 1$, возникла необходимость в рассмотрении соответствующих новых понятий. В [23, 24] были определены C^n-регулярность компактов, сильная (усиленная) псевдовыпуклость открытых множеств в C^n, которые определялись в терминах свойств, некоторой максимальной плюриосубгармонической функции $\omega(D, K\ z)$. Подробному рассмотрению этих понятий на многообразиях Штейна посвящен § 3 настоящей статьи.

В терминах этих понятий в § 4 формулируются результаты об изоморфизмах (1), (2), доказываемые в § 5.

1. 4. Центральное место в работе занимает исследование поведения гильбертовой шкалы H^α, натянутой на пару гильбертовых пространств H_1, H_0, надлежащим образом (см. § 4) связанных с пространствами $A(D, A(K)$, где K — компакт в открытом множестве D на многообразии Штейна. Для изоморфизма (1) достаточно выполнения довольно грубых оценок шкалы H^α сверху и снизу:

$$A(F_\alpha) \subset H^\alpha \subset A(D_\alpha),\ 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

где $K \subset\subset D_\alpha \subset F_\alpha \subset\subset D,\ D = \underset{\alpha<1}{U} D_\alpha,\ D_\alpha < D_\beta,\ \alpha < \beta$.

Действительно, тогда $A(D) = \lim\limits_{\alpha<1} prH^\alpha$, что, согласно предложению 1.1a, дает изоморфизм (1) (аналогичные рассуждения применимы и для компактов).

В § 6—8 при довольно общих условиях получена более точная информация о шкале H^α, нежели нужно для установления изоморфизмов (1), (2). А именно, показано (теорема 4.1), что пространство H^α «сидит» на поверхности уровня экстремальной плюрисубгармонической функции $\omega(D, K, z)$, т. е. в (3) можно выбрать F_α, D_α, так, чтобы

$$F_\alpha - D_\alpha \subset \{z \in D : \omega(D, K, z) = \alpha\}.$$

Подобный результат при $n = 1$ был получен в работе автора [28].

---

[1] Изоморфизм пространств — один из вопросов, рассматривавшихся в [41].

Если получение точных правых вложений в (3) связано лишь с выяснением оптимальных поверхностей в аналоге теоремы Адамара о трех кругах, то левые вложения при $n \geqslant 2$ получаются труднее. Это объясняется отсутствием удобного представления для пространств $A(D)^*$, $A(K)^*$.

Поэтому сначала в § 7 рассмотрен случай «подобных» аналитических полиэдров на многообразии Штейна, который с помощью теоремы Реммерта-Бишопа-Нарасимхана о вложении и теоремы А. Картана о сюръективности оператора ограничения сводится к совсем простому случаю полидисков с общим центром. Общий случай приводится к предыдущему с помощью теоремы о линейном операторе в индуктивном пределе. Для этого пара $K \subset D$ — компакт, область — аппроксимируется парами «подобных» аналитических полиэдров $\Delta_0 \subset \Delta_1$, так, что поверхности уровня функции $\omega(D, K, z)$ аппроксимируются промежуточными полиэдрами Δ_α (здесь используются свойства экстремальной функции ω и теорема Бремермана о непрерывных плюрисубгармонических функциях (см. предложение 2.11)).

Отметим, что применение теоремы А. Картана (инспирированное рассмотрениями [41, п. 2.11]) весьма улучшило первоначальное доказательство (частично анонсированное в [23]), в частности, отпала необходимость громоздких рассмотрений, связанных с интегральной формулой Вейля [26]; кроме того, рассмотрение теперь ведется сразу для многообразий Штейна.

§ 2. Обозначения и предварительные сведения

Приводимые ниже обозначения будут применяться на протяжении всей статьи.

2.1.

$$|x|_F \overset{\text{def}}{=} \sup\{|x(z)| : z \in F\}.$$

2.2. $F_1 \subset\subset F_2$ означает, что F_1 относительно компактно в $\operatorname{int} F_2$.

2.3. $U^n(r)$ — полидиск в C^n с центром в нуле и полирадиусом

$$r = (r_1, \dots, r_n); \quad U^n = U^n(1, \dots, 1).$$

2.4. Включение для локально выпуклых пространств $X \subset Y$, как правило, означает непрерывное вложение.

2.5. Пусть A — ограниченный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H. Гильбертовой шкалой (порожденной оператором A) называется однопараметрическое семейство $\{H^\lambda\}$ гильбертовых пространств, порожденное скалярными произведениями

$$(x, y)_\lambda = (A^{-\lambda} x, A^{-\lambda} y)_H,$$

H^λ — пополнение H по норме $\|x\|_\lambda = (x, x)_\lambda^{1/2}$ при $\lambda \leqslant 0$; H^λ — область определения неограниченного оператора $A^{-\lambda}$ при $\lambda > 0$.

Неоднократно будет применяться интерполяционная теорема для гильбертовых шкал (С. Г. Крейн [32], Лионс [34]; см. также [10, с. 143]). Мы приводим ее в удобном для дальнейшего ослабленном виде.

Предложение 2.1. Пусть $\{H^\alpha\}$, $\{G^\alpha\}$ — две гильбертовы шкалы. Пусть $T: H^0 \to G^0$ — линейный непрерывный оператор, переводящий непрерывно H^1 в G^1. Тогда T переводит непрерывно H^α в G^α.

2.6. Пусть $H_1 \subset H_0$ — гильбертовы пространства. Тогда будем обозначать

$$H^\alpha = (H_0)^{1-\alpha} (H_1)^\alpha, -\infty < \alpha < \infty$$

гильбертову шкалу, порожденную парой гильбертовых пространств H_1, $\hat{H}_0$, где $\hat{H}_0$ — пополнение H_1 в H_0 [10, с. 140]: $H^1 = H_1$, $H^0 = \hat{H}_0$.

Пусть вложение $H_1 \subset H_0$ вполне непрерывно. Существует [38, с. 98] общий ортогональный базис $\{e_k\}$ в H_1 и $\hat{H}_0$ (и во всех H^α, $-\infty < \alpha < \infty$), нормированный в H_0 и упорядоченный по возрастанию норм в H_1. Будем обозначать

$$\mu_k(H_0, H_1) \overset{\text{def}}{=} \| e_k \|_{H_1}.$$

Как вытекает из [38, следствие 3],

$$\mu_n(H_0, H_1) = d_n(U_1, U_0)^{-1}, \tag{1}$$

где $d_n(U_1, U_0)$ — n-поперечник единичного шара U_1 в H_1 относительно единичного шара U_0 в H_0 (в удобной для нас форме см. [38, с. 79]). Благодаря (1), непосредственно из определения n-поперечников вытекает

Предложение 2.2. [27, лемма 2]. *Пусть $H_1 \subset G_1 \subset G_0 \subset H_0$ — гильбертовы пространства, вложение $G_1 \subset G_0$ вполне непрерывно. Тогда*

$$\mu_n(G_0, G_1) \leqslant C\mu_n(H_0, H_1).$$

Следующее утверждение фактически содержится в [38, § 3].

Предложение 2.3. *Пусть X — ядерное локально-выпуклое пространство; H_0, H_1 — гильбертовы пространства:*

$$H_1 \subset X \subset H_0.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(H_0, H_1)^{-\delta} < \infty, \forall \delta > 0.$$

2.7. Пусть $\{H^\alpha\}$ — гильбертова шкала. Она порождает две шкалы локально выпуклых пространств [38, с. 99; 42]

$$E_\alpha = \lim pr H^\lambda, -\infty < \alpha \leqslant \infty,$$

$$\bar{E}_\alpha = \lim_{\lambda > \alpha} \operatorname{ind} H^\alpha, -\infty < \alpha < \infty.$$

Следуя [42], пространство $E_\alpha(\overline{E}_\alpha)$ будем называть центром (коцентром) шкалы $\{H^\alpha\}$, конечным, если $-\infty < \alpha < \infty$, и бесконечным, если $\alpha = \infty$ ($\alpha = -\infty$).

Подробные сведения о (ко)центрах шкал см. [38, § 5; 39, § 1; 40, § 1]. Мы неоднократно будем использовать критерий изоморфизма конечных (ко)центров шкал, принадлежащий Б. С. Митягину [42; 38, предложение 18, 3) $\Leftrightarrow$) 1]:

Пусть H^λ, G^λ — две гильбертовы шкалы, порожденные вполне непрерывными операторами; E_α, $\overline{E}_\alpha$, F_α, $\overline{F}_\alpha$ — центры и коцентры, соответственно порожденые этими шкалами. Для каждого из изоморфизмов $E_\alpha \simeq F_\beta$, $\overline{E}^\alpha \simeq \overline{F}_\beta$, $-\infty < \alpha, \beta < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\ln_{\mu_n}(H_0, H_1) \asymp \ln_{\mu_n}(G_0, G_1),\ n \to \infty^1.$$

2.8. Обозначение $X = \lim \operatorname{ind}(X_q, V_q)$ будем употреблять для индуктивного предела X семейства локально-выпуклых пространств X_q относительно линейных отображений $V_q : X_q \to X$ [45, с. 118—119]. Если V_q — тождественные вложения, будем писать $X = \lim \operatorname{ind} X_q$.

Наряду с общей теоремой о линейном непрерывном операторе в индуктивном пределе [45, с. 119] будем часто применять

Предложение 2.4. *Пусть* $X = \lim \operatorname{ind} X_p$, $Y = \lim \operatorname{ind} Y_q$, X_p — *банаховы пространства, и второй предел регулярен (т. е. всякое ограниченное множество в* Y *содержится и ограничено в некотором* Y_q). *Линейный оператор* $T : X \to Y$ *является непрерывным тогда и только тогда, когда по любому* p *найдется* q *такое, что* T *переводит непрерывно* X_p *в* X_q.

2.9. Пусть Ω — комплексное многообразие, $F \subset \Omega$; $O(F)$ — совокупность всех открытых окрестностей D множества F в Ω; $A(D)$ — пространство всех функций, аналитических в открытом множестве D, с топологией равномерной сходимости на компактах в D. $A(D)^k$ — пространство всех аналитических отображений $f = (f_j) : D \to C^k$.

Будем обозначать $A(F)$ локально выпуклое пространство всех ростков аналитических функций (для краткости — аналитических ростков) на F с топологией индуктивного предела пространств $A(D)$, $D \in O(F)$ относительно естественных отображений $j(D, F) : A(D) \to A(F)$; $j(D, F)$ ставит в соответствие функции $x \in A(D)$ ее росток на F:

$$A(F) = \lim \operatorname{ind}(A(D),\ j(D, F))$$

([18], см. также [51]). В случае, когда F — открытое множество, мы отождествляем аналитические функции с их ростками.

2.10. Для $F \subset E \subset \Omega$ определим два отображения: отображение $j = j(E, F) : A(E) \to A(F)$, ставящее в соответствие ростку $\in A(E)$ его сужение на F — аналитический росток $\| F \in A(F)$, и отображе-

---

[1] Обозначение $a_n \asymp b_n$ означает $a_n = O(b_n)$, $b_n = O(a_n)$, т. е. слабую эквивалентность.

ние $\gamma=\gamma(E, F): A(E) \to C^F$, ставящее ростку $\xi \in A(E)$ его значение $|F$ на $\in A(E)F$, т. е. сужение $x|F$ (все равно какой) функции $x \in A(D)$, $D \in O(E)$, представляющей росток ξ.

Если $j(E, F)$ — мономорфизм, мы будем часто писать $A(E) \subset \subset A(F)$, отождествляя росток $\xi \in A(E)$ с его сужением $\xi \| F$.

2.11. Если Ω — аналитическое многообразие, счетное на бесконечности (т. е. $\Omega = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} K_s$, $K_s \subset\subset K_{s+1}$), то $A(\Omega)$ является F-пространством. Для того, чтобы $A(\Omega)$ обладало невырожденной непрерывной полунормой (т. е. нормой), необходимо и достаточно, чтобы Ω имело не более, чем конечное число связных компонент.

2.12. Пусть K — компакт на аналитическом многообразии Ω. Определим нормированное пространство $AC(K)$-подпространство в $C(K)$, получающееся замыканием множества значений на K ростков из $A(K)$. Если отображение $\gamma(K, K)$: $A(K) \to AC(K)$ является монофморфизмом (т. е. K является множеством единственности для аналитических функций), то будем, как в п. 2.10, говорить об обычном вложении $A(K) = AC(K)$.

2.13. Если K — компакт на аналитическом многообразии Ω, то существует счетная последовательность открытых множеств $\{D_s\}: \bigcap\limits_{s=1}^{\infty} D_s = K$, $D_{s+1} \subset\subset D_s$ такая, что каждое D_s не имеет связных компонент, дизъюнктных с K. Тогда (с учетом соглашения пункта 2.10) $A(K) = \lim \operatorname{ind} A(D_s) = \lim\limits_{s} \operatorname{ind} AC(\overline{D}_s)$.

2.14. Далее предполагаем, что Ω — многообразие Штейна [52, с. 146]. На многообразия Штейна переносятся многие факты комплексного анализа в C^n. Мы приведем те из них, которые будем применять в дальнейшем.

Пусть $K \subset D \subset \Omega$, $A(D)$-оболочкой множества K называют множество

$$\hat{K}_D = \{z \in D : |f(z)| \leqslant |f|_K, \ \forall f \in A(D)\}.$$

Предложение 2.5. (см., например, [52, следствие 5.2.9]. *Пусть K — голоморфно выпуклый компакт на многообразии Штейна Ω, т. е. $\hat{K}_\Omega = K$. Тогда $A(\Omega)$ плотно в $A(K)$.*

Пусть D — открытое множество в Ω. Функцию $u: D \to R$ называют плюрисубгармонической в D $(u \in P(D)$, если она полунепрерывна сверху и для всякого голоморфного отображения $\varphi: U^1 \to D$ функция $U \circ \varphi$ является субгармонической в U^1. Комплексное аналитическое многообразие Ω называется псевдовыпуклым, если для любого компакта K в Ω его плюрисубгармоническая оболочка

$$\hat{K}^p_\Omega \overset{\text{def}}{=} \{z \in \Omega : u(z) \leqslant \sup_{\zeta \in K} n(\xi), \ \forall u \in P(\Omega)\}$$

относительно компактна в Ω. Комплексное аналитическое многообразие Ω_1 называют римановой областью над Ω, если существует локально биголоморфное отображение $\Phi: \Omega_1 \to \Omega$ и аналитические функции разделяют точки Ω_1.

Предложение 2.6. [19, с. 113]. *Пусть Ω_1 псевдовыпуклая риманова область над многообразием Штейна Ω. Тогда Ω_1 — многообразие Штейна.*

Предложение 2.7. [19, с. 114—116; 48, с. 16—17]. *Пусть Ω_1 — риманова область над Ω. Тогда существует оболочка голоморфности $\tilde{\Omega}_1$ области Ω_1* (определение см. [52, с. 174]), *являющаяся псевдовыпуклой римановой областью над Ω (а значит, и многообразием Штейна).*

Эти утверждения обобщают известные теоремы Ока об областях над C^n (см., например, [52, п. 5.4]) и получаются из них с помощью приема, предложенного Грауэртом и Докье [19]. Последний состоит в применении теоремы Реммерта о биголоморфном отображении произвольного многообразия Штейна на замкнутое подмногообразие в C^N при достаточно большом N и следующего утверждения (которые мы приводим в упрощенной формулировке [15, с. 329]).

Предложение 2.8. [19, с. 103]. *Пусть Ω — замкнутое подмногообразие в C^n. Тогда для некоторой открытой окрестности $V \supset \Omega$ существует голоморфная ретракция*

$$\varphi: V \to \Omega.$$

С помощью этого же метода легко переносятся на многообразия Штейна следующие утверждения о плюрисубгармонических функциях (укажем лишь, что в условиях предложения 2.8 для всякой плюрисубгармонической в Ω функции u функция $u \circ \varphi$ является плюрисубгармонической на V, причем $U_0 \varphi \,|\, \Omega \equiv U$).

Предложение 2.9. (аппроксимационная теорема). *Пусть u — плюрисубгармоническая функция в открытом множестве D на Ω. Тогда существует убывающая последовательность функций $\{u_j\}$, такая, что u_j — плюрисубгармонична и бесконечно дифференцируема в D_j ∞, $D_j \subset\subset D_{j+1}$, $j = 1, \ldots,$ $D = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} D_j$, $u(z) = \lim\limits_{j\to\infty} u_j(z)$.*

Предложение 2.10. *Пусть $\bar{u}$ — плюрисубгармоническая функция в псевдовыпуклом открытом множестве D на Ω. Тогда существует последовательность функций $f_j \in A(D)$, $j = 1 \ldots$, такая, что*

$$u(z) = \overline{\lim_{\zeta\to z}}\, \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\ln |f_j(u)|}{j}.$$

Это утверждение для псевдовыпуклой области $D \subset C^n$ содержится в доказательстве Бремермана теоремы о совпадении функций Гартогса и плюрисубгармонических функций (см., например, [47, с. 170—171].

Предложение 2.11. [6—8]. *Пусть u — непрерывная плюрисубгармоническая функция в псевдовыпуклом открытом множестве*

D на Ω. Тогда по любым $\varepsilon > 0$, $D_1 \Subset D$ найдутся функции $f_j \in A(D)$ и константы

$$c_j > 0,\ j = 1,\ \ldots,\ k,\ \ k = k(D_1, \varepsilon),$$

такие, что

$$u(z) - \varepsilon < \sup\{c_j \ln|f_j(z)| : j = 1\ \ldots,\ k\} < u(z).$$

§ 3. Экстремальные плюрисубгармонические функции и C^n-регулярность

3.*1*. Пусть Ω — многообразие Штейна [52, с. 146]. Пусть $F \subset \Omega$ и D — открытая окрестность F в Ω. Определим функции

$$\omega^0(z) = \omega^0(D, F, z) = \sup\{u(z) : u \in P(D),$$
$$u|D < 1,\ u|F \leqslant 0\},$$
$$\omega(z) = \omega(D, F, z) = \overline{\lim_{\zeta \to z}}\, \omega^0(D, F, \zeta),\ z \in D,$$

где $P(D)$ — совокупность всех плюрисубгармонических в D функций.

Приведем некоторые простые свойства этих функций:

а) ω — плюрисубгармоническая функция в D,

б) $\omega^0(z) = 0,\ z \in F$; $\omega(z) \geqslant 0,\ z \in F$; $\omega(z) = 0,\ z \in \operatorname{int} F$,

в) если F — открытое множество, то

$$\omega^0(D, F, z) = \omega(D, F, z);$$

г) из $D_1 \subset D$, $F_1 \subset F$ следует

$$\omega(D, F, z) \leqslant \omega(D_1, F_1, z),\ z \in D_1,$$

д) если D' — связная компонента множества D и $D' \cap F = \varnothing$, то

$$\omega(D, F, z) \equiv 1,\ z \in D',$$

е) $\omega(D, F, z) \equiv \omega(D, \hat{F}^p_D, z),\ z \in D$.

Свойства г) — е) имеют место и для функции ω^0.

3.2. Определим еще одну экстремальную функцию

$$\gamma(z) = \gamma(D, F, z) = \lim_{\zeta \to z} \sup\{c \ln|x(\zeta)| : x \in A(D),\ c > 0,$$
$$|x|_D \leqslant \exp 1/c,\ |x|_F \leqslant 1\},\ z \in D.$$

Просто устанавливаются свойства этой функции: а) γ — плюрисубгармоническая функция в D, б) $\gamma(z) \leqslant \omega(D, F, z)$, $z \in D$, в) из $D_1 \subset D$, $F_1 \subset F$ следует

$$\gamma(D, F, z) = \gamma(D_1, F_1, z),\ z \in D_1,$$

г) если $\tilde{D}$ — оболочка голоморфности [49, с. 174][1] открытого множества $\tilde{D} \subset \Omega$, то

$$\gamma(D, F, z) = \gamma(D, \hat{F}_{\tilde{D}}, z),\ z \in D.$$

3.3. ***Лемма 3.1.*** *Пусть D — псевдовыпуклое открытое множество на многообразии Штейна Ω, $K \subset D_1 \subset\subset D$, K — компакт в Ω, D_1 — открытое множество. Тогда*

$$\omega(D, K, z) \leqslant \gamma(D_1, K, z),\ z \in D_1.$$

Доказательство. Пусть L — класс всех функций, удовлетворяющих условиям

$$u \in P(D),\ u\,|\,K \leqslant 0,\ u\,|\,D < 1.$$

Пусть $u \in L$. В соответствии с предложением 2.10 существует последовательность функций

$$f_j \in A(D),\ j = 1,\ \dots,$$

таких, что

$$u(z) = \overline{\lim_{\zeta \to z}}\ \overline{\lim_{j \to \infty}} \frac{\ln |f_j(\zeta)'}{j},\quad z \in D.$$

Применяя лемму Гартогса (см., например, [47, с. 53] к последовательности субгармонических функций $\frac{\ln|f_j(z)|}{j}$, по любому $\varepsilon > 0$ найдем j_0, такое, что при $j \geqslant j_0$: $\frac{\ln|f_j(z)|}{j} < 1$, если $z \in D_1$ и $\frac{\ln|f_j(z)|}{j} < \varepsilon$, если $z \in K$. Поэтому $\frac{\ln|f_j(z)|}{j} \leqslant (1-\varepsilon)\, j\,(D_1, K, z) + \varepsilon$, $j \geqslant j_0$, $z \in D_1$, откуда следует

$$u(z) \leqslant (1-\varepsilon)\,\gamma(D_1, K, z) + \varepsilon,\ z \in D_1$$

для любой $U \in L$. Последнее, учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, означает, что

$$\omega(D, K, z) \leqslant \gamma(D_1, K, z).$$

Лемма доказана.

3.4. Определение 3.1. *Компакт K на многообразии Штейна Ω размерности n назовем C^n-регулярным, если для любой открытой окрестности $D \supset K$ выполняется неравенство $\gamma(D, K, z) \leqslant 0$, $Z \in K$.*

Предложение 3.1. *Для Сп-регулярности компакта K на многообразии Штейна Ω размерности n достаточно, чтобы $\omega(D, K, z) = 0$, $z \in K$, и необходимо, чтобы $\omega(\tilde{D}, K, z) = 0$, $z \in K$ для любой открытой окрестности $D \supset K$ ($\tilde{D}$ — оболочки голоморфности открытого множества D).*

[1] См. предложение 2.7.

Если компакт K голоморфно выпуклый в Ω, то и в необходимых условиях можно брать D вместо $\tilde{D}$.

Действительно, достаточность сразу вытекает из свойства б) функции γ, а необходимость из леммы 3.1.

3.5. Определение 3.2. *Открытое множество D на многообразии Штейна Ω размерности n назовем сильно псевдовыпуклым (C^n-регулярным), если существует функция u, плюрисубгармоническая на D, такая, что $u(z) < 0$, $z \in D$, и для каждой бесконечной последовательности $\{z_j\}$, не имеющей предельной точки в Ω, выполняется $u(z_j) \to 0$.*

Сильная псевдовыпуклость открытого множества равносильна сильной псевдовыпуклости всех его связных компонент. Сильно псевдовыпуклое открытое множество на многообразии Штейна Ω является псевдовыпуклым и, следовательно (предложение 2.7), многообразием Штейна. Охарактеризуем сильно псевдовыпуклые области в терминах свойств экстремальной функции ω.

Предложение 3.2. *Для того, чтобы открытое множество D на многообразии Штейна было сильно псевдовыпуклым, необходимо и достаточно, чтобы для всякого компакта $K \subset D$ и любой последовательности $\{z_j\}$, не имеющей предельных точек в D, выполнялось*

$$\omega(D, K, z_j) \to 1.$$

Достаточность. Достаточно убедиться, что всякая связная компонента D' множества D является сильно псевдовыпуклой. Возьмем какой-либо компакт $K \subset D'$ с непустой внутренностью и определим функцию

$$u(z) = \omega(D', K, z) - 1, \quad z \in D'.$$

Из свойства б) функции ω и принципа максимума для плюрисубгармонических функций следует, что

$$u(z) < 0, \quad z \in D'.$$

Область D' является сильно псевдовыпуклой, поскольку выполняются условия определения 3.2.

Необходимость. Пусть D — сильно псевдовыпуклое открытое множество в Ω, u — функция, существующая согласно определению 3.2, и K — произвольный компакт в D. Обозначим

$$\delta = -\sup\{u(z) : z \in K\}.$$

Тогда плюрисубгармоническая в D функция $\varphi(z) = 1 + \frac{u(z)}{\delta}$ удовлетворяет неравенствам

$$\varphi(z) \leqslant 0, \quad z \in K, \quad \varphi(z) < 1, \quad z \in D.$$

По определению функции ω справедливы неравенства

$$\varphi(z) \leqslant \omega(D, K, z) \leqslant 1, \quad z \in D.$$

Поэтому, если $\{z_j\}$ — произвольная последовательность, не имеющая предельных точек в D, то $\omega(D, K, z_j) \to 1$, так как по условию $u(z_j) \to 0$.

Замечание 3.1. Если D — область, то, как видно из доказательства, для сильной псевдовыпуклости D достаточно, чтобы условие предложения выполнялось для какого-нибудь одного компакта K такого, что

$$\omega(D, K, z) \not\equiv 1.$$

Следующее утверждение дает полезное необходимое условие сильной псевдовыпуклости.

Предложение 3.3. *Пусть D — сильно псевдовыпуклое открытое множество на многообразии Штейна Ω. Тогда всякое замкнутое подмногообразие M многообразия D является сильно псевдовыпуклым.*

3.6. Определение 3.3. *Открытое множество D на многообразии Штейна Ω назовем окрестностью Рунге компакта K, если $A(D)$ плотно в $A(K)$.*

Предложение 3.4. *Пусть компакт $K \subset \Omega$ обладает сильно псевдовыпуклой окрестностью Рунге $D \subset \Omega$ и $\omega(D, K, z) = 0$, $z \in K$. Тогда K является C^n-регулярным, $n = \dim \Omega$.*

Доказательство. Пусть $G \subset \Omega$ — произвольная открытая окрестность компакта K, а $\tilde{G}$ — оболочка голоморфности для G, $G \subset \tilde{G}$. Поскольку D является окрестностью Рунге компакта K, то для всякого ростка $f \in A(K)$ существует аналитическое продолжение-росток $\hat{f} \in A(\hat{K}_D)$, при этом $|\hat{f}|_{\hat{K}_D} = |f|_K$ (нужно взять последовательность $f_j \in A(D)$, сходящуюся к $f \in A(K)$ и показать, что она сходится в $A(\hat{K}_D)$ к $\hat{f} \in A(\hat{K}_D)$). Отсюда легко следует, что $\hat{K}_D \subset \tilde{G}$. Учитывая $\hat{K}_D = \bigcap_{\alpha>0} D_\alpha$ (см. п. 3.10, следствие 3.2), где $D_\alpha = \{z \in D : \omega(D, K, z) < \alpha\}$, получим $K \subset D_\varepsilon \subset \tilde{G}$ при некотором $\varepsilon > 0$. Применяя теперь лемму 3.3 (п. 3.10), получаем

$$\omega(\tilde{G}, K, z) \leqslant \omega(D_\varepsilon, K, z) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\omega(D, K, z), \quad z \in D_\varepsilon,$$

откуда следует

$$\omega(\tilde{G}, K, z) = 0, \quad z \in K,$$

что, согласно предложению 3.1, означает, что K является C^n-регулярным.

3.7. Рассмотрим связь между определенными выше понятиями и понятием регулярности в смысле теории потенциала в $R^{2n} = C^n$ (см., например, [33, с. 258, 276]).

Обозначим $u(D, K, z)$ обобщенное решение задачи Дирихле [33, гл. IV, § 3] для множества $D \setminus K$ и граничных значений $f(z) = 1$, $z \in \partial D$; $f(z) = 0$; $z \in \partial(C^n \setminus K)$. Тогда регулярность открытого множества $D \subset C^n$ равносильна свойству: а) $u(D, K, z) \to 0$ при $z \to z_0 \in \partial D$

для любого компакта $K \subset D$; регулярность компакта K — свойству б) $u(D, K, z) \to 0$ при $z \to z_0 \in \partial) C^n \setminus K)$ для любого открытого множества $D \supset K$.

Предложение 3.5. *Из сильной псевдовыпуклости открытого множества $D \subset C^n = R^{2n}$ вытекает его регулярность, а из регулярности компакта $K \subset R^{2n} = C^n$ вытекает его C^n-регулярность. В C^1 эти понятия соответственно совпадают.*

Доказательство. Первая часть получается из очевидного неравенства

$$\omega^{\circ}(D, K, z) \leqslant u(D, K, z).$$

Случай $n = 1$ обязан своей исключительностью равенству

$$\omega(D, K, z) \equiv u(D, K, z), \quad z \in D \setminus K.$$

Следующие примеры показывают, что при $n > 1$ обратные утверждения неверны.

Пример 3.1. Область $D = \{z = (z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| < 1, \ |z_2| < |z_1|\}$ является псевдовыпуклой и регулярной в $R^4 = C^2$. Однако она не является сильно псевдовыпуклой. Действительно, аналитическая прямая

$$\Gamma = \{z = (\lambda, \ {}^1/_2\lambda) : \lambda \in C^1\}$$

пересекает D по замкнутому в D подмногообразию M — кругу с выколотой точкой в $\Gamma \simeq C^1$. Поскольку M, очевидно, не является регулярной (а значит, сильно псевдовыпуклой) областью на Γ, то в соответствии с предложением 3.3 область D не является сильно псевдовыпуклой.

Пример 3.2. Компакт

$$K = \{z = (z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| = |z_2| = 1\}$$

является C^2-регулярным и голоморфно выпуклым в C^2, однако не является регулярным в $R^4 = C^2$.

3.8. Определение 3.4. *Открытое множество D на многообразии Штейна Ω назовем усиленно псевдовыпуклым, если существует псевдовыпуклое открытое множество $D_1 : D \subset\subset D_1 \subset \Omega$, а также плюрисубгармоническая и непрерывная в D_1 функция u, такие, что*

$$D = \{z \in D_1 : u(z) < 0\} \ \text{ и } \ F = \{z \in D_1 : u(z) \leqslant 0\} \subset\subset D_1.$$

Из псевдовыпуклости D_1, благодаря предложению 2.6 и теореме 5.16 [52], следует, что получится эквивалентное определение, если в определении 3.4 опустить условие $F \subset\subset D_1$.

Усиленно псевдовыпуклое множество D является сильно псевдовыпуклым; если D — усиленно псевдовыпуклое, то внутренность каждой из связных компонент $\bar{D}$ является усиленно псевдовыпуклым множеством. Отметим также, что строго псевдовыпуклая область [12, с. 125] является усиленно псевдовыпуклой, однако обратное, очевидно, неверно.

Пример 3.3. Пусть Ω — многообразие Штейна размерности n, $G \subset \Omega$ — открытое множество, $f = (fj) \in A(G)^k$. Тогда внутренность D всякой компактной связной компоненты F множества $\{z \in G : |f_s| < r_s,\ s = 1, \dots, k\}$ является усиленно псевдовыпуклой. Действительно, достаточно в определении 3.4 взять $u(z) = \sup\left\{\ln \frac{|f_s(z)|}{r_s},\ s = 1, \dots, k\right\}$, а в качестве D_1 — какую-либо псевдовыпуклую окрестность, отделяющую F от других компонент.

Пример 3.4. Пусть D — псевдовыпуклая кратнокруговая область в C^n. Тогда следующие условия равносильны: а) D — сильно псевдовыпуклая, б) D — усиленно псевдовыпуклая, в) D — ограничена и не имеет дополнительной оболочки голоморфности. Доказательство (простое, но громоздкое) опускаем.

Пример 3.5. Пусть D — ограниченная полная $(p_1, \dots, p_n$-круговая область в C^n с центром в нуле [50, с. 227], т. е. для любого $z \in D$ и любого $\lambda : |\lambda| < 1$ справедливо

$$(\lambda^{p_1} z_1, \dots, \lambda^{p_n} z_n) \in D.$$

Обозначим

$$D_q = \{z = (z_j) \in C^n; \quad z_j = q^{|p_j|} \zeta_j,$$
$$j = 1, \dots, n; \quad \zeta = (\zeta_j) \in D\},\ 0 < q \leq \infty$$

и рассмотрим функцию, определенную на C^n:

$$u(z) = \inf\{\ln q : z \in \partial D_q\},\ u(0) = -\infty.$$

Область D является областью голоморфности тогда и только тогда, когда функция u является плюрисубгармонической в C^n. Приведем без доказательства.

Предложение 3.6. *Пусть D — ограниченная, полная $(p_1, \dots, p_n)$-круговая область голоморфности в C^n. Следующие условия равносильны:*

1) *D — сильно псевдовыпуклая область,*
2) *D — усиленно псевдовыпуклая область,*
3) $D_q \subset\subset D$, $0 < q < 1$,
4) *u — непрерывная функция* в $C^n \setminus \{0\}$.

Ограниченность полной $(p_1, \dots, p_n)$ круговой области является необходимым условием для ее сильной псевдовыпуклости.

Пример 3.6. Пусть D — ограниченная выпуклая область в C^n. Тогда D — усиленно псевдовыпуклая. Действительно, достаточно в определении 3.4 взять $D_1 = C^n$ и выпуклую (и тем более плюрисубгармоническую) функцию

$$u(z) = \sup\{h_\zeta(z) : \zeta \in \partial D\}, \qquad z = (z_k) \in C^n,$$

где

$$h_\zeta(z) \equiv \sum_{k=1}^{n} [a_k(x_k - \xi_k) + b_k(y_k - \eta_k)] = 0$$

— опорная плоскость в точке $\zeta = (\zeta_k) \in \partial D$, $z_k = (x_k + iy_k)$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, $\sum(a_k^2 + b_k^2) = 1$.

Случай произвольных выпуклых областей сложнее (см. § 10).

3.9. ***Лемма 3.2.*** *Пусть D — открытое множество на многообразии Штейна Ω, размерности n, F — C^n-регулярный компакт* (или открытое множество) *в D. Для всякой последовательности открытых множеств $\{D_s\}$ такой, что*

$$D_s \subset\subset D_{s+1}, \ \bigcup_{s=1}^{\infty} D_s = D$$

— последовательность функций $\omega_s(z) = \omega(D_s, F, z)$, убывая сходится к $\omega(z) = \omega(D, F, z)$ в каждой точке $z \in D$.

Доказательство. Из свойства г) функции ω следует, что

$$\omega_s(z) \geqslant \omega_{s+1}(z) \geqslant \omega(z), \ z \in D_s.$$

Предел $\hat{\omega}(z)$ убывающей последовательности плюрисубгармонических функций является плюрисубгармонической функцией, при этом $\hat{\omega}(z) \geqslant \omega(z)$. Осталось показать, что $\hat{\omega}(z) \leqslant \omega(z)$. Если F — C^n-регулярный компакт (или открытое множество), то $\omega_s(z) = \omega(D_s, F, z) = 0$, $z \in F$.

Отсюда следует, что $\hat{\omega}(z) = 0$, $z \in F$.

Кроме того, из $\omega_s(z) < 1$, $z \in D_s$ следует, что $\hat{\omega}(z) < 1$, $z \in D_s$. Согласно определению ω должно выполняться и неравенство

$$\hat{\omega}(z) \leqslant \omega(z), \ z \in D.$$

Лемма доказана.

Замечание 3.2. Необходимость дополнительных требований на F проиллюстрируем следующим примером:

$$D = C^1, \ F = \{0\}, \ D_s = \{z \in C^1 : |z| < s\};$$

здесь $\omega(D, F, z) \equiv 0$, но $\omega(D_s, F, z) \equiv 1$, $s = 1, \ldots$

3.10. Важное значение имеют внутренности поверхностей уровня функции $\omega(D, K, z)$ — открытые множества

$$D_\alpha = \{z \in D : \omega(D, K, z) < \alpha\}, \ 0 < \alpha < 1.$$

Сильная псевдовыпуклость открытого множества D равносильна выполнению условия

$$D_\alpha \subset\subset D, \ 0 < \alpha < 1$$

для любого компакта $K \subset D$; C^n-регулярность голоморфно выпуклого компакта K в Ω равносильна выполнению условия $D_\alpha \supset K: 0 < < \alpha < 1$ для любой открытой окрестности $D \subset K$.

Лемма 3.3. *Пусть K — C^n-регулярный компакт на многообразии Штейна Ω размерности n; D — открытая сильно псевдовыпуклая окрестность множества $\bar{K}$;*

$$D_\alpha = \{z \in D : \omega(D, K, z) < \alpha\},$$
$$F_\alpha = \{z \in D : \omega(D, K, z) \leqslant \alpha\},$$
$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Тогда для $0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 1$

$$\omega(D_\alpha, F_\beta, z) = \begin{cases} \frac{\omega(D, K, z) - \beta}{\alpha - \beta}, z \in D_\alpha \setminus F_\beta, 0, \ z \in F_\beta. \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку

$$\omega(D, K, z) < \alpha, \ z \in D_\alpha$$

и

$$\omega(D, F_\beta, z) \leqslant \beta, \ z \in F_\beta,$$

то

$$\omega(D, K, z) \leqslant (\alpha - \beta)\,\omega(D_\alpha, F_\beta, z) + \beta, \ z \in D_\alpha. \qquad (1)$$

Предположим сначала, что $\beta = 0$.
Функция

$$\varphi(z) = \begin{cases} \alpha\,\omega(D_\alpha, K, z), & z \in D_\alpha \\ \omega(D, K, z), & z \in D \setminus D_\alpha \end{cases}$$

является плюрисубгармонической в D и $\varphi|K \leqslant 0$, $\varphi|D < 1$. Поэтому $\varphi(z) \leqslant \omega(D, K, z)$, $z \in D$, что вместе с неравенством (1) при $\beta = 0$ дает равенство

$$\alpha\omega(D_\alpha, K, z) = \omega(D, K, z), \ z \in D_\alpha.$$

Тем самым утверждение леммы доказано в случае $\beta = 0$.

Рассмотрим общий случай. Из нижеследующей теоремы 3.1 (отметим, что в ее доказательстве используется утверждение леммы 3.3 в уже рассмотренном случае $\beta = 0$) вытекает, что $\bar{D}_\beta \subset F_\beta$, $0 < \beta < 1$. Поэтому для любой функции

$$v \in L \overset{\text{def}}{=} \{u \in P(D_\alpha) : u\,|\,F_\beta \leqslant \beta, u\,|\,D_\alpha < \alpha\}$$

функция

$$\psi(z) = \begin{cases} \sup\{v(z), \omega(D, K, z)\}, & z \in D_\alpha \setminus F_\beta \\ \omega(D, K, z), & z \in F_\beta \end{cases}$$

является плюрисубгармонической в D_α и $\psi\,|\,K \leqslant 0$, $\varphi\,|\,D_\alpha < \alpha$. Следовательно,

$$\psi(z) \leqslant \alpha\omega(D_\alpha, K, z) = \omega(D, K, z), \ z \in D_\alpha,$$

откуда вытекает, что при $z \in D_\alpha \setminus F_\beta$

$$(\alpha - \beta)\, \omega(D_\alpha, F_\beta, z) + \beta = \overline{\lim_{\zeta \to z}} \sup\{v(\zeta) : v \in L\} \leqslant \omega(D, K, z).$$

Поскольку $F_\beta = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} D_{\beta+\varepsilon}$, то

$$\omega(D_\alpha, F_\beta, z) = 0, \ \ z \in F_\beta.$$

Поэтому вместе с (1) полученное неравенство дает утверждение леммы.

Следствие 3.1. *В условиях леммы* 3.3

$$\hat{K}_D = \{z \in D : \omega(D, K, z) = 0\} = \bigcap_{\alpha > 0} D_\alpha.$$

Включение $\hat{K}_D \subset \bigcap\limits_{\alpha > 0} D_\alpha$ очевидно. Включение в другую сторону получается из неравенства:

$$\ln|f(z)| \leqslant \ln|f|_K + (\ln|f|_{D_\alpha} - \ln|f|_K)\, \omega(D_\alpha, K, z),$$

если учесть, что по лемме 3.3

$$\omega(D, K, z) = \alpha\omega(D_\alpha, K, z), \ \ z \in D_\alpha.$$

Следствие 3.2. *В условиях леммы каждое из множеств D_α не имеет связных компонент, дизъюнктных с K.*

Действительно, если D_α имеет связную компоненту $\tilde{D}_\alpha$, такую, что $\tilde{D}_\alpha \cap K = \varnothing$, то, согласно свойству д) функции ω справедливо

$$\omega(D_\alpha, K, z) \equiv 1 \text{ в } \tilde{D}_\alpha.$$

Однако по лемме 3.3

$\omega(D, K, z) = \alpha\omega(D_\alpha, K, z)$, $z \in D_\alpha$, поэтому $\omega(D, K, z) = \alpha$, $z \in D_\alpha$, что противоречит определению D_α.

Теорема 3.1 *Пусть D — сильно псевдовыпуклое открытое множество на многообразии Штейна Ω размерности n, K — C^n-регулярный компакт в D. Тогда $\omega(D, K, z)$ — непрерывная функция в D.*

Доказательство. Возьмем последовательность чисел $\alpha_s \uparrow \infty$, $s = 1, \ldots$. Из предложения 2.9 следует существование убывающей последовательности функций $v_s(z)$, непрерывных и плюрисубгармонических в D_{α_s}, сходящейся в D к

$$\omega(z) = \omega(D, K, z).$$

Обозначим $q_s = \sup\{\omega(z) : z \in \overline{D\alpha_s}\}$. Дважды применяя лемму Гартогса о последовательностях субгармонических функций (см., например, [47, с. 53]) к последовательности $\{v_s\}$, получим, что для любого m найдется s_m такое, что $v_{s_m}(z) \leqslant q_m + \frac{1}{m}$, $z \in D_{\alpha_m}$; $v_{s_m}(z) \leqslant$

$\leqslant \frac{1}{m}$, $z \in K$.

Поэтому, используя лемму 3.3, в случае $\beta = 0$, получаем

$$u_m(z) = v_{s_m}(z) \leqslant q_m \omega(D_{\alpha_m}, K, z) + \frac{1}{m} = \frac{q_m}{\alpha_m}\omega(z) + \frac{1}{m}, \ z \in D_{\alpha_m}.$$

Отсюда приходим к неравенству

$|u_m(z) - \omega(z)| \leqslant \left(\frac{q_m}{\alpha_m} - 1\right) + \frac{1}{m}$, $z \in D_{\alpha_m}$, которое означает, что последовательность функций u_m сходится к $\omega(z)$ равномерно на любом компактном подмножестве в D. Из теоремы Вейерштрасса следует непрерывность функции $\omega(D, K, z)$ в D. Теорема доказана.

Лемма 3.4 *Пусть K — C^n — регулярный компакт на многообразии Штейна Ω размерности n, D — усиленно псевдовыпуклая окрестность K. Тогда функция $\omega(D, K, z)$ продолжается непрерывно и плюрисубгармонически в некоторое открытое множество $D_1 : D \subset\subset D_1 \subset \Omega$.*

Доказательство. Согласно определению 3.4, существуют открытое множество $D_1 : D \subset\subset D_1 \subset \Omega$ и непрерывная плюрисубгармоническая в D_1 функция u такие, что $D = \{z \in D_1 : u(z) < 0\}$. Обозначим $a = -\sup\{u(z) : z \in K\}$. Непосредственно проверяется, что функция

$$v(z) = \begin{cases} \omega(D, K, z), & z \in D \\ \dfrac{a + u(z)}{a}, & z \in D_1 \setminus D \end{cases}$$

является искомым продолжением функции ω.

Лемма 3.5 *Пусть K — C^n-регулярный компакт. D — его открытая псевдовыпуклая окрестность, $x \in A(D)$ и $x \mid K \equiv 0$. Тогда $X \equiv 0$ во всякой связной компоненте множества D, пересекающейся с K.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем D связным. Возьмем псевдовыпуклую область $D_1 : K \subset D_1 \subset\subset D$ и для любого $N < \infty$ рассмотрим функцию

$$\psi_N(z) = \frac{\ln|x(z)| + N}{\ln|x|_{D_1} + N}, \ z \in D_1.$$

Эта функция плюрисубгармоническая в D_1 и $\psi_N \mid D_1 < 1$ и $\psi_N \mid K \leqslant 0$, откуда $\psi_N(z) \leqslant \omega(D_1, K, z)$. Поэтому

$$\ln|x(z)| \leqslant N(\omega(D_1, K, z) - 1) + \ln|x|_{D_1}. \qquad (2)$$

Ввиду C^n-регулярности компакта K выполняется $\omega(D_1, K, z) < 1$, $z \in D_1$. Следовательно, переходя в (2) к пределу при $N \to \infty$ получаем

$\ln|x(z)| \equiv -\infty$, $z \in D_1$, т. е. $x(z) \equiv 0$ в D_1, а значит и в D.

§ 4. Основные результаты

4.1. Центральное место в работе занимает

Теорема 4.1 (ср. [24, теорема 6]). *Пусть Ω — многообразие Штейна размерности n, K — C^n-регулярный компакт в Ω, D — откры-*

тая усиленно псевдовыпуклая окрестность компакта K. Пусть для гильбертовых пространств H_0, H_1 выполняются непрерывные вложения:

$$A(\bar{D}) \subset H_1 \subset A(D) \subset A(K) \subset H_0 \subset AC(K). \tag{1}$$

Тогда

$$A(F_\alpha) \subset H^\alpha \subset A(D_\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

где $H^\alpha = (H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha$,

$$D_\alpha = \{z \in D : \omega(D, K, z) < \alpha\}, \quad F_\alpha = \{z \in D : \omega(D, K, z) \leqslant \alpha\}.$$

Это утверждение получается из следующих двух лемм.

Лемма 4.1 (ср. [23, лемма 1]). *Пусть K — C^n-регулярный компакт на многообразии Штейна Ω размерности n, D — открытая псевдовыпуклая окрестность компакта K в Ω: H_0, H_1 — гильбертовы пространства. Пусть выполняются непрерывные вложения*

$$H_1 \subset A(D) \subset H_0 \subset AC(K). \tag{3}$$

Тогда выполняются непрерывные вложения

$$H^\alpha \subset A(D_\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{4}$$

где

$$D_\alpha = \{z \in D : \omega(D, K, z) < \alpha\}, \quad H^\alpha = (H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha.$$

Лемма 4.2 (ср. [23, лемма 2]). *Пусть D, K F_α — те же, что в теореме 4.1, D не содержит связных компонент, дизъюнктных с K*[1]*, H_0, H_1 — гильбертовы пространства. Пусть выполняются непрерывные вложения*

$$A(\bar{D}) \subset H_1 \subset A(K) \subset H_0. \tag{5}$$

Тогда выполняются непрерывные вложения

$$A(F_\alpha) \subset H^\alpha = (H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{6}$$

Лемма 4.1 доказана в § 6, лемма 4.2 будет доказана только в § 8 после значительных предварительных рассмотрений. Отметим, что теорема 4.1, в частности, решает задачу, поставленную в [28, с. 291].

4.2. Из приведенных утверждений (с помощью предложения 1.1а) в § 5 будут выведены следующие результаты об изоморфизмах 1. (1), 1. (2) (в более слабой форме — для областей и компактов в C^n они были анонсированы в [23, 24]).

Теорема 4.2 (ср. [24, теорема 3]). *Пусть K — компакт на многообразии Штейна Ω размерности n. Для изоморфизма $A(K) \cong$*

[1] В теореме 4.1 это условие вытекало из вложения $A(D) \subset A(K)$.

$\simeq A(\overline{U}^n)$ *необходимо и достаточно, чтобы компакт* K *был* C^n-*регулярным и обладал окрестностью Рунге* G в Ω.

Замечание 4.1 В случае $\Omega = C^1$ эта теорема совпадает с теоремой 1 из [29], если учесть, что существование окрестности Рунге компакта K в C^1 равносильно требованию конечности числа связных компонент у $C^1 \setminus K$.

Теорема 4.3 (ср. [23, теоремы 1, 3]). *Пусть* Ω — *многообразие Штейна размерности* n. *Для изоморфизма* $A(\Omega) \simeq A(U^n)$ *необходимо и, если в* $A(\Omega)$ *существует базис, достаточно, чтобы* Ω *было сильно псевдовыпуклым и состояло не более чем из конечного числа связных компонент.*

Априорное условие о существовании базиса в $A(\Omega)$ кажется несущественным (поскольку в противном случае сравнительно простое пространство давало бы отрицательный ответ на известный вопрос А. Гротендика о существовании базиса в ядерном F-пространстве). Однако без такого условия удается доказать лишь более слабое достаточное условие.

Теорема 4.4. (ср. [23, теорема 2]). *Пусть* D — *усиленно псевдовыпуклое открытое множество на многообразии Штейна* Ω *размерности* n, *состоящее из конечного числа связных компонент. Тогда* $A(D) \simeq A(U^n)$.

4.3. Укажем некоторые следствия. Из примера 3.4 и теоремы 4.4 вытекает результат, раннее полученный Г. М. Бездудным [5, с. 124—127].

Следствие 4.1. Пусть D — *псевдовыпуклая кратнокруговая область в* C^n. *Тогда для изоморфизма* $A(D) \simeq A(U^n)$ *необходимо и достаточно, чтобы* D *была ограничена и не имела дополнительной оболочки голоморфности в* C^n.

Из предложения 3.5 и теоремы 4.4 получаем утверждение, уточняющее результат Л. А. Айзенберга [3].

Следствие 4.2 *Пусть* D — *полная* $(p_1, \ldots, p_n)$-*круговая область в* C^n. *Тогда для изоморфизма* $A(D) \simeq A(U^n)$ *необходимо и достаточно любое из эквивалентных условий предложения* 3.6.

Из примера 3.6 и теоремы 4.4 вытекает

Следствие 4.3 [25, теорема 3]. *Если* D — *ограниченная выпуклая область в* C^n, *то* $A(D) \simeq A(U^n)$.

Весьма полезно при изучении изоморфизма

Предложение 4.1 [41]. *Пусть* Ω — *многообразие Штейна,* $A(\Omega) \simeq \simeq A(U^n)$, M — *замкнутое подмногообразие в* Ω *размерности* n. *Тогда* $A(M) \simeq A(U^n)$.

Используя этот факт, из теоремы 4.4 получаем следующее усиление теоремы 2.1 из [41].

Следствие 4.4. *Пусть* M — *замкнутое подмногообразие усиленно псевдовыпуклой области* D *на многообразии Штейна* Ω. *Тогда*

$$A(M) \simeq A(U^n), \quad n = \dim M.$$

4.4 В теоремах 4.2, 4.4 содержится и утверждение о существовании базисов в пространствах $A(K)$, $A(D)$, в условиях этих теорем.

С помощью теоремы 4.1 будет получено (§ 9) следующее более сильное утверждение о существовании общего базиса в пространствах $A(D)$, $A(K)$.

Теорема 4.5 (ср. [24, замечание 3]). *Пусть K, D, D_α — те же, что в теореме 4.1. Тогда существует общий базис в пространствах $A(D)$ и $A(\hat{K}_D)$, удовлетворяющий неравенствам*

$$C_1(\alpha, \varepsilon)\exp(\alpha-\varepsilon)a_k \leqslant |e_k| D_\alpha \leqslant C_2(\alpha, \varepsilon)\exp(\alpha+\varepsilon)a_k, \qquad (7)$$

где $\{a_k\}$ — некоторая последовательность чисел, удовлетворяющих оценкам

$$a < \delta \leqslant \frac{a_k}{k^{1/n}} \leqslant \Delta < \infty. \qquad (8)$$

Система $\{e_k\}$ является базисом и в $A(K)$, если D является окрестностью Рунге компакта K, т. е. $A(D)$ плотно в $A(K)$.

Этот результат в некотором смысле является аналогом результата В. Д. Ерохина [22] (см. также [28]) о существовании общего базиса в пространствах $A(D)$ и $A(K)$, $K \subset\subset D \subset C^1$.

В § 9 будет доказан следующий многомерный аналог теоремы Уиттекера — Драгилева о продолжаемости общего базиса на промежуточные области [13, 20, 28].

Теорема 4.6 (ср. [23, теорема 7]). *Пусть Ω — многообразие Штейна размерности n, D — сильно псевдовыпуклое открытое множество в Ω, K — C^n-регулярный компакт в D. Пусть $\{e_k\}$ — общий базис в пространствах $A(D)$ и $A(K)$. Тогда $\{e_k\}$ является базисом во всех пространствах $A(D_\alpha)$, $A(F_\alpha)$, где*

$$D_\alpha = \{z \in D : \omega(D, K, z) < \alpha\}, \quad F_\alpha = \{z \in D : \omega(D, K, z) \leqslant \alpha\},$$
$$0 < \alpha < 1.$$

Эта теорема в частности решает задачу, поставленную в [5, с. 137], где аналогичный результат был получен для кратнокруговых областей с общим центром.

4.5 *Замечание 4.2.* Пусть в теореме 4.1 D — всего лишь псевдовыпуклое множество, но $A(D) = \lim\limits_{\lambda<1} pr\tilde{H}^\lambda$, где $\{\tilde{H}^\lambda\}$ — некоторая гильбертова шкала. Тогда D — сильно псевдовыпуклое и для любых гильбертовых пространств H_0, H_1, удовлетворяющих вложениям

$$H^1 \subset H_1 \subset A(D) \subset A(K) \subset H_0 \subset AC(K), \qquad (9)$$

для $H^\alpha = (H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha$ выполняются непрерывные вложения (2).

Доказательство проведем в предположении, что леммы 4.1, 4.2 уже доказаны. Ввиду леммы 4.1 нужно доказать только левые вложения (2).

Из изоморфизма $A(D)$ конечному центру гильбертовой шкалы вытекает сильная псевдовыпуклость D (см. п. 5.3). Тогда по теореме 3.1 функция $\omega(D, K, z)$ непрерывна в D. Поэтому каждое из множеств D_α, $0 < \alpha < 1$ является усиленно псевдовыпуклым, при этом

$$D_\alpha \subset F_\alpha \subset\subset D, \quad F_\alpha = \bigcap_{\lambda > \alpha} D_\lambda, \quad 0 < \alpha < 1, \quad D = \bigcap_{\alpha < 1} D_\alpha \qquad (10)$$

(множества D_α, F_α определены в теореме 4.1).

Существует $\delta < 1$ такое, что $\tilde{H}^\delta \subset A(K)$. Учитывая (9), отсюда получаем $\tilde{H}^1 \subset H_1 \subset \tilde{H}^\delta \subset H_0$, что благодаря предложению 2.1 дает

$$H^\sigma \supset \tilde{H}^\mu, \quad \mu = \mu(\sigma) = \sigma + \delta(1 - \sigma), \quad 0 < \sigma < 1.$$

С другой стороны, благодаря (10) по любому μ найдется $\lambda = \lambda(\mu) < 1$ такое, что $\tilde{H}^\mu \supset A(\bar{D}_\lambda)$. Поэтому $H^\sigma \supset A(\bar{D}_\tau)$, $\tau = \tau(\sigma) = \lambda(\mu(\sigma))$, $0 < \sigma < 1$.

Применяя лемму 4.2 с D_τ вместо D, H^σ вместо H_1 и учитывая лемму 3.3 и (10), получаем непрерывные вложения

$$H^{\alpha\sigma} = (H_0)^{1-\alpha}(H^\sigma)^\alpha \supset A(F_{\alpha\tau}) \supset A(D_\alpha),$$

т. е.

$$H^\alpha \supset A(D_{\alpha/\sigma}), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \sigma < 1. \tag{11}$$

Из (10) следует $A(F_\alpha) = \lim\limits_{\sigma \nearrow 1} \operatorname{ind} A(D_{\alpha/\sigma})$, поэтому по теореме об операторе в индуктивном пределе [45, с. 119] (11) дает непрерывные вложения $A(F_\alpha) \subset H^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Замечание 4.2 доказано.

4.6. В этом пункте мы даем другое доказательство предложения 1.1a (ср. [41, с. 105—110]), более естественно вписывающееся в нашу схему рассуждений.

Пусть $H(r)$ — гильбертово пространство всех функций

$$x(z) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} \xi_{k_1}, \ldots, {}_{k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$$

с конечной нормой

$$\| x \|_{H(r)} = (\sum | \xi_{k_1}, \ldots, {}_{k_n})^2 r_1^{2k_1} \ldots r_n^{2k_n})^{1/2}.$$

Простой подсчет (см., например, [41, с. 100—101]) показывает, что

$$\ln \mu_s(H(r), H(qr)) \sim (n!)^{1/n} \ln q\, s^{1/n}, \quad s \to \infty \tag{12}$$

Отсюда с помощью критерия Б. С. Митягина (см. п. 2.7) получается [38; 41, лемма 1.2]

$$A(U^n) \simeq \lim_{\lambda < 1} pr\, l_2(\exp \lambda s^{1/n}), \quad A(\bar{U}^n) = \lim_{\lambda > 1} \operatorname{ind} l_2(\exp \lambda s^{1/n}) \tag{13}$$

Предложение 4.2 (ср. [38, предложение 2.2; 41, с. 110]). *Пусть D — псевдовыпуклая область на многообразии Штейна Ω размерности n. Пусть*

$$A(D) = \lim_{\lambda < 1} pr \tilde{H}^\lambda, \tag{14}$$

где $\tilde{H}^\lambda$ — *некоторая гильбертова шкала. Тогда*

$$\ln \mu_s(\tilde{H}^0, \tilde{H}^1) \asymp s^{1/n}, \quad s \to \infty. \tag{15}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\Omega = C^n$. Для простоты считаем, что $0 \in D$. Выберем $r = (r_1, \ldots, r_n)$ так, чтобы $U^n(2r) \subset D$, и обозначим $K = \overline{U}^n(r)$. Положим $H_1 = \tilde{H}^1$, $H_0 = H(r)$.

Применив замечание 4.2 и лемму 4.1, получим непрерывные вложения (2), из которых следует

$$A(D) = \lim_{\alpha \nearrow 1} pr\, H^\alpha,\ A(K) = \lim_{\alpha \swarrow 0} \operatorname{ind} H^\alpha,\ H^\alpha = (H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha. \tag{16}$$

С другой стороны,

$$A(K) = \lim_{q \swarrow 1} \operatorname{ind} H(q, r). \tag{17}$$

Сравнивая (14), (16), (17), придем к выводу о существовании констант $0 < \delta, \sigma, \tau < 1$, $q > 1$, таких, что выполняются непрерывные вложения

$$\tilde{H}^1 = H_1 \subset A(D) \subset H^\sigma \subset \tilde{H}^\tau \subset H(qr) \subset H^\delta \subset A(K) \subset H_0 = H(r). \tag{18}$$

Замечая, что $\mu_s(H^\lambda, H^\mu) = \mu_s(H^1, H^0)^{\mu-\lambda}$, $\lambda < \mu$, и применяя несколько раз предложение 2.2, получаем из (17) неравенства

$$C_1 \mu_s(H(r), H(qr))^{1/\sigma} \leqslant \mu_s(H_1, H_0) \leqslant C_2,$$

$$\mu_s(H(r), H(qr))^{1/\delta},\ C_3 \mu_s(H_1, H_0)^{\frac{1-\sigma}{1-\tau}} \leqslant \mu_s(\tilde{H}^1, \tilde{H}^0,) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \mu_s(H_1, H_0)^{\frac{1}{1-\tau}}$$

Соотношение (15) получается отсюда с помощью оценки (12).

В случае произвольного многообразия Ω рассуждения отличаются лишь тем, что $r = (r_1, \ldots, r_n)$ выбирается так, чтобы в некоторой координатной окрестности $V \subset D$ в локальных координатах были определены полидиски

$$U^n(qr),\ q \leqslant 2.$$

Следствие 4.5. *Имеет место предложение* 1.1а. *Действительно, пусть* $A(D)$ *изоморфно конечному центру гильбертовой шкалы. Тогда существует гильбертова шкала* $\tilde{H}^\lambda$ *такая, что выполняется* (14).

Согласно предложению 4.2 справедливо соотношение (15), которое благодаря критерию изоморфизма центров шкал (см. п. 2.7) означает $A(D) \simeq \lim prl_2(\exp \lambda s^{1/n})$, что вместе с (13) завершает доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенберг Л. А. Линейная выпуклость в C^n и разделение особенностей голоморфных функций.— Bull. Acad. Pol. Sci. 1967, т. 15, № 7, с. 487—495.
2. Айзенберг Л. А. Общий вид линейного непрерывного функционала в пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях C^n.— ДАН СССР, 1966, т. 166, № 5, с. 1015—1018.

3. Айзенберг Л. А. О пространствах функций в $(p \cdot q)$-круговых областях.— ДАН СССР, 1961, т. 136, № 3, с. 521—524.
4. Айзенберг Л. А., Митягин Б. С. Пространство функций, аналитических в круговых областях.— «Сиб. мат. ж.». 1960, т. 1. № 2, с. 153—170.
5. Бездудный Г. М. Об изоморфизме и продолжаемости базисов пространств функций, голоморфных в n-круговых областях.— «Уч. зап. МОПИ», 1966, т. 166, с. 109—138.
6. Bremermann H. Die Charakterisierung von Regularitätsbereiche durch psevdokonvexen Funktionen, Schriftreiche Math. Inst., Münster, 1951, Bd 5, S. 23—32.
7. Bremermann H. Complex convexity.— «Trans. Amer. Math. Soc.», 1956, vol. 82, p. 17—51.
8. Bremermann H. On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and psevdoconvex domains.— «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, vol. 91, № 2, p. 246—276.
9. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., ИЛ, 1959. 385 с.
10. Виленкин и др. Функциональный анализ, серия СМБ. М., «Наука». 1964, с. 61—68.
11. Витушкин А. Г. Оценка сложности табулирования. М., Физматгиз, 1959. 220 с.
12. Владимиров В. М. Методы теории функций многих комплексных переменных. М., «Наука», 1964, 411 с.
13. Whittaker J. M. Sur les series de base de polynomes quelconques. Paris, 1949, p. 11—24.
14. Wojtynski W. On bases in certain countably — Hilbert spaces —«Bull. Acad. Pol. Sci.», 1966, vol. 14, № 2, p. 681—684.
15. Ганинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М., «Мир», 1969. 506 с.
16. Гельфанд И. М. Замечание к статье Н. К. Бари «Биотогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве».— Уч. зап. МГУ, сер. мат.», 1951, т. 4, вып. 148, с. 224—225.
17. Гиндикин С. Г. Аналитические функции в трубчатых областях.— ДАН СССР, 1962, т. 145, № 6, с. 1205—1208.
18. Grothendick A. Sur certain espaces de fonctions holomorphes. J. reine und angew. Math, 1953, vol. 192, № 1—2.
19. Docquier F., Grauert H. Levisches Problem und Rungescher Satz.— «Math. Ann.», 1960, vol. 140, № 2, p. 94—123.
20. Драгилев М. М. О продолжаемых базисах аналитических функций.— «Мат. сб.», 1961, 53 (95), № 2, с. 207—218.
21. Dynin A., Mitjagin B. Criterion for nuclearity. in terms of approximative dimension.— «Bull. Acad. Pol. Sci.», 1960, vol 8, p. 535—540.
22. Ерохин В. Д. О конформных преобразованиях колец и об основном базисе пространства функций, аналитических в элементарной окрестности произвольного континуума.— ДАН СССР, 1958, т. 120, № 4, с. 689—692.
23. Захарюта В. П Изоморфизм пространств голоморфных функций многих комплексных переменных.—«Функциональный анализ и его приложения», 1971, т. 5, № 4, с. 71—72.
24. Захарюта В. П. Пространства аналитических и гармонических функций многих переменных.— «Тезисы докладов на Всесоюзной конференции по теории функций», Харьков, 1971, с. 74—78.
25. Захарюта В. П. О базисах и изоморфизме пространств функций, аналитических в выпуклых областях многих переменных.— Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», Вып. 5, Харьков, 1967, с. 5—12.
26. Захарюта В. П. Об интегральной формуле Вейля и некоторых ее применениях». «Тезисы докладов на Всесоюзной конференции по теории функций», Харьков, 1971, с. 78—80
27. Захарюта В. П. О квазиэквивалентности базисов в конечных центрах гильбертовых шкал.— ДАН СССР, 1968, т. 180, № 4, с. 786—788.

28. Захарюта В. П. О продолжаемых базисах в пространствах аналитических функций одного и многих переменных.—«Сиб. мат. ж.», 1967, т. 8, № 2, с. 277—292.
29. Захарюта В. П. Пространства функций одного переменного, аналитических в открытых множествах и на компактах.— «Мат. сб.», 1970, 82(124), № 1(5), с. 84—98.
30. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах.— УМН, 1959, т. 14, вып. 2, с. 3—86.
31. Köthe G.—«Math. Zeit.» 1936, Bd. 1. H 41, p. 137—152.
32. Крейн С. Г. Об одной интерполяционной теореме в теории операторов.— ДАН СССР, 1960, т. 130, № 3, с. 491—494.
33. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. «М., «Наука», 1970. 515 с.
34. Lions J. L. Espaces intermediaires entre espaces hilbertiens at applications.—«Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. RPR», 1958, vol. 2(50), № 4, p. 419—432.
35. Lorch E. R. Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces.— «Bull. Amer. Math. Soc.», 1939, 45, p. 564—569.
36. Martineau A. Indicatrices des functionnels analytiques et inversion de la transformee de Fourier-Borel par la transformation de Laplace.— «C. r. Acad. Sci. Paris», 1962, 255, p. 1845—1847, 2888—2890.
37. Martineau A. Sur la topologie des fonctions holomorphes.— «Math. Ann.», 1966, 163, № 1, с. 62—88.
38. Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах.— УМН, 1961, т. 16, вып. 4, с. 63—132.
39. Митягин Б. С. Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах.— «Studia Math.» 1970, 37, с. 101—126.
40. Митягин Б. С., Хенкин Г. М. Линейное разделение особенностей и проблема изоморфизма пространств голоморфных функций.— УМН. 1970, т. 25, вып. 6, с. 227—228.
41. Митягин Б. С., Хенкин Г. М. Линейные задачи комплексного анализа.— УМН, 1971, т. 26, вып. 4, с. 93—152.
42. Митягин Б. С. Ядерные шкалы Рисса.— ДАН СССР, 1961, т. 137, № 3, с. 519—522.
43. Окунь С. Д. Характеристическая функция двоякокруговой области и ее применения к вопросам полноты и базиса. Автореф. канд. дисс., Ростов-на-Дону, 1961. 12 с.
44. Orlicz W. Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen.— «Studia Math», 1933, 4, p. 18—29.
45. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства, М., «Мир», 1967. 266 с.
46. Ролевич С. Об изоморфизме и аппроксимативной размерности пространств голоморфных функций.— ДАН СССР, 1960, т. 133, № 1, с. 31—33.
47. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 405 с.
48. Rossi H. On envelopes of holomorphy — «Comm. pure and appl. Math.» 1963, 16, p. 9—19.
49. Tillman H. G. Dualität in der Funktionentheorie auf Riemannschen Flächen.— «J. reine und angew. Math.» 1956, Bd. 195, № 1—2, p. 76—101.
50. Фукс Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М., Физматгиз, 1962. 306 с.
51. Хавин В. П. Пространства аналитических функций.— «Мат. анализ, 1964» М., ВИНИТИ, 1966, с. 76—164.
52. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., «Мир», 1968. 402 с.
53. Эдварс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М., «Мир», 1969. 511 с.