УДК 519.81

Н. С. Ландкоф, **д-р физ.-мат. наук**

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ МАККИНА

В своей важной работе [1] Маккин изучил одномерный симметричный устойчивый случайный процесс и обнаружил, в частности, что характер его траекторий существенно зависит от того, будет ли параметр процесса α лежать в интервале $(0, 1)$ или в отрезке $[1, 2]$.

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы найти теоретикопотенциальные причины такого различия. При этом нам представляется удобным рассматривать одномерный устойчивый процесс как компоненту n-мерного устойчивого процесса.

Теорема 1. *Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство, $M \subset R^n$ — гладкое многообразие размерности $n-1$. Обозначая $C_\alpha(E)$, где $E \subset R^n$ — любое борелевское множество, α — емкость, будем иметь*[1]

$$C_\alpha(M) = 0 \text{ при } 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{1}$$

$$0 < C_\alpha(M) \leqslant +\infty \text{ при } 1 < \alpha \leqslant 2. \tag{2}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что если $E \subset R^n$ — любое борелевское множество, а $\Lambda^\beta(E)$, $\beta > 0$, его β — мера Хаусдорфа, то общее значение

$$\sup\{\beta : \Lambda^\beta(E) > 0\} = \inf\{\gamma : \Lambda^\gamma(E) < \infty\}$$

называется размерностью E по Безиковичу-Хаусдорфу и будет обозначаться $\dim E$. Если E есть гладкое многообразие, то эта величина совпадает с его обычной размерностью.

[1] Заметим, что эта теорема устраняет неточность, имеющуюся в известной книге К. Ито и Г. Маккина [2, с. 353].

Докажем соотношение

$$\dim E = n - \inf\{\delta : C_\delta(E) > 0\}. \tag{3}$$

Заметим сначала, что если $C_\delta(E) = 0$, то при $0 < \delta' < \delta$ $C_{\delta'}(E) = 0$. Действительно, не теряя ничего в общности, можно считать, что диаметр E меньше единицы и что E — компакт. Тогда равенство $C_\delta(E) = 0$ означает, что для любой меры μ, сосредоточенной на E,

$$\iint \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{|x-y|^{n-\delta}} = \infty.$$

Но $|x-y|^{n-\delta'} < |x-y|^{n-\delta}$ и поэтому $C_{\delta'}(E) = 0$. Отсюда следует, что

$$\inf\{\delta : C_\delta(E) > 0\} = \sup\{\delta : C_\delta(E) = 0\}$$

и что (3) можно переписать также в виде

$$\dim E = n - \sup\{\delta : C_\delta(E) = 0\}. \tag{3'}$$

Пусть теперь $\Lambda^\gamma(E) < \infty$; тогда, как известно, (см., например, [3, теорема 3.14] $C_{n-\gamma}(E) = 0$. Поэтому

$$\dim E \geqslant \inf\{\gamma : C_{n-\gamma}(E) = 0\} = \inf\{n - \delta : C_\delta(E) = 0\} = \\ = n - \sup\{\delta : C_\delta(E) = 0\}.$$

Кроме того, если $C_\delta(E) = 0$, то [3, теорема 3.13] для любого $0 < \delta' < \delta$ $\Lambda^{n-\delta'}(E) = 0$. Следовательно,

$$\sup\{\delta : C_\delta(E) = 0\} = \sup\{\delta : \Lambda^{n-\delta}(E) = 0\} = \\ = \sup\{n - \delta : \Lambda^\delta(E) = 0\} = n - \inf\{\delta : \Lambda^\delta(E) = 0\} = \\ = n - \sup\{\beta : \Lambda^\beta(E) > 0\} = n - \dim E,$$

т. е.

$$\dim E \leqslant n - \sup\{\delta : C_\delta(E) = 0\}$$

и, таким образом, (3) доказано.

Утверждение теоремы при $\alpha \neq 1$ вытекает непосредственно из (3). Поэтому рассмотрим случай $\alpha = 1$ и покажем, что $C_1(M) = 0$. Достаточно установить, что любая точка M имеет окрестность V, для которой $C_1(V) = 0$. Считая V достаточно малой, можем предполагать, что существует гомеоморфизм F множества V на $(n-1)$-мерный шар $S \subset R^n$ и две положительные константы a_1, a_2, такие, что для любых точек x, $y \in V$

$$a_1 |x-y| \leqslant |Fx - Fy| \leqslant a_2 |x-y|.$$

Поэтому следует убедиться в том, что $C_1(S) = 0$. Для этого рассмотрим произвольную меру $\mu \neq 0$, сосредоточенную на S, и покажем, что ее потенциал

$$U_1^\mu(x) = \int\limits_S \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-1}}$$

не может быть ограниченным. Пусть R^{n-1} — та гиперплоскость, в которой лежит S, $\sigma(r, x) \subset R^{n-1}$ — $(n-1)$-мерный шар радиуса r с центром в точке $x \in R^{n-1}$, $m_{n-1}(r)$ — его $(n-1)$-мерный объем. Предположим, что $U_1^{\mu}(x) \leqslant A$ всюду в R^n. Тогда для среднего

$$\tilde{U}_1^{\mu}(x) = \frac{1}{m_{n-1}(r)} \int\limits_{\sigma(r, x)} U_1^{\mu}(z)\, dz, \qquad x \in R^{n-1}$$

будем иметь также

$$\tilde{U}_1^{\mu}(x) \leqslant A \text{ всюду в } R^n.$$

Но

$$\tilde{U}_1^{\mu}(x) = \int\limits_{\tilde{S}_r} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}}\, dy,$$

где $\tilde{S}_r$ — $(n-1)$-мерный шар, концентрический S, радиус которого превосходит радиус S на r, а $f(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на $\tilde{S}_r$, причем $f(y) \not\equiv 0$.

Пусть $f(y) > a > 0$ в некотором $(n-1)$-мерном шаре $\sigma(r_0, x_0)$. Тогда

$$\tilde{U}_1^{\mu}(x_0) \geqslant \int\limits_{\sigma(r_0, x_0)} \frac{f(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}} > a \int\limits_{\sigma(r_0, x_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}}.$$

Но очевидно

$$\int\limits_{\sigma(r_0, x_0)} \frac{dy}{|x_0-y|^{n-1}} = \infty,$$

и это противоречит ограниченности $\tilde{U}_1^{\mu}(x)$. Теорема доказана.

Пусть теперь $F \subset R^n$ — произвольное замкнутое неограниченное множество и

$$F = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

— его представление в виде неубывающей суммы компактов. Обозначим $W_j^{(\alpha)}(x)$ равновесный потенциал М. Рисса порядка α (определение этого и последующих понятий из теории потенциала (см. в [3]). Известно, что это α-супергармоническая функция, α-гармоническая вне K_j, и равная 1 во всех регулярных точках K_j. В силу принципа α-гармонической миноранты [3, с. 75], $W_j^{(\alpha)}(x)$ образуют неубывающую последовательность. Рассмотрим

$$W_F^{(\alpha)}(x) = \lim_j W_j^{(\alpha)}(x).$$

Это также α-супергармоническая функция, α-гармоническая вне F и равная 1 во всех регулярных точках F. Однако возможен случай, когда $W_F^{(\alpha)}(x) \equiv 1$. Используя результаты, изложенные в [3, гл. V], нетрудно показать, что последнее обстоятельство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_\alpha(F_k)}{2^{k(n-\alpha)}} = \infty, \tag{4}$$

где

$$F_k = F \cap \{x : |x| \leqslant 2^{k+1}\}.$$

Для дальнейшего важно рассмотреть два случая: когда F — гиперплоскость в R^n и когда F — слой между двумя параллельными гиперплоскостями.

Лемма 1. Пусть F — гиперплоскость в R^n. Тогда при $0 < \alpha \leqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_\alpha(F_k)}{2^{k(n-\alpha)}} < \infty.$$

между тем, как при $1 < \alpha \leqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_\alpha(F_k)}{2^{k(n-\alpha)}} = \infty.$$

Доказательство. Так как F_k получается из

$$F_0 = F \cap \{x : |x| \leqslant 2\}$$

гомотетией с коэффициентом 2^k, то [3, стр. 200]

$$C_\alpha(F_k) = 2^{k(n-\alpha)} C_\alpha(F_0).$$

Если $0 < \alpha \leqslant 1$, то по теореме 1 $C_\alpha(F_0) = 0$ и все члены ряда (4) равны нулю. Если же $1 < \alpha \leqslant 2$, то $C_\alpha(F_0) > 0$, и ряд (4) очевидно расходится.

Лемма 2. Пусть

$$F = \{x : |x_1| \leqslant 1\}$$

есть слой между двумя параллельными гиперплоскостями. Тогда ряд в (4) сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

Доказательство. Случай $1 < \alpha \leqslant 2$ тривиально вытекает из леммы 1. Поэтому будем считать, что $0 < \alpha \leqslant 1$.

Подвергаем F_k преобразованию гомотетии с коэффициентом 2^{-k}. Для получившегося множества

$$\overset{\circ}{F}_k = \{x : |x_1| \leqslant 2^{-k},\ |x| \leqslant 2\}$$

имеем

$$C_\alpha(\overset{\circ}{F}_k) = 2^{-k(n-\alpha)} C_\alpha(F_k).$$

Следовательно, нужно убедиться в том, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_\alpha(\mathring{F}_k) < \infty \text{ при } \alpha < 1 \tag{5}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_1(\mathring{F}_k) = \infty. \tag{6}$$

Для оценки порядка величины $C_\alpha(\mathring{F}_k)$ при $k \to \infty$ можно, прежде всего, заменить $\mathring{F}_k$ «цилиндром»

$$\mathring{F}'_k = \{x : |x_1| \leqslant 2^{-k}, \ \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2} \leqslant 2\}.$$

Далее нетрудно видеть, что для любой меры μ, сосредоточенной на $\mathring{F}'_k$, справедливы неравенства

$$\frac{1}{M}\int d\mu \leqslant C_\alpha(\mathring{F}'_k) \leqslant \frac{1}{m}\int d\mu,$$

где

$$m = \inf U_\alpha^\mu(x), \quad M = \sup U_\alpha^\mu(x),$$

причем грани берутся на $\mathring{F}'_k$.

Возьмем в качестве μ сужение меры Лебега на $\mathring{F}'_k$. Тогда

$$\int d\mu = B_1 h.$$

где $h = 2^{-k}$, а B_1 не зависит от k[1]. Что касается величины m и M, то при $k \to \infty$ они имеют тот же порядок малости, что $U_\alpha^\mu(O)$.

Введем «цилиндрические» координаты с осью, Ox_1; тогда

$$U_\alpha^\mu(O) = B_2 \int_{-h}^{h} dx_1 \int_0^2 \frac{\rho^{n-2}\, d\rho}{(\rho^2 + x_1^2)^{\frac{1}{2}(n-\alpha)}}.$$

Перейдем в прямоугольнике $E : |x_1| < h, \ 0 < \rho < 2$ к полярным координатам

$$\rho = r\cos\varphi, \ x_1 = r\sin\varphi.$$

[1] Ниже через B_i будут обозначаться величины, которые остаются в положительных границах при $k \to \infty$.

Тогда

$$U_\alpha^\mu(O) = B_2 \iint\limits_E \frac{\cos^{n-2}\varphi}{r^{1-\alpha}}\,dr\,d\varphi = 2B_2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{r_1(\varphi)} r^{\alpha-1}\,dr =$$

$$= B_3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\varphi\, r_1^\alpha(\varphi)\,d\varphi = B_3 \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}h} \cos^{n-2}\varphi \left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^\alpha d\varphi +$$

$$+ B_3 \int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}h}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\varphi \left(\frac{h}{\sin\varphi}\right)^\alpha d\varphi = B_4 h + B_5 h^\alpha \int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}h}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^\alpha\varphi}.$$

Если $\alpha < 1$, то мы получаем

$$U_\alpha^\mu(O) = B_6 h^\alpha,$$

поэтому

$$C_\alpha(\mathring{F}_k') = B_7 h^{1-\alpha} = B_7 2^{-k(1-\alpha)},$$

что доказывает сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_\alpha(\mathring{F}_k').$$

Если же $\alpha = 1$, то

$$U_1^\mu(O) = B_8 h\,|\ln h|.$$

откуда

$$C_1(\mathring{F}_k') = B_9 \frac{1}{|\ln h|} = \frac{B_{10}}{k},$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_1(\mathring{F}_k')$$

расходится. Лемма доказана.

Замечание 1. Лемма 2 эквивалентна такому утверждению: для области в R^n, содержащейся между касающимися друг друга изнутри сферами, точка касания будет иррегулярной при $0 < \alpha < 1$ и будет регулярной при $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

Обратимся теперь к теоретиковероятностному истолкованию величины $W_F^\alpha(x)$. Обозначим

$$\xi_x(t) = \xi_x(t,\ \omega) \in R^n,\ (0 \leqslant t < \infty,\ \xi_x(0,\ \omega) = x)$$

случайный сепарабельный процесс с независимыми приращениями, распределенными по симметрическому устойчивому закону с параметром α, $0 < \alpha \leqslant 2$.

Как известно (см. [4, с. 379]), траектории этого процесса можно считать с вероятностью 1 непрерывными справа. Будем для краткости называть процесс $\xi_x(t)$ устойчивым.

Для произвольного замкнутого множества $F \subset R^n$ обозначим через

$$\tau(x, F) = \inf_{t \geq 0} \{t : \xi_x(t) \in F\}$$

момент первого достижения множества F.

Если F — компакт, то функция $P\{\tau(x, F) < \infty\}$, как известно (см. [5]), совпадает с равновесным потенциалом М. Рисса множества F, т. е.

$$W_F^{\alpha}(x) = P\{\tau(x, F) < \infty\}. \tag{7}$$

В случае неограниченного замкнутого множества F, используя представление $F = \bigcup_j K_j$ и тот факт, что случайные события $\tau(x, K_j) < \infty$ образуют монотонно возрастающую последовательность, стремящуюся к событию $\tau(x, F) < \infty$, получаем, что (7) также имеет место. Следовательно, если $W_F^{(\alpha)}(x) \equiv 1$, то множество F почти наверное достигается из любой точки R^{in}.

Доказанные выше леммы 1 и 2 приводят теперь к таким следствиям.

Следствие 1. *Если F — гиперплоскость в R^n, а $x \notin F$, то при* $0 < \alpha \leq 1$

$$P\{\tau(x, F) < \infty\} = 0$$

в то время, как при $1 < \alpha \leq 2$

$$P\{\tau(x, F) < \infty\} = 1.$$

Следствие 2. *Пусть F — слой между параллельными гиперплоскостями в R^n, а $x \notin F$. Тогда при* $0 < \alpha < 1$

$$P\{\tau(x, F) < \infty\} < 1,$$

между тем как при $1 \leq \alpha \leq 2$

$$P\{\tau(x, F) < \infty\} = 1.$$

Отсюда, как мы сейчас увидим, получается следующая теорема Маккина [1, § 6].

Теорема. *Пусть $\xi_0^{(1)}(t, \omega) \in R^1$ — одномерный устойчивый процесс. Положим*

$$S_\omega = \{x \in R^1 : x = \xi_0^{(1)}(t, \omega) \text{ *при некотором* } t \geq 0\}.$$

Тогда при $0 < \alpha < 1$

$$P\{S_\omega \text{ *нигде не плотно*}\} = 1, \tag{8}$$

а при $1 \leq \alpha \leq 2$

$$P\{S_\omega \text{ *всюду плотно*}\} = 1. \tag{9}$$

Доказательство. Будем рассматривать $\xi_0^{(1)}(t, \omega)$ как первую координату устойчивого n-мерного процесса $\xi_0(t, \omega) \in R^n$.

Пусть $D = \{(r_j, r_j')\}$, $r_j r_j' > 0$ — счетное множество всех рациональных интервалов оси x_1, не содержащих точки O, а F_j — слой $r_j \leqslant x_1 \leqslant r_j'$. Согласно следствию 2, при $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$

$$P\{\bigcap_{j=1}^{\infty} (\tau(O, F_j) < \infty)\} = 1.$$

Но событие $\bigcap_{j=1}^{\infty} (\tau(O, F_j) < \infty)$ обозначает, что при любом j

$$S_\omega \cap [r_j, r_j'] \neq \varnothing.$$

Таким образом, (9) доказано.

Пусть теперь $\alpha < 1$. Чтобы доказать (8), достаточно проверить, что для любого отрезка $[a_0, b_0]$, $a_0 b_0 > 0$,

$$P(S_\omega \text{ плотно в } [a_0 b_0]) = 0. \tag{10}$$

Пусть $[a_1, b_1] \subset [a_0 b_0]$, A_1 — событие $S_\omega \cap [a_1, b_1] \neq \varnothing$. Тогда

$$P(S_\omega \text{ плотно в } [a_0 b_0]) \leqslant P(A_1) = P\{\tau(O, F_1) < \infty\}, \tag{11}$$

где F_1 — слой $a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1$.

Покажем, что при $b_1 - a_1 \to 0$ $P\{\tau(O, F_1) < \infty\}$ становится сколь угодно малой. Действительно,

$$P\{\tau(O, F_1) < \infty\} = P\{\tau(-a_1, F_1^0) < \infty\},$$

где F_1^0 — слой $0 \leqslant x_1 \leqslant b_1 - a_1$; далее, пользуясь свойством автомодельности устойчивого процесса, получим

$$P\{\tau(-a_1, F_1^0) < \infty\} = M(\alpha) P\left\{\tau\left(-\frac{a_1}{b_1 - a_1}, F^0\right) < \infty\right\},$$

где F^0 — слой $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $M(\alpha)$ — константа. Но

$$P\{\tau(x, F^0) < \infty\} = \int_{F^0} \frac{d\lambda(y)}{|x - y|^{n-\alpha}},$$

где λ — равновесная мера на F^0, которая, согласно лемме 2, существует при $\alpha < 1$. Отсюда видно, что при $b_1 - a_1 \to 0$, $a_1 > a_0 > 0$

$$P\{\tau(O, F_1) < \infty\} \to 0,$$

что вместе с (11) доказывает (8).

Замечание 2. Нетрудно с помощью следствия 1 получить в случае $1 < \alpha \leqslant 2$ следующее уточнение теоремы Маккина.

Пусть D — произвольное счетное множество точек оси x_1. Тогда

$$P(S_\omega \supset D) = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Mc. Kean H. P. Jr. *Sample functions of stable processes.* — *Ann. of Math.* 1955, 61, p. 564—579.
2. Ито К. и Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. М., «Мир», 1968. 394 с.
3. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М., «Наука», 1966. 515 с.
4. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М. ИЛ, 1956. 605 с.
5. Хант Дж. Марковские процессы и потенциалы. М.. ИЛ, 1962. 276 с.