УДК 517.521.5

Г. А. Михалин, канд. физ.-мат. наук

НЕЭФФЕКТИВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ СХОДИМОСТЬ

1. В настоящей работе мы перенесем теоремы Н. А. Давыдова [1], доказанные им для регулярных линейных преобразований вида

$$t(x) = \int_0^\infty S(t)\,dc(x,\ t) \text{ и } t(x) = \int_0^x S(t)\,dc(x,\ t)$$

на более общие, так называемые линейные интегральные преобразования, сохраняющие сходимость. Это позволит нам получить результаты, которые переносят известные теоремы Агнью [2] о регулярных матричных преобразованиях на более общие матричные преобразования, сохраняющие сходимость.

Будем рассматривать класс C^* комплекснозначных функций $S(t)$, определенных в промежутке $[0,\ \infty)$, ограниченных и непрерывных в этом премежутке.

Комплекснозначную функцию $c(x,\ t)$ возьмем такой, чтобы она при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ была функцией с ограниченным изменением на каждом отрезке $0 \leqslant t \leqslant x$ и чтобы

$$c(x,\ x') - c(x,\ 0) \to c(x)\,(x' \to \infty),\ c(x) \to a\,(x \to \infty), \tag{1}$$

$$c(x,\ t) \to \alpha(t)\,(x \to \infty), \tag{2}$$

где $\alpha(t)$ — конечное число для каждого $t \in [0, \infty)$;

$$\overset{\infty}{\underset{0}{V}}(c(x, t)) = \lim_{y\to\infty} \overset{y}{\underset{0}{V}}(c(x, t)) < H, \tag{3}$$

где $H > 0$ — постоянная, не зависящая от x; $\overset{y}{\underset{0}{V}}(c(x, t))$ — полное изменение функции $c(x, t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant y$.

Функция $c(x, t)$ определяет преобразование

$$t(x) = \int_0^\infty S(t)\, dc(x, t) \tag{4}$$

функции $S(t)$ из класса C^*.

Если $t(x) \to S\ (x \to \infty)$, то будем говорить, что преобразование (4) суммирует функцию $S(t)$ к числу S.

2. Покажем, что преобразование (4) при выполнении условий (1)—(3) сохраняет сходимость в классе C^*, т. е. из равенства

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = S \tag{5}$$

следует равенство

$$\lim_{x\to\infty} t(x) = S^* \tag{6}$$

для каждой функции $S(t)$ из класса C^*, причем

$$S^* = a \cdot S + \int_0^\infty [S(t) - S]\, d\alpha(t). \tag{7}$$

Пользуясь известным методом доказательства [3, с. 254, теорема 3], можно показать, что при выполнении условий (2) и (3) имеет место равенство

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^y S(t)\, dc(x, t) = \int_0^y S(t)\, d\alpha(t),$$

где $y \ni [0, \infty)$ причем $\overset{\infty}{\underset{0}{V}}(\alpha(t)) \leqslant H$.

Допустим, что $S(t) \to 0\ (t \to \infty)$, $\varepsilon > 0$ фиксировано. Число $y(\varepsilon)$ возьмем таким, что для $t > y(\varepsilon)\ |S(t)| < \frac{\varepsilon}{4H}$. Число $X(\varepsilon)$ возьмем таким, чтобы для $x > X(\varepsilon)$

$$\left|\int_0^y S(t)\, dc(x, t) - \int_0^y S(t)\, d\alpha(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Тогда, учитывая (3) и (8), для $x > X(\varepsilon)$ имеем

$$\left| t(x) - \int_0^\infty S(t)\, d\alpha(t) \right| \leqslant \left| \int_0^y S(t)\, d[c(x, t) - \alpha(t)] \right| +$$

$$+ \left| \int_y^\infty S(t)\, d[c(x, t) - \alpha(t)] \right| < \varepsilon.$$

тим формула (7) доказана для случая $S = 0$. Если же $S(t) \to S \neq 0\ (t \to \infty)$, то рассмотрим функцию $S_1(t) = S(t) - S \to 0$ $(t \to \infty)$. Имеем

$$\int_0^\infty S(t)\, dc(x, t) = S \cdot c(x) + \int_0^\infty S_1(t)\, dc(x, t) \to a \cdot S +$$

$$+ \int_0^\infty [S(t) - S]\, d\alpha(t),$$

и справедливость утверждения пункта 2 и (7) доказана.

3. Если преобразование (4), сохраняющее сходимость в классе C^*, таково, что из равенства (6) следует равенство (5) для каждой функции $S(t)$ из класса C^*, то назовем его неэффективным в классе C^*.

Справедлива

Теорема 1. *Если функция $c(x, t)$, удовлетворяющая условиям* (1) — (3), *удовлетворяет еще и условию*

$$\lim_{x\to\infty} \left[|c(x, x) - \lim_{t\to x-0} c(x, t)| - \lim_{x'\to x-0} \overset{x'}{\underset{0}{V}} (c(x, t)) - \overset{\infty}{\underset{x}{V}} (c(x, t)) \right] > 0, \qquad (9)$$

то преобразование (4) *неэффективно в классе C^*.*

Доказательство. Пусть $S(t)$ — из класса C^* и пусть $S(t)$ не имеет предела при $t \to \infty$. Тогда

$$\overline{S} \equiv \lim_{t\to\infty} |S(t)| > 0. \qquad (10)$$

Допустим сначала, что $S(t)$ удовлетворяет условию

$$|S(t)| \leqslant S \qquad (11)$$

для всех t из промежутка $[0, \infty)$.

Так как $\overline{S} = \overline{\lim} |S(t)|$, то существует последовательность x_n такая, что $x_n \in [0, \infty)\ (n = 1, 2, \ldots)$, $x_n \to \infty\ (n \to \infty)$ и и $|S(x_n)| \to \overline{S}\ (n \to \infty)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Существует $N(\varepsilon)$ такое, что $|S(x_n)| > \overline{S} - \varepsilon$ для $n > N(\varepsilon)$. В силу леммы работы [1] справедливо неравенство

$$\left|\int_0^{x_n} S(t)\,dc(x_n, t)\right| \geqslant |S(x_n)|\,|C(x_n, x_n) - \lim_{t\to x-0} c(x_n, t)| -$$

$$- \max_{0\leqslant t\leqslant x_n} |S(t)| \lim_{x''\to x_n-0} \overset{x''}{\underset{0}{V}}(c(x_n, t)),$$

Учитывая это неравенство, для $n > N(\varepsilon)$ имеем

$$|t(x_n)| = \left|\int_0^{\infty} S(t)\,dc(x_n, t)\right| \geqslant \left|\int_0^{x_n} S(t)\,dc(x_n, t)\right| -$$

$$- \left|\int_{x_n}^{\infty} S(t)\,dc(x_n, t)\right| \geqslant |S(x_n)|\,|c(x_n, x_n) \lim_{t\to x_n-0} c(x_n, t)| - \max_{0\leqslant t\leqslant x_n}|S(t)| \times$$

$$\times \lim_{x''\to x-0} \overset{x''}{\underset{0}{V}}(c(x_n, t)) - \overline{S}\overset{\infty}{\underset{x_n}{V}}(c(x_n, t)) > \overline{S}\,[|c(x_n, n_n) - \lim_{t\to x_n-0} c(x_n, t)| -$$

$$- \lim_{x''-x_n-0} \overset{x''}{\underset{0}{V}}(c(x_n, t) - \overset{\infty}{\underset{x_n}{V}}(c(x_n, t)) - \varepsilon\,|c(x_n, x_n) - \lim_{t\to x_n-0} c(x_n, t)|,$$

и если $\varepsilon > 0$ — достаточно мало, а $c(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то

$$|t(x_n)| > \overline{S}\cdot\gamma > 0, \tag{12}$$

где $\gamma > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от n.

Неравенство (12) показывает, что если функция $c(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то преобразование (4) не может суммировать к нулю функцию $S(t)$ из класса C^*, удовлетворяющую условиям (10) и (11).

Рассмотрим теперь произвольную функцию $S(t)$ из класса C^*, не имеющую предела в бесконечно удаленной точке. Обозначим через F множество всех предельных значений функции $S(t)$ в бесконечно удаленной точке. F — замкнутое ограниченное множество в комплексной плоскости, отличное от одной точки. Пусть K — замкнутая выпуклая оболочка множества F [4, с. 77].

Введем в рассмотрение подмножества промежутка $[0, \infty)$:

$$E_1 = \{t : S(t) \in K\} \text{ и } E_2 = \{t : S(t) \overline{\in} K\}.$$

Предполагая E_1 отличным от пускового множества, обозначим через x^* ближайшую к нулю точку из E_1. Такая точка x^* обязательно существует, так как E_1 — замкнутое множество, и в частности, x^* может совпадать с нулем. Очевидно, что $E_3 \equiv (x^*, \infty)/E_1$ — открытое множество и что $[0, x^*) \subset E_2$.

Обозначим через $\rho(t)$ — расстояние точки $S(t)$ от K. Так как K — замкнутое множество, то существует точка $z(t) \in K$ такая, что $\rho(t)=\rho(z(t),\ S,(t))$. В силу того, что расстояние от точки z до ограниченного замкнутого множества Φ, рассматриваемое как функция от z, определенная во всей комплексной плоскости, есть непрерывная функция [6, с. 44] и так как $S(t)$ — непрерывная функция переменной $t\in[0,\ \infty)$, то $\rho(t)$ есть непрерывная функция переменной $t\in[0,\ \infty)$, Ясно, что $\rho(t)\to 0\ (t\to\infty)$.

Функция $S_1(t)$ и $S_2(t)$ определим так. Если множество E_2 — пустое, то $S_2(t)=0$, а $S_1(t)=S(t)$ для всех $t\in[0,\ \infty)$. Если же E_2 — непустое, то

$$S_1(t)=\begin{cases} S(t), & \text{если } t\in E_1,\\ Z(t), & \text{если } t\in E_2,\end{cases}$$

$$S_2(t)=\begin{cases} 0, & \text{если } t\in E_1,\\ S(t)-Z(t), & \text{если } t\in E_2.\end{cases}$$

Имеем $S_2(t)\to 0\ (t\to\infty)$, точка $S_1(t)\in K$ для каждого $t\in[0,\ \infty)$, причем

$$S(t)=S_1(t)+S_2(t)\qquad (0\leqslant t<\infty). \tag{13}$$

Докажем непрерывность функции $S_1(t)$, а следовательно, и $S_2(t)$ в промежутке $[0,\ \infty)$.

Пусть t_0 — произвольная точка множества $E_3=(x^*,\ \infty)\setminus E_1$, t_n — произвольная последовательность такая, что

$$t_n\to t_0\ (n\to\infty),\ t_n\in E_3\ \ (n=1,\ 2\ \ldots).$$

Тогда, в силу непрерывности функции $\rho(t)$, имеем

$$\rho(t_n)=|Z(t_n)-S(t_n)|\to|Z(t_0)-S(t_0)|\ (n\to\infty).$$

Отсюда, так как

$$S(t_n)\to S(t_0)\ (n\to\infty),$$

K — замкнутое выпуклое множество и $S(t_0)\,\overline{\in}\,K$, получаем, что $Z(t_n)\to Z(t_0)\ (n\to\infty)$. Этим доказана непрерывность функции $S_1(t)$ в каждой точке открытого множества E_3.

Если $t_0\in E_1$ и является внутренней точкой E_1, то непрерывность функции $S_1(t)$ в точке t_0 следует из непрерывности функции $S(t)$ в этой точке.

Допустим, что t_0 — изолированная точка множества E_1. Так как $S(t)$ непрерывна в точке t_0, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что если $0<t-t_0<\delta(\varepsilon)$, то $t\in E_2$ и $|S(t)-S(t_0)|<\varepsilon$. В силу определения функции $Z(t)$, $|Z(t)-S(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$ для всех $t\in(t_0,\ t_0+\delta(\varepsilon))$. Отсюда, если $0\leqslant t-t_0<\delta(\varepsilon)$, то

$$|S_1(t)-S_1(t_0)|=|Z(t)-S(t_0)|\leqslant|Z(t)-S(t)|+|S(t)-S(t_0)|<\varepsilon$$

и этим доказана непрерывность функции $S_1(t)$ в точке t справа. Аналогично доказывается и непрерывность слева.

Рассмотрим теперь случай, когда в любой окрестности точки t_0 содержатся как точки множества E_1, так и точки множества E_2. Если $t_n^{(1)} \in E_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $t_n^{(1)} \to t_0$ $(n \to \infty)$, то $S_1(t_n^{(1)}) = S(t_n^{(1)}) \to S(t_0)$ $(n \to \infty)$. Следовательно, функция $S_1(t)$ непрерывна в точке t_0 по множеству E_1. Покажем, что если $t_n^{(2)} \in E_2 \times (n = 1, 2, \ldots)$ и

$$t_n^{(2)} \to t_0 \; (n \to \infty), \text{ то } Z(t_n^{(2)}) \to S(t_0) \; (n \to \infty).$$

Действительно, так как $S(t_n^{(2)}) \to S(t_0)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что если $n > N(\varepsilon)$, то

$$|S(t_n^{(2)}) - S(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу определения функции $Z(t)$, $|Z(t_n^{(2)}) - S(t_n^{(2)})| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N(\varepsilon)$. Значит, если $n > N(\varepsilon)$, то

$$|Z(t_n^{(2)}) - S(t_0)| \leqslant |Z(t_n^{(2)}) - S(t_n^{(2)})| + |S(t_n^{(2)}) - S(t_0)| < \varepsilon,$$

следовательно, $Z(t_n^{(2)}) \to S(t_0)$ $(n \to \infty)$, т. е. $S_1(t)$ — непрерывна в точке t_0 по множеству E_2. Так как $S_1(t)$ непрерывна в точке t_0 и по множеству E_1 и так как $E_1 \cup E_2 = [0, \infty)$, то $S_1(t)$ непрерывна в точке t_0.

Если $t_0 \in [0, x^*)$, то, учитывая ранее проведенные рассуждения, опять делаем заключение о непрерывности функции $S_1(t)$ в точке t_0.

Остается рассмотреть случай, когда E_1 — пустое множество. Тогда $S_1(t) = z(t)$ и $S_2(t) = S(t) - Z(t)$ для всех t из промежутка $[0, \infty)$, и непрерывность функции $S_1(t)$ в промежутке $[0, \infty)$ вытекает из ранее проведенных рассуждений.

Таким образом, доказана непрерывность функций $S_1(t)$ и $S_2(t)$ в промежутке $[0, \infty)$. Ограниченность этих функций в данном промежутке очевидна, следовательно, $S_1(t)$ и $S_2(t)$ — функция из класса C^*. Значит, если функция $c(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и преобразование (4) суммирует $S(t)$ к числу S, то из (13) получаем, что это преобразование суммирует к некоторому числу S_1 функцию $S_1(t)$, т. е.

$$\int_0^\infty S_1(t)\, dc(x, t) \to S_1 \; (x \to \infty).$$

Используя лемму из работы [1] и (9), имеем

$$|c(x)| = \left|\int_0^\infty dc(x, t)\right| \geqslant \left|\int_0^x dc(x, t)\right| - \left|\int_x^\infty dc(x, t)\right| \geqslant |c(x, x) -$$

$$- \lim_{t \to x - 0} c(x, t)| \lim_{x' \to x - 0} \overset{x'}{\underset{0}{V}}(c(x, t)) - \overset{\infty}{\underset{x}{V}}(c(x, t)) \geqslant \gamma_1 > 0$$

для $x > X$, где $\gamma_1 > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от x.

Отсюда получаем, что $a \equiv \lim_{x\to\infty} c(x) \neq 0$. Рассмотрим функцию $S^*(t) = S(t) - \frac{S_1}{a}$. Имеем

$$S^*(t) = S_1(t) - \frac{S_1}{a} + S_2(t) = S_3(t) + S_2(t)$$

и

$$\int_0^\infty S_3(t)\,dc(x,\ t) = \int_0^\infty S_1(t)\,dc(x,\ t) - \frac{S_1}{a}c(x) \to 0 \ (x\to\infty).$$

Обозначим через K^* замкнутую выпуклую оболочку множества редельных значений функции $S^*(t)$ в бесконечно удаленной точке. Множество K^* получается из множества K путем параллельного переноса. Точки $S_1(t)$ принадлежат K для всех t из промежутка $[0, \infty)$, и так как точки $S_3(t)$ получаются из точек $S_1(t)$ путем того же самого параллельного переноса, то $S_3(t) \in K^*$ для всех $t \in [0, \infty)$.

Покажем, что

$$|S_3(t)| \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\,|S(t)| \tag{14}$$

для всех t из промежутка $[0, \infty)$.

Так как K^* — ограниченное замкнутое множество, то существует точка z^*, такая, что

$$|z^*| = \max_{z\in K^*}|z|.$$

Множество K^* может быть или отрезком, или ограниченной замкнутой выпуклой областью с границей Γ. В случае отрезка будем отождествлять Γ с этим отрезком. Таким образом, $z^* \in \Gamma$.

Неравенство (14) будет доказано, если покажем, что z^* является предельным значением функции $S_3(t)$ в бесконечно удаленной точке. Из определения числа z^* следует утверждение о том, что z^* не может быть внутренней точкой отрезка, который является частью Γ. Этим (14) доказано для случая, когда Γ — отрезок.

Предположим, что z^* не является предельным значением функции $S_3(t)$ в бесконечно удаленной точке и что K^* — замкнутая выпуклая область. Тогда существует δ-окрестность точки z^*, которая не содержит значения $S_3(s)$, а следовательно, и $S^*(t)$ для всех достаточно больших t. Соединив точки пересечения границы δ-окрестности точки z^* с Γ, получим замкнутое выпуклое множество, содержащее все предельные значения функции $S^*(t)$ в бесконечно удаленной точке и являющееся меньшим K^*. Это противоречит тому, что K^* — замкнутая выпуклая оболочка множества предельных значений функции $S^*(t)$ в бесконечно удаленной точке. Неравенство (14) доказано.

Итак, если допустить, что функция $S(t)$ из класса C^* удовлетворяет условию (10) и суммируется преобразованием (4), в котором

$c(x, t)$ удовлетворяет условиям (1)—(3) и (9), то получим, что это преобразование (4) суммирует к нулю функцию $S_3(t)$ из класса C^*, удовлетворяющую условиям (10) и (14), а это по доказанному выше невозможно.

Теорема 1 доказана.

Доказательство справедливости следующих утверждений можно провести подобно тому, как это сделано для аналогичных утверждений работы [1].

Следствие 1. *Пусть функция* $c(x, t)$ *является неубывающей в промежутке* $0 \leqslant t < \infty$ *для каждого фиксированного* $x \geqslant 0$ *и такой, что*

$$c(x, 0) = 0, \quad c(x, t) \to c(x)(t \to \infty), \quad c(x) \to a \neq \infty (x \to \infty),$$
$$c(x, t) \to \alpha(t) \quad (x \to \infty)$$

и пусть левый скачок функции $c(x, t)$ *в точке* $t = x$, *равный* $c(x, x) \lim\limits_{t \to x-0} c(x, t)$, *удовлетворяет условию*

$$c(x, x) - \lim_{t \to x-0} c(x, t) \geqslant \frac{\theta a}{2} > \frac{a}{2},$$

где $\theta > 1$ *не зависит от* x. *Тогда преобразование* (4) *неэффективно в классе* C^*.

Действительно, при выполнении условий следствия функция $c(x, t)$, очевидно, удовлетворяет условиям (1)—(3). Условие же (9) примет вид

$$\lim_{x \to \infty} [2c(x, x) - 2 \lim_{t \to x-0} c(x, t) - \lim_{t \to \infty} c(x, t)] > 0$$

и тоже будет выполняться.

Теорема 2. *Пусть функции* $g(x, t)$ *и* $h(x)$ *удовлетворяют условиям*

$$h(x) + \int_0^\infty g(x, t)\, dt \to a \neq \infty (x \to \infty),$$

$$\int_0^t g(x, \tau)\, d\tau \to \alpha(t) \quad (x \to \infty),$$

$$\int_0^\infty |g(x, t)|\, dt + |h(x)| < H,$$

где $H < 0$ — *постоянная, не зависящая от* x,

$$\lim_{x \to \infty} (|h(x)| - \int_0^\infty |g(x, t)|\, dt) > 0.$$

Тогда преобразование $t(x) = h(x) S(x) + \int_0^\infty g(x, t) S(t)\, dt$ *неэффективно в классе* C^*.

Теорема 3. *Если K — матрица $A = \| a_{nk} \|$ удовлетворяет условию* $\lim\limits_{n \to \infty} (|a_{nn}| - \sum\limits_{k \neq n} |a_{nk}|) > 0$, *то она не суммирует ни одной ограниченной расходящейся последовательности.*

Теорема 3 переносит известную теорему Агнью [2; 5, с. 379] с регулярных матричных преобразований на матричные преобразования, сохраняющие сходимость.

4. Рассмотрим теперь класс C комплекснозначных функций $S(t)$, непрерывных в промежутке $[0, \infty)$.

Комплекснозначную функцию $c(x, t)$ с ограниченным изменением на отрезке $0 \leqslant t \leqslant x$ возьмем такой, чтобы

$$c(x, x) - c(x, 0) \to a \ (x \to \infty), \tag{15}$$

$$c(x, t) \to \alpha(t) \quad (x \to \infty), \tag{16}$$

где $\alpha(t)$ — конечное число для каждого ($t \in [0, \infty)$,

$$\overset{x}{\underset{0}{V}} (c(x, t)) < H, \tag{17}$$

где $H > 0$ не зависит от x.

Функция $c(x, t)$ определяет преобразование

$$t(x) = \int\limits_0^x S(t)\, dc(x, t) \tag{18}$$

функции $S(t)$ из класса C.

Преобразование (18) при выполнении условий (15)—(17) сохраняет сходимость в классе C, т. е. из равенства

$$\lim_{t \to \infty} S(t) = S \tag{19}$$

следует равенство

$$\lim_{x \to \infty} \int\limits_0^x S(t)\, dc(x, t) = S^* \tag{20}$$

для каждой функции $S(t)$ из класса C. Это утверждение по существу является следствием утверждения пункта 2.

Справедлива

Теорема 4. *Если функция $c(x, t)$, удовлетворяющая условиям* (15)—(17), *удовлетворяет еще и условию*

$$\varliminf_{x \to \infty} [| c(x, x) - \lim_{t \to x - 0} c(x, t) | - \lim_{x' \to x - 0} \overset{x'}{\underset{0}{V}} (c(x, t))] > 0,$$

то преобразование (18) *неэффективно в классе C, т. е. из равенства* (20) *следует равенство* (19) *для каждой функции $S(t)$ из класса C.*

Доказательство. Так как преобразование (18) является частным случаем преобразования (4), и так как при выполнении условий теоремы 4 выполняются условия теоремы 1, то достаточно доказать, что преобразование (18) не суммирует ни одной неограниченной функции из класса C. Доказательство этого факта совершенно аналогично доказательству аналогичного факта, проведенному в работе [1, с. 191], поэтому мы его здесь опускаем.

Следствие 2. *Пусть функция $c(x, t)$ является неубывающей в промежутке $0 \leqslant t \leqslant x$ для каждого фиксированного $x > 0$ и пусть*

$$c(x, 0) = 0, \quad c(x, t) \to \alpha(t)\ (x \to \infty), \quad c(x, x) \to a\ (x \to \infty),$$

причем левый скачок функции $c(x, t)$ в точке $t = x$, равный $c(x, x) - \lim\limits_{t \to x-0} c(x, t)$, удовлетворяет условию

$$c(x, x) - \lim_{t \to x-0} c(x, t) \geqslant \frac{\theta a}{2} > \frac{a}{2},$$

где $\theta > 1$ не зависит от x. Тогда преобразование (18) *неэффективно в классе C.*

Следствие 3. *Если К матрица $A = \|a_{nk}\|$ удовлетворяет условиям*

$$a_{nk} = 0 \text{ для } k > n\ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\varliminf_{n \to \infty} \left(|a_{nn}| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}|\right) > 0,$$

то она не суммирует ни одной расходящейся последовательности.

Теорема 5. *Пусть функции $g(x, t)$ и $h(x)$ удовлетворяют условиям*

$$\int_0^x g(x, t)\, dt + h(x) \to a\ (x \to \infty),$$

$$\int_0^t g(x, \tau)\, d\tau \to \alpha(t)\ \ (x \to \infty),$$

$$\int_0^x |g(x, t)|\, dt + |h(x)| < H,$$

где $H > 0$ не зависит от x,

$$\varliminf_{x \to \infty} \left(|h(x)| - \int_0^x |g(x, t)|\, dt\right) > 0.$$

Тогда преобразование $t(x) = h(x) S(x) + \int_0^x g(x, t) S(t)\, dt$ неэффективно в классе C, т. е. из равенства

$$\lim_{x \to \infty} \left[h(x) S(x) + \int_0^x g(x, t) S(t)\, dt\right] = S$$

следует равенство

$$\lim_{t \to \infty} S(t) = S'$$

для каждой функции $S(t)$ *из класса* C.

Доказательство справедливости следствий 2 и 3 и теоремы 5 подобно доказательству аналогичных утверждений работы [1].

В заключение автор выражает благодарность профессору Н. А. Давыдову за большую помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов Н. А. Неэффективные регулярные линейные интегральные преобразования.— Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 6. Харьков, 1968, с. 5—18.
2. Agnev R. Equivalence of methods for evaluation of secuences.— "Proc. Amer. Math. Soc.", 1952, 3, p. 550—565.
3. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957. 424 с.
4. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., ИЛ, 1951. 504 с.
5. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., Физматгиз, 1960. 470 с.
6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М., «Наука», 1967. 624 с.