

А. Г. Руткас, канд. физ.-мат. наук,
Н. И. Хиргий

ПОЛУГРУППЫ МОНОМОРФИЗМОВ ГРАФОВ В ДИСКРЕТНЫХ СТРУКТУРАХ

Дискретные структуры могут не обладать группой симметрии, но иметь полугруппу изоморфизмов на свою правильную часть (мономорфизмов). Например, две такие структуры получаются, если разрезать структуру, обладающую группой трансляций. В работе изучается топология дискретных структур на языке теории бесконечных графов, предлагается их классификация по группам автоморфизмов и полугруппам мономорфизмов. Всякий мономорфизм порождает полугруппу мономорфизмов, а наличие полугруппы позволяет выяснить вид блоков матрицы сечений графа (§ 2, основная теорема). Устанавливаются достаточные условия существования у графа каркаса, обладающего полугруппой мономорфизмов.

В качестве приложения этих результатов исследуются линейные автоматы с континуальным числом состояний, возникающие в двух классах дискретных структур: *LC*-структурах (§ 3) и системах взаимодействующих частиц (§ 4). В последнем случае граф (конечный или бесконечный) моделирует взаимодействия частиц друг с другом и с внешним полем. Передаточная функция $S(\lambda)$ автомата совпадает

с частотным коэффициентом отражения волн от начала структуры. С помощью матрицы сечений графа получено общее выражение для $S(\lambda)$; основу его составляет дробно-линейная функция от λ с операторными коэффициентами. Этот результат применим в вопросах синтеза электрических цепей без идеальных элементов. Исследованы аналитические и метрические свойства оператор-функции $S(\lambda)$.

§ 1. Матрицы бесконечных графов

В § 1 приведены несколько простых лемм и терминология.

Определения п. 3°, 4° принадлежат в основном Понштейну [11].
 1°. Граф $G = (X, Y, f)$ — это совокупность множеств X (вершин) Y (ребер) и отображения $f: Y \rightarrow X \times X$, называемого инцидентором графа. Инцидентность ребра $b (\in Y)$ и вершины $\beta (\in X)$ обозначается $b \circ \beta$ (или равносильно $\beta \circ b$) и имеет место, если $fb = (\alpha, \beta)$ либо $fb = (\beta, \alpha)$ для некоторой вершины $\alpha \in X$; (α, β) пара из множества $X \times X$.

Понятия *цепи, цикла, связности, части графа, сечения (разреза), дерева, каркаса*, а также *гоморфизма, изоморфизма, автоморфизма* графов считаются известными (см. [4]). Запись $a_0 \circ b_1 \circ a_1 \circ b_2 \circ a_2$ дает пример цепи с вершинами a_i ребрами b_i и указанием всех инцидентностей.

2°. Графы $G_k = (X_k, Y_k, f_k)$ ($k = 1, 2$) называются согласованными, если $f_1 b = f_2 b$ для $b \in Y_1 \cap Y_2$.

Для согласованных графов вводятся операции:

<i>объединение</i>	$G_1 \cup G_2 = (X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2, f_3);$
<i>пересечение</i>	$G_1 \cap G_2 = (X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2, f_1);$
<i>разность</i>	$G_1 \setminus G_2 = (X_1, Y_1 \setminus Y_2, f_1);$
<i>сильная разность</i>	$G_1 \ominus G_2 = (X_1 \setminus X_2, Y_5, f_1),$

где $f_{3|X_k} = f_k$ ($k = 1, 2$);

$$X_4 = \{\alpha \in X_1 \mid \exists b \in Y_1 \setminus Y_2 : \alpha \circ b\};$$

$$Y_5 = \{b \in Y_1 \mid \exists \alpha, \beta \in X_1 \setminus X_2 : f_1 b = (\alpha, \beta)\}.$$

Лемма 1.1. *Согласованные графы без изолированных вершин совпадают тогда и только тогда, когда совпадают множества их ребер.*

3°. Пусть X — произвольное множество, на элементах которого построена свободная коммутативная группа P с аддитивной записью операции [5, § 18]. Элементы группы P вида $\alpha \circ \beta$ отождествляются с упорядоченными парами (α, β) из $X \times X$, после чего свойства группы P индуцируют на множестве пар $X \times X$ следующие соотношения: $(\alpha, \beta) = 0 \leftrightarrow \alpha = \beta$; $(\alpha, \beta) + (\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma)$; $(\alpha, \beta) = -(\beta, \alpha)$.

Базисом пар для X называется минимальное множество пар $e = \{(\alpha_i, \beta_i) \mid i \in I\}$, такое, что всякая пара (α, β) из $X \times X$ представляется в виде

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i \in I} S_i(\alpha_i, \beta_i), \quad (1)$$

где s_i принимает значения 0, -1 или 1 и только конечное число коэффициентов s_i отличны от нуля.

Если X является множеством вершин некоторого дерева $T = (X, Y, f)$, то множество пар $e = fY$ есть базис пар для X и, наоборот, по всякому базису пар можно построить аналогичное дерево на X . Очевидно, что базис пар всегда существует и разложение (1) пары по этому базису единственно. Через $\text{bas } X$ будет обозначаться множество всех базисов пар для X .

Лемма 1.2 Пусть $e_k \in \text{bas } X_k$ ($k = 0, 1, 2$) и $X_0 = X_1 \cap X_2$; тогда $e_0 \subset e_1 \cap e_2 \Leftrightarrow e_0 = e_1 \cap e_2$.

Пусть $(\alpha, \beta) \in e_1 \cap e_2$; тогда $(\alpha, \beta) = \sum_i s_i (\alpha_i, \beta_i)$, где $(\alpha_i, \beta_i) \in e_0$.

Но $e_0 \subset e_1$, поэтому лишь один коэффициент $s_{i_0} \neq 0$, причем $s_{i_0} = 1$; $(\alpha, \beta) = (\alpha_{i_0}, \beta_{i_0}) \in e_0$.

Лемма 1.3 Если в условии леммы 1.2 $X_0 \neq \emptyset$, то

$$e_0 \subset e_1 \cap e_2 \Rightarrow (e_1 \cup e_2) \in \text{bas } (X_1 \cup X_2).$$

Ассоциируем надлежащим образом с базисами e_k некоторые деревья на X_k ($k = 0, 1, 2$). Легко показать, что объединение T этих деревьев не содержит циклов и, следовательно, является деревом на $X_0 \cup X_1 \cup X_2 = X_1 \cup X_2$. Дерево T задает базис e на $X_1 \cup X_2$; по построению $e = e_1 \cup e_2$.

4°. Пусть $e = \{(\alpha_i, \beta_i) \mid i \in I\}$ — базис пар вершин графа

$$G = (X, Y, f) / e \in \text{bas } X / \text{ и } Y = \{b_j \mid j \in J\}.$$

Разложения

$$fb_j = (\gamma_j, \delta_j) = \sum_{i \in I} s_{ij} (\alpha_i, \beta_i) \quad (2)$$

определяют матрицу сечений $S = (s_{ij})$ ($i \in I, j \in Z$) графа G по базису e (ср. [11]). Если $T = (X, Z, f)$ — каркас¹ связного графа $G = (X, Y, f)$, то в матрице сечений графа G по базису $e_T = fZ$ выделяется единичный блок: $S = [I, S_1]$. Такой базис e_T пар вершин графа G и, соответственно, матрица сечений S называются фундаментальными; в том случае, когда это удобно, можно говорить, что матрица S построена по каркасу T . Для счетных и конечных графов в [11] доказано, что S — унимодулярная конечностолбцевая матрица, а $Q = [-S_1', \Lambda]$ — матрица циклов графа G (фундаментальная).

§ 2. Полугруппы мономорфизмов и основная теорема

Изоморфизм графа на свою правильную часть называется мономорфизмом; такое отображение допускают лишь бесконечные графы. Вместе со всяким мономорфизмом Φ граф обладает циклической полугруппой мономорфизмов $\{\Phi^n\}_{n=1}^{\infty}$, причем

$$\Phi^k G \subset \Phi^i G, \quad k \geq i. \quad (3)$$

¹ Здесь это дерево в G [4]; $Z \subset Y$.

Под свободной абелевой (полу)группой ранга n будем понимать сейчас прямую сумму n бесконечных циклических (полу)групп [5, § 19].

Определение 1. Граф G называется p -периодическим и q -полупериодическим (коротко $G \in \Omega_{pq}$), если он обладает свободной абелевой группой автоморфизмов ранга p и свободной абелевой полугруппой мономорфизмов ранга q .

В этом параграфе изучается связный граф $G = (X, Y, f) \in \Omega_{0,1}$, обладающий циклической полугруппой мономорфизмов $\{\Phi^n\}_{n=1}^{\infty}$ с образующим элементом $\Phi: G \rightarrow G$.

Определение 2. Граф $D^\Phi = G \setminus \Phi G = (X^\Phi, Y^\Phi, f)$ называется дефектом мономорфизма Φ или Φ -дефектом графа G . Граф $K^\Phi = (\tilde{X}^\Phi, \tilde{Y}^\Phi, f)$, где $\tilde{X}^\Phi = X^\Phi \cap \Phi X$ и $\tilde{Y}^\Phi = \{b \in \Phi Y \mid \exists \alpha, \beta \in \tilde{X}^\Phi: fb = (\alpha, \beta)\}$, называется Φ -контактом.

Отметим, что ребра дефекта Y^Φ — это те и только те ребра графа G , у которых нет Φ -прообраза. Графы

$$G, \Phi G, D^\Phi, K^\Phi$$

и их образы при отображении элементами полугруппы мономорфизмов являются частями графа G и поэтому все попарно согласованы (§ 1, п. 2). В дальнейшем используется, что Φ -дефект графа $\Phi^n G$ равен $\Phi^n D^\Phi$. По лемме 1.1 достаточно иметь равенство

$$\Phi^n Y \setminus \Phi^{n+1} Y = \Phi^n (Y \setminus \Phi Y), \quad (4)$$

которое вытекает из того, что каждое ребро левого множества входит в правое, и наоборот.

Вершина α графа G называется Φ -циклической, если $\Phi^n \alpha = \alpha$ для некоторого $n > 0$. Наименьшее из таких n называется порядком Φ -циклическости. При $n = 1$ вершина $\alpha \Phi$ неподвижна.

Максимальная часть $G_* = (X_*, Y_*, f)$ графа G , на которой мономорфизм Φ индуцирует автоморфизм, определяется полугруппой так:

$$G_* = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n G = \bigcap_{n=k}^{\infty} \Phi^n G \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Лемма 2.1 Все Φ -циклические вершины являются вершинами максимальной автоморфной части G_* графа G . Обратно, если множество вершин X_* у G_* конечно, то каждая вершина из X_* является Φ -циклической.

Если $\Phi^n \alpha = \alpha$, то $\alpha = \Phi^{nq} \alpha$ и $\alpha \in \Phi^{nq} X$ при любом q , откуда, полагая в (3) $k = nq$, получим $\alpha \in \Phi^i X$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Пусть теперь X_* конечно и $\alpha \in X_* = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n X$. Тогда $\{\Phi^n \alpha\}_{n=0}^{\infty} \subset X_*$ и при некоторых p, q ($p > q$)

$$\Phi^p \alpha = \Phi^q \alpha \quad \text{или} \quad \Phi^{p-q} \alpha = \alpha.$$

Лемма 2.2 Дефекты мономорфизма Φ и его степени $\Psi = \Phi^p$ связаны соотношением $D^\Psi = \bigcup_{n=0}^{p-1} \Phi^n D^\Phi$.

Если b — ребро графа $G (b \in Y)$, то либо $b \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \Phi^k Y$, либо для некоторого $i > 0$ $b \in \Phi^i Y$. В последнем случае существует наименьший номер $n > 0$ среди всех таких i и с использованием (4) можно записать $b \in \Phi^{n-1} Y \setminus \Phi^n Y = \Phi^{n-1} Y^\Phi$. Таким образом,

$$Y = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi^n Y^\Phi \right) \cup \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n Y \right), \quad (5)$$

где заключенные в скобки множества ребер не пересекаются. Множество $Y_* = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n Y$ неподвижно, поэтому

$$\Psi Y = \left(\bigcup_{n=p}^{\infty} \Phi^n Y^\Phi \right) \cup Y_*.$$

При $i \neq j$, очевидно, $\Phi^i Y^\Phi \cap \Phi^j Y^\Phi = \emptyset$. Теперь по лемме 1.1 из соотношения $Y^\Psi = Y \setminus \Psi Y = \bigcup_{n=0}^{p-1} \Phi^n Y^\Phi$ вытекает искомое утверждение.

Лемма 2.3 Пусть максимальная автоморфная часть G_* графа G не имеет ребер:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n Y = \emptyset. \quad (6)$$

Тогда всякая Φ -неподвижная вершина входит в $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n X^\Phi$, а весь граф G исчерпывается образами Φ -дефекта относительно отображений полугруппы

$$G = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi^n D^\Phi. \quad (7)$$

Равенство (7) вытекает из (5), (6) и леммы 1.1. Для всякой вершины $\alpha \in X$ найдется k такое, что $\alpha \in \Phi^k X^\Phi$, и если $\alpha = \Phi \alpha$, то $\alpha = \Phi^k \alpha$, $\alpha = \Phi^{-k} \alpha$, $\alpha \in X^\Phi$, $\alpha \in \Phi^n X^\Phi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Лемма доказана.

Лемма 2.4. Положим, что для полугруппы мономорфизмов $\{\Phi^n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено условие (6) и множество $X^\Phi \cap \Phi^2 X$ либо пусто, либо состоит только из Φ -неподвижных вершин. Тогда множество X^Φ вершин Φ -дефекта и множество вершин X^Φ Φ -контакта связаны соотношениями ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\Phi^n \tilde{X}^\Phi = \left(\bigcup_{k=0}^n \Phi^k X^\Phi \right) \cap \Phi^{n+1} X^\Phi. \quad (8)$$

Из $X^\Phi \subset X$ и (3) вытекает, что $\Phi^i X^\Phi \subset \Phi^2 X$ при $i \geq 2$, поэтому $\bigcup_{i=2}^{\infty} (X^\Phi \cap \Phi^i X^\Phi) \subset X^\Phi \cap \Phi^2 X$. Но последнее множество состоит разве

лишь из неподвижных вершин и по лемме 2.3 входит в $X^\Phi \cap \Phi X^\Phi$.
Значит, из представления

$$\begin{aligned}\tilde{X}^\Phi &= X^\Phi \cap \Phi X = X^\Phi \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi^i X^\Phi = \\ &= (X^\Phi \cap \Phi X^\Phi) \cup \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} (X^\Phi \cap \Phi^i X^\Phi) \right)\end{aligned}$$

следует

$$\tilde{X}^\Phi = X^\Phi \cap \Phi X^\Phi. \quad (9)$$

Аналогично в представлении правой части (8) в виде

$$\left[\bigcap_{k=0}^{n-1} \Phi^k (X^\Phi \cap \Phi^{n-k+1} X^\Phi) \right] \cup \Phi^n (\Phi X^\Phi \cap X^\Phi)$$

слагаемое, заключенное в квадратные скобки, можно отбросить, а оставшееся множество в силу (9) совпадает с левой частью (8).

Теорема 2.1 Пусть для полугруппы мономорфизмов $\{\Phi^n\}_{n=1}^{\infty}$ связного графа $G = (X, Y, f)$ выполнено условие (6)

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n Y = \emptyset$$

и при некотором $p \geq 0$ множество $W = X^\Phi \cap \Phi^{p+1} X$ либо пусто, либо состоит из одной Φ -неподвижной вершины. Тогда существует базис пар вершин $e \in \text{bas } X$, такой, что матрица сечений графа G по этому базису имеет вид

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ S_3 & S_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & S_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & S_3 & S_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где (в обозначении $\Psi = \Phi^p$) блок-столбец матрицы S с номером $n+1$ является матрицей сечений графа $(X, \Psi^n Y \setminus \Psi^{n+1} Y, f)$ по базису e , а блок-строка с номером $2n+1$ отвечает тем парам базиса e , которые состоят из вершин множества $\Psi^{n-1} \tilde{X}^\Psi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Доказательство. Отображение $\Psi = \Phi^p$ удовлетворяет условиям леммы 2.4. Действительно, из (3), (6), леммы 2.2 $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Psi^n Y = \emptyset$, а последнее множество в соотношениях

$$\begin{aligned}W &= \bigcup_{k=0}^{p-1} \Phi^k W = \bigcup_{k=0}^{p-1} (\Phi^k X^\Phi \cap \Phi^{p+k+1} X) \supset \bigcap_{k=0}^{p-1} (\Phi^k X^\Phi \cap \Phi^{2p} X) = \\ &= \left(\bigcup_{k=0}^{p-1} \Phi^k X^\Phi \right) \cap \Phi^{2p} X = X^\Psi \cap \Psi^2 X\end{aligned}$$

состоит разве лишь из одной неподвижной вершины вместе с множеством W . Выберем¹ $d \in \text{bas}(\Psi^{-1}X^\Psi)$. Очевидно,

$$(\Psi^{-1}\tilde{X}^\Psi) \cap \tilde{X}^\Psi = \Psi^{-1}(\tilde{X}^\Psi \cap \Psi\tilde{X}^\Psi) \subset \Psi^{-1}(X^\Psi \cap \Psi^2X).$$

Вместе с правой частью этого включения левая состоит разве лишь из одной неподвижной вершины; поскольку

$$X^\Psi \supset [(\Psi^{-1}\tilde{X}^\Psi) \cup X^\Psi],$$

то существует базис g_0 пар вершин X^Ψ , такой, что $g_0 \supset d \cup \Psi d$, где $\Psi d \in \text{bas} \tilde{X}^\Psi$.

Построим расширяющуюся цепочку базисов

$$g_0 \subset g_1 \subset g_2 \subset \dots \subset g_n \subset g_{n+1} \subset \dots, \quad (11)$$

где

$$g_n \in \text{bas} \bigcup_{k=0}^n \Psi^k X^\Psi, \quad g_n \supset \Psi^{n+1}d. \quad (12)$$

Пусть элемент g_n в (11) уже известен. Положим $g_{n+1} = g_n \cup \Psi^{n+1}g_0$ и $e_0 = \Psi^{n+1}d$, $e_1 = g_n$, $e_2 = \Psi^{n+1}g_0$, $X_0 = \Psi^n \tilde{X}^\Psi$, $X_1 = \bigcup_{k=0}^n \Psi^k X^\Psi$, $X_2 = \Psi^{n+1}X^\Psi$. По лемме 2.4 (примененной к мономорфизму Ψ) $X_0 = X_1 \cap X_2$, по построению $e_0 \subset e_1 \cap e_2$ и $e_k \in \text{bas} X_k$. Из леммы 1.3 следует, что $e_1 \cup e_2 = g_{n+1} \in \text{bas} \bigcup_{k=0}^{n+1} \Psi^k X^\Psi$. Цепочка (11) построена.

Итак (ср. [10]),

$$e = \bigcup_{n=0}^{\infty} g_n \in \text{bas} \bigcup_{n=0}^{\infty} \Psi^n X^\Psi.$$

Но применение (7) к мономорфизму Ψ графа $G = (X, Y, f)$ дает равенство $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Psi^n X^\Psi$, поэтому $e = \bigcup_{n=0}^{\infty} g_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Psi^n g_0$ есть базис пар вершин графа G ($e \in \text{bas} X$).

Пусть $s = (S_{ij})$ — матрица сечений графа G по базису e . Если b_j — ребро Ψ -дефекта $D^\Psi = (X^\Psi, Y^\Psi, f)$, то в (2) коэффициенты s_{ij} отличны от нуля разве лишь при $(\alpha_i, \beta_j) \in g_0$, так как $jY^\Psi \subset X^\Psi \times X^\Psi$ и $g_0 \in \text{bas} X^\Psi$. Матрица сечений графа D^Ψ по базису g_0 имеет вид

$$S_D = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix},$$

где строка блока S_1 соответствует парам вершин из d , блока S_3 — парам из Ψd , а блока S_2 — парам из $g_0 \setminus (d \cup \Psi d)$. Поскольку Ψ^n — изоморфизм, а g_0 и $\Psi^n g_0$ — базисы пар графов D^Ψ и $\Psi^n D^\Psi$ соответственно, то матрица сечений графа $\Psi^n D^\Psi = (\Psi^n X^\Psi, \Psi^n Y^\Psi, f)$

¹ Символы X^Ψ , \tilde{X}^Ψ обозначают множества вершин дефекта и контакта мономорфизма Ψ (определение 2).

по базису $\Psi^n g_0$ равна $S_D (n = 0, 1, 2, \dots)$. Матрица сечений σ_n графа $G_n = (X, \Psi^n Y^\Psi, f)$ по базису e содержит единственный ненулевой блок S_D на месте строк, отвечающих парам из $\Psi^n g_0 \supset \supset \Psi^n d \cup \Psi^{n+1} d$. Но $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$; действительно, по лемме 2.3 $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Psi^n D^\Psi$, а $\Psi^n D^\Psi \subset G_n \subset G$. Следовательно, $S = [\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots]$, что и дает (10). Теорема доказана.

Дерево¹ T_e на множестве вершин X , ассоциированное с построенным базисом e , обладает полугруппой мономорфизмов

$$\{\Psi^n\}_{n=1}^{\infty}, \Psi = \Phi^p.$$

Следствие 1. Предположим, в условиях теоремы 2.1 для контакта K^Ψ найдутся такой связный подграф H и номер q , что

$$K^\Psi \subset H \subset \bigcup_{i=1}^q \Psi^i D^\Psi. \quad (13)$$

Тогда существует фундаментальный базис ϵ пар вершин графа G , а ассоциированное с ϵ дерево T_ϵ обладает полугруппой мономорфизмов $\{\vartheta^n\}_{n=1}^{\infty}$ при $\vartheta = \Psi^q = \Phi^{pq}$ так, что $T_\epsilon \subset G$ и фундаментальная матрица сечений графа G по базису ϵ (после некоторой перестановки столбцов) имеет вид $S = [I, \sigma]$, причем σ сохраняет структуру (10).

Сначала докажем, что при связности Ψ -контакта K^Ψ можно положить $q = 1$, $\vartheta = \Psi$; в этом случае граф $D^\Psi \cup K^\Psi = (X^\Psi, Y^\Psi \cup \tilde{Y}^\Psi, f)$ связан и существует каркас $T_d = (\Psi^{-1} \tilde{X}^\Psi, Y_d, f)$ графа $\Psi^{-1} K^\Psi$ и каркас $T_0 = (X^\Psi, Y_0, f)$ графа $D^\Psi \cup K^\Psi$, такие, что $T_d \cup \Psi T_d \subset T_0$.

Полагая в теореме $d = fY_d$ и $g_0 = fY_0$, получим искомым базис (фундаментальный) $e = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Psi^n g_0$; соответствующее базису e дерево

$T_e = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Psi^n T_0 \subset G$ является каркасом графа G и обладает полугруппой мономорфизмов $\{\Psi^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть теперь Ψ -контакт не связан, $\vartheta = \Psi^q$ и $\hat{G} = (X, Y \cup Y^0, F)$ — расширение графа $G = (X, Y, f)$, состоящее в добавлении множества петель Y^0 — по одной при каждой вершине графа $\bigcup_{n=1}^{\infty} \vartheta^n \Psi^{-1} H$. Имеется единственное расширение отображения $\vartheta : G \rightarrow G$ до мономорфизма Θ графа \hat{G} . Легко проверить, что множество $X^0 \cap \Theta^2 X$ состоит разве лишь из одной Θ -неподвижной вершины и $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Theta^n (Y \cup Y^0) = \emptyset$.

Граф $\vartheta \Psi^{-1} H = \Psi^{q-1} H$ есть Θ -контакт графа \hat{G} ; он связан вместе с H . Теперь для Θ применима теорема 2.1 (при $p = 1$) и рассуждение, проведенное для Ψ в первой части доказательства следствия.

¹ Ребра T_e , вообще говоря, не являются ребрами графа G .

можно построить фундаментальный базис ϵ (для X) и соответствующее ему дерево T_ϵ в графе \hat{G} . Ясно, что T_ϵ есть одновременно дерево в G , и T_ϵ обладает полугруппой мономорфизмов $\{\theta^n\}_{n=1}^\infty$. Матрица сечений \hat{S} графа \hat{G} по базису ϵ после удаления нулевых столбцов (отвечающих петлям из Y^0) становится искомой фундаментальной матрицей сечений графа G по базису ϵ .

Замечание 1. Для того, чтобы граф G из теоремы 2.1 удовлетворял условию (13), достаточно, например, конечности его Ψ -контакта или ограниченности числа его компонент связности.

Следствие 2. Если Φ -дефект счетного графа G из теоремы 2.1 конечен, то матрица \hat{S} задает в координатном базисе пространства l_2 ограниченный оператор.

В силу леммы 2.2 граф D^Ψ также конечен; матрица конечномерна. Вследствие структуры (10) матрица S имеет в каждой строке и каждом столбце не более ν отличных от нуля элементов (равных ± 1), где ν есть удвоенное число ребер Ψ -дефекта. Отсюда легко выводится ограниченность оператора.

Замечание 2. Пусть $G_0 = G_1 \cup G$. Если граф G удовлетворяет условиям теоремы 2.1, то некоторая матрица сечений S_0 графа G_0 содержит матрицу сечений S вида (10) графа G в качестве блока. Если граф G_1 конечен, а G удовлетворяет следствию 2, то матрица S_0 задает в пространстве l_2 ограниченный оператор.

§ 3. Частотно-волновые характеристики LC-структуры

1. Ниже под $G = (X, Y, f)$ понимается связный конечный или счетный граф, а под Λ — соответственно комплексное евклидово или гильбертово пространство l_2 , так что $|Y| = \dim \Lambda$. Если $\{h_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\}$ — координатный базис в Λ , то существует изоморфизм $\chi: Y \rightarrow \{h_k\}$, $\chi b_k = h_k$. Пусть множество ребер разбито на три непересекающиеся подмножества (ср. [8, 9]): $Y = Y_q \cup Y_L \cup Y_C$; тогда $\Lambda = E \oplus H = E \oplus H_L \oplus H_C$ (ортогональные суммы подпространств), где $\chi Y_q \subset E$, $\chi Y_L \subset H_L$, $\chi Y_C \subset H_C$. С помощью некоторой вещественной симметрической матрицы $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_L & 0 \\ 0 & \Delta_C \end{bmatrix}$ (матрицы параметров) в пространстве $H = H_L \oplus H_C$ задается ограниченный, приводимый подпространствами H_L и H_C оператор Δ (написание оператора и его матрицы в указанном координатном базисе не различается).

Пусть $\tilde{u}(t)$, $\tilde{i}(t)$ — функции вещественного параметра со значениями в Λ ; постулируется следующая их связь с графом G и матрицей параметров Δ (ср. [6, 8, 9]):

$$\tilde{S}i(t) = 0; \quad \tilde{Q}u(t) = 0, \quad (14)$$

$$P_L u(t) = P_L \Delta \frac{di(t)}{dt}; \quad P_C i(t) = P_C \Delta \frac{du(t)}{dt}; \quad (15)$$

где S , \tilde{Q} — любые матрицы сечений и циклов графа G ; P_L и P_C —

ортопроекторы из H на H_L и H_C соответственно; $i(t) = P_H \tilde{i}(t)$, $u(t) = P_H \tilde{u}(t)$, P_H — ортопроектор из Λ на H .

Определение 3. Совокупность графа G , матрицы параметров Δ и функций $\tilde{u}(t)$, $\tilde{i}(t)$ называется *LC-структурой* (на G), если удовлетворяются соотношения (14), (15).

Конечные LC-структуры называют обычно LC-графами (см. библиографию в [8,9]). Ребра Y_q называются внешними ребрами LC-структуры, остальные ребра внутренними. Регулярным внутренним каркасом LC-структуры называется такой каркас T графа G , что ни одно ребро из Y_q не лежит в T (§ 1, п. 4) и фундаментальная матрица сечений S графа G , построенная по каркасу T , задает в Λ ограниченный оператор. Для существования такого T необходимо, чтобы в графе не было сечений из одних лишь ребер Y_q , а при выполнении этого условия достаточно, например, чтобы множество ребер Y_q было конечным, а граф G либо сам был конечным, либо удовлетворял условиям замечания 2 к теореме 2.1.

2. С LC-структурой можно связать тот или иной линейный автомат, выбрав соответствующим образом входное, выходное и внутреннее состояние (ср. [6, 8, 9]). Будем говорить, что автомат F связан с задачей отражения, если его передаточная функция $S(\lambda)$ имеет физический смысл коэффициента отражения волн, падающих на внешние ребра Y_q LC-структуры. Обозначая через \tilde{u} изображение Лапласа функции $\tilde{u}(t)$ (аналогично для остальных функций), можно $S(\lambda)$ находить из соотношения

$$\varphi^+ = S(\lambda) \varphi^-,$$

где $\varphi^\mp = \frac{1}{\sqrt{2}} P_E (\tilde{i} \mp \tilde{u})$, P_E — ортопроектор из Λ на E .

Все дальнейшие выкладки п. 2 имеют целью выразить выходное состояние автомата φ^+ через входное φ^- . В предположении, что LC-структура на графе $G = (X, Y, f)$ обладает регулярным внутренним каркасом $T = (X, Z, f)$, выделяются подмножества ребер из Y (Z — ребра дерева T); $Y_L^T = Y_L \cap Z$ (L — ребра дерева T); $Y_L^k = Y_L \setminus Y_L^T$ (L — ребра кодерова); $Y_C^T = Y_C \cap Z$ (C — ребра дерева); $Y_C^k = Y_C \setminus Y_C^T$ (C — ребра кодерова); $Y_L^k \cup Y_C^k = (Y_L \cup Y_C) \setminus Z$. Соответственно этим множествам ребер с помощью отображения χ в пространстве Λ (точнее в его части H) выделяются минимальные подпространства, такие, что

$$\begin{aligned} H^T &\supset \chi Z, \quad H_L^T \supset \chi Y_L^T, \quad H_L^k \supset \chi Y_L^k, \\ H_C^T &\supset \chi Y_C^T, \quad H_C^k \supset \chi Y_C^k, \quad H^k \supset \chi (Y_L^k \cup Y_C^k). \end{aligned}$$

Таким образом, в таблице пространств

$$\begin{array}{c|c|c} H & H_L & H_C \\ \hline H^T & H_L^T & H_C^T \\ \hline H^k & H_L^k & H_C^k \end{array} \quad (16)$$

первый элемент каждой строки (столбца) равен ортогональной сумме двух других элементов этой строки (столбца). Через $P_L, P_C, P^T, P^L, P^C, P^k, P^L_k, P^C_k$ обозначаются ортопроекторы из H на подпространства с соответственными индексами.

Фундаментальная матрица сечений S графа G , построенная по каркасу T , разбивается на блоки (ср. [11]):

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} Y_L^T & Y_C^T & Y_L^k & Y_C^k & Y_q \\ I & 0 & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ 0 & I & S_{21} & S_{22} & S_{23} \end{bmatrix},$$

где над каждым блок-столбцом указано множество ребер, которому он соответствует. Из блоков \tilde{S} образуются следующие матрицы:

$$S = \begin{bmatrix} I & S_{11} & 0 & S_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{21} & I & S_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S'_{11} & I & -S'_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S'_{12} & 0 & -S'_{22} & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} -S_{13} \\ 0 \\ -S_{23} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Если ввести обозначения

$$\psi(t) = P_L i(t) + P_C u(t), \quad u_E(t) = P_{E\tilde{u}}(t), \quad i_E(t) = P_{E\tilde{i}}(t), \quad I = J,$$

то уравнения (14), (15) принимают вид

$$S i(t) = \tilde{\Gamma} i_E(t), \quad Q u(t) = 0, \quad u_E(t) = -J \tilde{\Gamma}^* u(t), \quad (14a)$$

$$P_L u(t) = P_L \Delta \frac{d\psi(t)}{dt}, \quad P_C i(t) = P_C \Delta \frac{d\psi(t)}{dt}. \quad (15a)$$

Ниже понадобятся выражения $i(t) = P_L \psi(t) + P_C \Delta \frac{d\psi(t)}{dt}$, $u(t) = P_L \Delta \frac{d\psi(t)}{dt} + P_C \psi(t)$, непосредственно вытекающие из определения $\psi(t)$ и (15a).

Автомат F , упоминавшийся в начале п. 2^а, должен определяться входом $\varphi^-(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [i_E(t) - u_E(t)]$ и выходом $\varphi^+(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [i_E(t) + u_E(t)]$; внутренним состоянием F можно считать, например, $\psi(t)$. Исключение из соотношений (14a), (15a) величин $i(t)$, $u(t)$, $i_E(t)$, $u_E(t)$ и введение более удобных операторов $\Gamma = \sqrt{2} \tilde{\Gamma}$, $M = P_L^T + P_C^k$, $N = P_C^T + P_L^k$ приводит к основным уравнениям для неустановившихся состояний $\varphi^\pm(t)$, $\psi(t)$ автомата F :

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) - J \Gamma^* \left[N \psi(t) + M \Delta \frac{d\psi(t)}{dt} \right], \quad (16)$$

$$A \Delta \frac{d\psi(t)}{dt} + B \psi(t) = \Gamma \varphi^-(t), \quad (17)$$

где

$$A = SP_C + QP_L + \frac{1}{2} \Gamma J \Gamma^* M,$$

$$B = SP_L + QP_C + \frac{1}{2} \Gamma J \Gamma^* N.$$

После преобразования Лапласа (или перехода к гармоническим колебаниям с частотой $i\lambda$) уравнения состояний автомата принимает вид

$$\varphi^+ = \varphi^- - J \Gamma^* (N + \lambda M \Delta) \psi, \quad (16a)$$

$$(B + \lambda A \Delta) \psi = \Gamma \varphi^-. \quad (17a)$$

Если пучок операторов $B + \lambda A \Delta$ ограниченно обратим (по терминологии [7] в этом случае λ принадлежит множеству $\rho(B, -A\Delta)$ регулярных точек пучка), то из (17a) вектор ψ выражается через φ^- , а затем из (16a) — вектор φ^+ через φ^- . Но по определению $\varphi^+ = S(\lambda) \varphi^-$, поэтому для передаточной функции автомата получается формула

$$S(\lambda) = I - J \Gamma^* (N + \lambda M \Delta) (B + \lambda A \Delta)^{-1} \Gamma. \quad (18)$$

Из регулярности внутреннего каркаса T следует, что все коэффициенты в (18) и $S(\lambda)$ есть ограниченные операторы в соответствующих гильбертовых пространствах $J, S(\lambda) \in [E, E]$;

$$\Gamma \in [E, H]; \quad A, B, M, N, \Delta \in [H, H].$$

Доказана

Теорема 3.1 Пусть LC-структура на графе имеет регулярный внутренний каркас и F — линейный автомат, связанный с задачей отражения. Тогда для всех λ из открытого множества ρ регулярных точек пучка $B + \lambda A \Delta$ формула (18) определяет передаточную функцию $S(\lambda)$ автомата F . Коэффициенты в (18) суть вещественные матрицы; в соответствующих гильбертовых пространствах им отвечают ограниченные операторы, а оператор-функция $S(\lambda)$ голоморфна на ρ .

Важные свойства $S(\lambda)$ описывает

Теорема 3.2 В условиях теоремы 3.1 при $\lambda \in \rho$ оператор-функция $S(\lambda)$ обладает J -метрическими свойствами:

$$S^*(\lambda) JS(\lambda) - J = 0, \text{ если } \operatorname{Re} \lambda = 0;$$

$$S^*(\lambda) JS(\lambda) - J \geq 0, \text{ если } \operatorname{Re} \lambda \leq 0, \Delta \geq 0;$$

$$S^*(\lambda) JS(\lambda) - J \leq 0, \text{ если } \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \Delta \geq 0.$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $N^*B + B^*N = N^*\Gamma J \Gamma^*N$, $A^*M + M^*A = M^*\Gamma J \Gamma^*M$, $A^*N + M^*B = M^*\Gamma J \Gamma^*N = I$, $BA^* + AB^* = \Gamma J \Gamma^*$, $AN^* + BM^* = I$. С учетом трех первых равенств и условия $\Delta = \Delta^*$ получается

$$S^*(\lambda) JS(\lambda) - J = -2 \operatorname{Re} \lambda R^* \Delta R, \quad R = (B + \lambda A \Delta)^{-1} \Gamma.$$

3. В теоремах 3.1 и 3.2 предполагается, что множество ρ регулярных точек пучка $B + \lambda A\Delta$ не пусто в комплексной плоскости. Но даже в конечномерном случае, например, для электрических цепей, ρ может быть пустым. Используя результаты В. П. Потапова для дробно-линейных функций от матриц, можно показать, что в конечной структуре такая вырожденность матрицы $B + \lambda A\Delta$ при всех λ всегда устраняется за счет сколь угодно малого изменения матрицы параметров Δ . Точнее, при фиксированном графе LC -структуры и произвольно заданном λ ($\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \infty$) множество W вещественных симметрических матриц Δ , для которых матрица $B + \lambda A\Delta$ невырождена, всюду плотно в пространстве всех вещественных симметрических матриц. Практически важно следующее: входящие в W положительные матрицы Δ образуют многообразие, всюду плотное во множестве всех положительных вещественных матриц.

4. Моделирование системы частиц LC-структурой

Пусть в одномерном потенциальном поле на прямой OX находится система частиц (в общем случае бесконечная) с массами M_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) и координатами x_k , а положение равновесия первой частицы совпадает с точкой O . Задана энергия внешнего потенциального поля $U_{0k}(x_k)$ для k -й частицы и энергия потенциального взаимодействия k -й и n -й частиц $U_{kn}(|x_k - x_n|)$.

Возможны и сингулярные взаимодействия: $U_{kn} = 0$, если взаимодействия нет; $U_{kn} = \infty$, если имеется жесткая связь. Колебания системы будут обусловлены сторонними силами $f_{0k}(t)$, приложенными к частицам с номерами $k = k_1, k_2, k_3, \dots$. С системой частиц мы свяжем линейный автомат F , передаточная функция $S(\lambda)$ которого совпадает с коэффициентом отражения волн, падающих на возбуждаемые частицы k_1, k_2, \dots .

Чтобы свести эту задачу к рассмотренной в § 3, построим LC -структуру, моделирующую систему частиц (с помощью электромеханических аналогий [3]). В отличие от [2], где изучались частные виды бесконечных цепочек, здесь получены общее выражение и свойства $S(\lambda)$ для всего класса рассматриваемых систем частиц с ограниченной дальностью взаимодействий (не обязательно периодического характера) и произвольным ограниченным множеством значений масс M_k . В качестве иллюстрации рассмотрим систему четырех частиц рис. 1, где частицы 2 и 3 жестко связаны ($U_{23} = \infty$), а 1 взаимодействует с 2 и 4.

Если d_k — координата частицы в положении равновесия, то для изучения малых отклонений от положения равновесия достаточно знать массы M_k и величины $U''_{0k}(d_k)$, $U''_{kn}(|d_k - d_n|)$ (см. [2, 3]). При построении модели считается, что массе M_k соответствует емкость

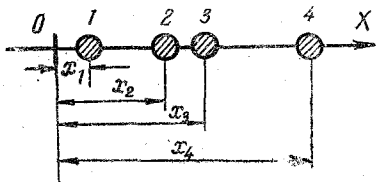


Рис. 1.

C_k , величинам $1/U_i''$ (перенумерованным единым индексом i) — индуктивность L_i , силе $f(t)$ — ток $i(t)$, скорости $v(t)$ — напряжению $u(t)$. Модельная LC-структура получается в два этапа.

а) Строится граф

$$G_1 = (X_1, Y_q \cup Y_L \cup Y_C, f_1),$$

где

$$X_1 = \{\alpha_k, \alpha_0\}, Y_C = \{\alpha_k\}, Y_q = \{q_j\}, Y_L = \{b_i\}$$

$$k, j, i = 1, 2, 3, \dots; f_1 b_i = (\alpha_p, \alpha_q)$$

(L_i соответствует u''_{pq}), $f_1 q_j = (\alpha_{k_j}, \alpha_0)$, (на частицу k_j действует сторонняя сила), $f_1 a_k = (\alpha_k, \alpha_0)$.

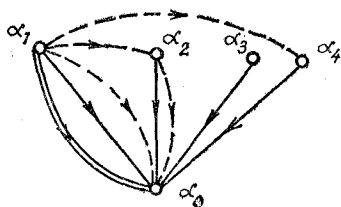


Рис. 2.

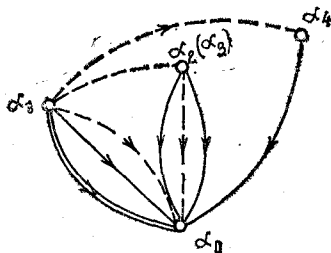


Рис. 3.

б) Если частицы m и n , соответствующие ребрам a_m и a_n , жестко связаны, то вершины α_m и α_n графа G_1 отождествляются. Полученный граф G с диагональной матрицей Δ (ее диагональные элементы L_i, C_k отличаются от величин $1/U_i''$, M_k масштабным коэффициентом) образует модельную LC-структуру. Последняя обладает регулярным внутренним каркасом, коль скоро дальность взаимодействий частиц ограничена по всей цепочке.

Искомый линейный автомат F строится теперь по модельной структуре как в § 3, а частотная характеристика $S(\lambda)$ для системы частиц имеет вид (18) и обладает всеми свойствами из теоремы 3.2 и п. 3°.

Для примера рис. 1 граф G_1 изображен на рис. 2, а граф G — на рис. 3, где сплошными линиями изображены C-ребра, пунктирными — L-ребра и двойной линией — внешнее ребро.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берж К. Теория графов и ее применения. М., ИЛ, 1962. 319 с.
2. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М., ИЛ, 1959. 457 с.
3. Гарднер М. Ф., Бернс Дж. Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными. М., Физматгиз, 1961. 551 с.
4. Зыков А. А. Теория конечных графов. I. Новосибирск, «Наука», 1969. 543 с.
5. Курош А. Г. Теория групп. Изд. 3, М., «Наука», 1967. 648 с.
6. Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны. Открытые системы. М., «Наука», 1966. 298 с.

7. Руткас А. Г. Об одной функции операторного узла.— Вестник ХГУ «Математика и механика». Вып. 37, с. 14—17.
8. Руткас А. Г., Чаусовский Д. М. Некоторые применения операторных узлов и гиперузлов.— Сб. «Математическая физика». Вып. 5, Киев, 1968, с. 173—179.
9. Руткас А. Г., Чаусовский Д. М. Об одном классе линейных автоматов на графах.— «Кибернетика», 1969, 3, с. 11—16.
10. Halin R. Über unendliche Wege in Grafen. „Math. Annalen“, 1964, 157, p. 125—137.
11. Ponstein J. A. A generalization of the incidence matrices of a graph. „Theorie des Grafes“.— „Journées internat. etude Rom.“, 1966, Paris—New-York, 1967, p. 315—332.