УДК 517.519

Е. В. Токарев

О ЛИНЕЙНОЙ РАЗМЕРНОСТИ НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Рассмотрим банахово пространство $\Lambda(c)$ последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ [1] с конечной нормой

$$\| x \|_{\Lambda(c)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* c_k, \tag{1}$$

где вектор $x^* = \{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ составлен из модулей компонент вектора x, расположенных в убывающем порядке, а нормирующая последовательность $c = \{c_i\}_{i=1}^{\infty}$; $c_i \geqslant 0$; $c_i \searrow 0$; $\sum c_i = \infty$ такова, что ряд расходится.

Одновременно рассмотрим пространство $M(c)$ (пространство Марцинкевича) последовательностей $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ с нормой

$$\| x \|_{M(c)} = \sup A_n(x); \quad A_n(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^*}{\sum_{k=1}^{n} c_k}, \tag{2}$$

а также его подпространство $M_0(c)$ таких $x \in M(c)$, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = 0. \tag{3}$$

В настоящей работе изучается строение бесконечномерных подпространств тройки пространств $\Lambda(c)$, $M_0(c)$, $M(c)$, а в п. 3 попутно получены необходимые и достаточные условия изоморфизма пространств $\Lambda(c_1)$ и $\Lambda(c_2)$, определяемых различными нормирующими последовательностями.

Приведем некоторые факты и обозначения, используемые в статье.

Лемма 1. [2—5].

1. *В тройке пространств* $M_0(c)$, $\Lambda(c)$, $M(c)$ *каждое последующее сопряжено к предыдущему.*

2. *Последовательность* $E = \{e_n\}$; $e_n = \{\delta_{m,n}\}_{m=1}^{\infty}$ ($\delta_{m,n}$ — *символ Кронекера) образует безусловный базис (так называемый «стандартный базис») пространств* $M_0(c)$ *и* $\Lambda(c)$.

3. *Базис* E *симметричен в том смысле, что*

а) $\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} |a_k| e_{j_k} \right\|$, *где* $\{e_{j_k}\}_{k=1}^{n}$ — *некоторая выборка из* E *(возможно, переставленная) длины* n;

б) $\left\| \sum a_k e_k \right\| \leqslant \left\| \sum b_k e_k \right\|$, *если только* $a_k^* \leqslant b_k^*$.

[1] Аналогичные $\Lambda(c)$ B-пространства $\Lambda(\varphi)$ измеримых функций были введены Г. Г. Лоренцом [1].

4. *Пространства* $\mathrm{M}(c)$ *несепарабельны.*

Последовательность $\{z_n\}$ называется блок-базисом по $E=\{e_j\}$, если для некоторой возрастающей последовательности индексов $= m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ и некоторого семейства вещественных чисел $\{b_j\}$ выполняется

$$z_n = \sum_{j=m_n+1}^{m_{n+1}} b_j e_j. \tag{4}$$

Последовательности $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$ называются эквивалентными, если существуют константы K_1 и K_2 такие, что для всякого набора скаляров $\{t_k\}$ и для $n=1, 2, \ldots$

$$K_1 \left\| \sum_{k=1}^{n} t_k f_k \right\| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} t_k g_k \right\| \leqslant K_2 \left\| \sum_{k=1}^{n} t_k f_k \right\|.$$

Лемма 2 *(ослабленная форма предложения из* [6]).

Если $E=\{e_k\}$, $\|e_k\|=1$—базис пространства B, а последовательность $\{g_k\}\subset B$; $\|g_k\|=1$ слабо сходится к нулю, то из $\{g_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{g_{k_j}\}$, эквивалентную блок-базису по E.

Лемма 3. [2, 5].

Выполняются следующие теоретико-множественные естественные включения:

$$\Lambda(c) \subset c_0; \quad \mathrm{M}(c) \subset c_0. \tag{5}$$

Из (5) следует, что норма $\|x\|_0 = \max|x_k|$ элемента

$$x=\{x_k\} \in \Lambda(c) \quad (\in \mathrm{M}_0(c))$$

конечна, и что стандартный базис пространства $\Lambda(c)$ ($\mathrm{M}(c)$) слабо сходится к нулю.

Фундаментальный (кратко: ф.) последовательностью назовем последовательность $\{s_n\}$;

$$s_n = \left\| \sum_{1}^{n} e_k \right\|.$$

Стандартный базис пространства B обозначим через E_B.

2. Начнем с изложения простейших факторов о тройке пространств

$$\{\mathrm{M}_0(c), \ \Lambda(c), \ \mathrm{M}(c)\}.$$

Предложение 1.

1. $\Lambda(c)$ *содержит дополняемое подпространство, изоморфное* l_1.
2. $\mathrm{M}_0(c)$ *содержит (дополняемое) подпространство, изоморфное* c_0.
3. $\Lambda(c)$ *не изоморфно никакому подпространству пространства* l_1.
4. $\mathrm{M}_0(c)$ *не изоморфно никакому подпространству пространства* c_0.

5. $\mathrm{M}(c)$ *содержит (дополняемое) подпространство, изоморфное* l_∞.

6. $\mathrm{M}(c)$ *не изоморфно пространству* l_∞.

Доказательство.

1, 2. Следует из теорем Джеймса [7] о пространствах с безусловными базисами.

3. В l_1 слабая сходимость совпадает с сильной, а стандартный базис пространства $\Lambda(c)$ слабо сходится к нулю.

4. Если $\mathrm{M}_0(c)$ изоморфно вложено в c_0 то в силу симметрии $E_{\mathrm{M}_0(c)}$ этот базис эквивалентен некоторому блок-базису по E_{c_0}, что, согласно результату Пелчинского [8], означает изоморфизм $\Lambda(c) \cong \cong l_1$, а значит, изоморфизм $\mathrm{M}_0(c) \cong c_0$, что противоречит п. 3.

5. Так как $\Lambda(c) \cong G \bigoplus l_1$ (по п. 1), то $\Lambda(c) \bigoplus l_1 \cong G \bigoplus l_1 \bigoplus \bigoplus l_1 \cong G \bigoplus l_1 \cong \Lambda(c)$, откуда $\mathrm{M}(c) = \Lambda^*(c) \cong [\Lambda(c) \bigoplus l_1]^* = = \mathrm{M}(c) \bigoplus l_\infty$.

6. Если $\mathrm{M}(c) = (\mathrm{M}_0(c))^{**} \cong l_\infty$, то, так как $\mathrm{M}_0(c)$ имеет безусловный базис, согласно [9, с. 297], $\mathrm{M}_0(c)$ изоморфно c_0, что противоречит п. 4.

В отличие от п. 3, 4 предложения 1, для $\mathrm{M}(c)$ справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Пространство* l_∞ *содержит (недополняемое) подпространство, изоморфное* $\mathrm{M}(c)$.

Доказательство.

Положим для $x = \{x_k\} \in \mathrm{M}(c)$

$$B_n(x) = \sup_{v(n)} \left\{ \frac{\left|\sum_{j=1}^{n} x_{k_j}\right|}{\sum_{j=1}^{n} c_j} \right\}, \tag{6}$$

где supremum берется по всем выборкам $\{k_1, \ldots, k_n\}$ длины n из натурального ряда. Поскольку

$$B_n(x) \leqslant A_n(x) \leqslant 2B_n(x),$$

ясно, что выражение

$$\|x\| = \sup B_n(x) \tag{7}$$

определяет на $\mathrm{M}(c)$ норму, эквивалентную исходной. Для нормы (7) определим отображение

$$T : \mathrm{M}(c) \to l_\infty$$

так.

Рассмотрим для элемента $x = \{x_k\} \in \mathrm{M}(c)$ счетное семейство вещественных чисел.

$$\left\{\frac{x_i}{c_1}\right\}_{i=1}^{\infty}; \quad \left\{\frac{x_i + x_j}{c_1 + c_2}\right\}_{j>i=1}^{\infty}; \quad \left\{\frac{x_i + x_j + x_k}{c_1 + c_2 + c_3}\right\}_{k>j>i=1}^{\infty}; \ \ldots,$$

занумерованных некоторым фиксированным образом. Поставим в соответствие k-му элементу этого семейства k-ю координату вектора $X \in l_\infty$. Ясно, что отображение $Tx = X$ линейно, непрерывно и взаимно-однозначно. При этом если $TM(c)$ дополняемо в l_∞, то $M(c) \cong l_\infty$, что противоречит предложению 1. Заметим, что можно доказать существование изометричного вложения $M(c)$ в l_∞, используя вместо наборов

$$\left\{ \frac{\left| \sum_1^n x_{i_k} \right|}{\sum_1^n c_k} \right\} \text{ наборы } \left\{ \frac{\sum_1^n \varepsilon_k x_{i_k}}{\sum_1^n c_k} \right\},$$

где $\varepsilon_k = \pm 1$, и применяя равенство

$$\| x \|_{M(c)} = \sup_n \sup_{\varepsilon_k = \pm 1} \sup_{v(n)} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_{i_k}}{\sum_{k=1}^n c_k} \right\},$$

где $v(n)$ означает выборку $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ из натурального ряда.

Хотя пространство $M_0(c)$ не изоморфно никакому подпространству c_0, его, однако, можно вложить в некоторое пространство непрерывных функций на счетном компакте.

Предложение 3. *Пространство* $C[\omega^\omega]$ *имеет подпространство, изоморфное* $M_0(c)$.

Доказательство.

Пусть ω означает первый бесконечный ординал, $[\omega^\omega]$ — топологическое пространство всех ординалов, меньших или равных ω^ω, наделенное порядковой топологией. $C[\omega^\omega]$ — пространство непрерывных функций на этом компакте [10]. Обозначим через Q_n множество всех ординалов вида

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{j=\frac{n(n+1)}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \omega^j k_j,$$

где $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_n < \omega$ — целые числа, и положим $Q = \bigcup_{n=1}^\infty Q_n$. Пусть $\overline{Q}$ и $\overline{Q}_n$ означают замыкания соответственно Q и Q_n и исходной топологии $[\omega^\omega]$. Ясно, что $\overline{Q}$ и $\overline{Q}_n$ — компактные пространства, поскольку таковым является $[\omega^\omega]$, причем $\overline{Q}_m \cap \overline{Q}_n = \varnothing$ $(m \neq n)$. Определим отображение $T: M_0(c) \to C[\overline{Q}]$. Пусть $\{x_n\} \in M_0(c)$. Положим $Tx = f_x(t)$, где

$$f_x(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{x_{k_1} + x_{k_2} + \cdots + x_{k_n}}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \text{ на } Q_n,$$

а на $\overline{Q}_n$ доопределим эту функцию по непрерывности (что можно сделать ввиду $\lim A_n(x) = 0$, а значит и $\lim B_n(x) = 0$). Ясно, что $f_x(t)$ является непрерывной функцией от $t \in \overline{Q}$.

Отображение $T_x = f_x(t)$ является линейным

$$f_{x+y}(t) = f_x(t) + f_y(t); \; f_{ax}(t) = af_x(t)$$

и непрерывным

$$\| Tx \| = \sup | f_x(t) | = \sup B_n(x) \leqslant 2 \| x \|_{\mathrm{M}(c)}.$$

Поэтому оператор T ($\| T \| \leqslant 2$) осуществляет изоморфное вложение $\mathrm{M}_0(c)$ в пространство $C[\omega^\omega]$.

Отметим, что $\mathrm{M}_0(c)$ не содержит подпространств, изоморфных $C[\omega^\omega]$, так как $C[\omega^\omega]$ не имеет безусловного базиса, всякий блок-базис по $E_{\mathrm{M}_0(c)}$ безусловен, а если $C[\omega^\omega]$ изоморфно подпространству пространства B с базисом E_B, то $E_{C[\omega^\omega]}$ эквивалентен блок-базису по E_B (согласно результату Линденштрауса и Пелчинского [16]). Этот факт распространяется на все пространства непрерывных функций на компактах, которые не имеют безусловного базиса. Поэтому справедливы следующие вложения (в смысле изоморфности некоторому подпространству):

$$c_0 \subset \mathrm{M}_0(c) \subset C[\omega^\omega].$$

С л е д с т в и е. *Всякое бесконечномерное подпространство пространства* $\mathrm{M}_0(c)$ *содержит (дополняемое) подпространство, изоморфное* c_0 [10].

Аналогичный результат имеет место и для пространства $\Lambda(c)$. Он представляет интерес в связи с одним вопросом Банаха: должно ли всякое слабо полное нерефлексивное пространство содержать подпространство l_1?

Предложение 4. *Всякое бесконечномерное подпространство пространства* $\Lambda(c)$ *содержит подпространство, изоморфное* l_1 [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Лемма 4. *Если блок-базис* (4) *таков, что* $\| z_k \| = 1$, *а* $\lim \| z_k \|_0 = 0$, *то из* $\{z_k\}$ *можно выделить подпоследовательность, эквивалентную* E_{l_1}.

Для доказательства леммы достаточно показать [11], что существует подпоследовательность $\{y_k\} \subset \{z_k\} \subset \Lambda(c)$, не сходящаяся слабо к нулю.

Ввиду условий леммы найдется такая подпоследовательность $\{\bar{z}_k\} \subset \{z_k\}$, что

$$\bar{z}_k = \sum_{m_k+1}^{m_{k+1}} d_j e_j'; \quad m_{k+1} - m_k \nearrow \infty; \quad \{ e_j' \} \subset E_{\Lambda(c)}.$$

---

[1] Этот результат был независимо получен С. А. Раковым в дипломной работе.

Заметим также, что при $m \to \infty$

$$\frac{s_{m+n} - s_n}{s_m} \geqslant \frac{s_{m+n} - s_n}{s_{m+n}} = 1 - \frac{s_n}{s_{m+n}} \to 1.$$

По данному $\varepsilon < \frac{1}{2}$ найдется такое n_0, что при $k \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{s_{m_{k+1}} - s_{m_k}}{s_{m_{k+1}-m_k}} \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{8}$$

Выберем из $\{\bar{z}_k\}_{k=n_0}^{\infty}$ подпоследовательность $\{y_k\}$

$$y_k = \sum_{p_k+1}^{p_{k+1}} h_j e_j''; \quad \{e_j''\} \subset E_{\Lambda(c)},$$

такую, что

$$\max_{p_k+1 \leqslant j \leqslant p_{k+1}} |h_j| \leqslant \min_{p_{k+1} \leqslant j < p_{k+2}+1} |h_j| \tag{9}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

При этом элементы подбазиса $\{e_j''\}$ занумерованы так, что внутри каждого блока коэффициенты h_j расположены в порядке убывания моделей.

Функционал $f = \{\varepsilon_k c_k\} \in \Lambda^*(c) = \mathrm{M}(c)$ принимает на элементе y_k значение

$$f(y_k) = \frac{f(y_k)}{\|y_k\|} = \left\{ \sum_{p_k+1}^{p_{k+1}} |h_j| c_j \middle| \sum_{p_k+1}^{p_{k+1}} |h_j| c_{j-p_k} \right\}.$$

Знаки $\varepsilon_j = \pm 1$ выбраны так, что $\varepsilon_j h_j = |h_j|$.

Поскольку, согласно [9], коэффициенты h_j ограничены

$$(s_{p_{k+2}} - s_{p_{k+1}})^{-1} \leqslant |h_j| \leqslant (s_{p_k} - s_{p_{k-1}})^{-1},$$
$$p_k \leqslant p_{k+1}$$

а линейная функция $f(y_k)$ достигает экстремума в крайних точках области ограничения, то ввиду (8)

$$f(y_k) \geqslant 1 - 2\varepsilon$$

что и доказывает лемму.

Для доказательства предложения рассмотрим произвольное бесконечномерное подпространство B в $\Lambda(c)$ и, пользуясь аналогичным процессом Банаха [12, с. 165], выберем в нем последовательность элементов.

$$y_k = \sum_{i=k}^{\infty} a_{ki} e_i; \quad \|y_k\|_{\Lambda(c)} = 1,$$

а из нее подпоследовательность $\{ y_{m_k} \} \subset \{ y_k \}$, такую, что

$$\Big\| \sum_{m_{k+1}+1}^{\infty} a_{m_k j} e_j \Big\|_{\Lambda(c)} \leqslant 2^{-k}.$$

По теореме об устойчивости базисов [13] последовательность $\{ y_{m_k} \}$ эквивалента блок-базисной последовательности

$$f_k = \sum_{m_k+1}^{m_{k+1}} a_{m_k j} e_j. \tag{10}$$

Рассмотрим блок-базис по $\{ f_k \}$:

$$z_k = \sum_{n_k+1}^{n_{k+1}} b_j f_j$$

и подберем коэффициенты b_j так, чтобы

$$\| z_k \|_{\Lambda(c)} = 1, \text{ а } \| z_k \|_0 \to 0$$

(что всегда можно сделать ввиду (10))

Доказательство завершается применением леммы 4.

В [14] был задан вопрос: если B-пространство F является сопряженным к пространству F_1, $F = F_1^*$ и единичный шар пространства F имеет счетное число крайних точек, то обязана ли в F слабая сходимость совпадать с сильной?

Поскольку в $\Lambda(c)$ все крайние точки единичного шара имеют вид [17]

$$(\pm e_{i_1} \pm e_{i_2} \pm \cdots \pm e_{i_n})/s_n; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

а $E_{\Lambda(c)}$ слабо сходится к нулю, то ответ на этот вопрос должен быть отрицательным.

В заключение раздела покажем, что существует достаточно много пространств $\Lambda(c)$, которые не включаются ни в какое $\boldsymbol{L}_1$-пространство.

Предложение 5. *$\boldsymbol{L}_1$-пространство не имеет подпространств, изоморфных $\Lambda(c)$ если ф. последовательность $\{ s_n \}$ пространства $\Lambda(c)$ такова, что $s_n \leqslant n^{2-\varepsilon}$.*

Доказательство. Как известно [9], в $\boldsymbol{L}_1$-пространстве выполняется теорема Орлича: если ряд $\sum x_k$ ($x_k \in \boldsymbol{L}_1$) сходится безусловно, то сходится ряд $\sum \| x_k \|^2$. Однако, как показал Н. И. Гурарий [15], условие $s_n \leqslant n^{2-\varepsilon}$ влечет теоретико-множественное включение $\Lambda(c) \supset l_{2+\varepsilon_1}$; $\varepsilon_1 < \varepsilon$, из которого следует несправедливость теоремы Орлича в указанных пространствах.

3. Настоящий раздел посвящен необходимым и достаточным условиям изоморфизма пространств $\Lambda(c_1)$, $\Lambda(c_2)$ с ф. последовательностями $\{ s_n^{(1)} \}$ и $s_n^{(2)}$ соответственно.

Теорема 1. *Для изоморфизма пространств $\Lambda(c_1)$ и $\Lambda(c_2)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\underline{\lim}\, s_n^{(1)}/s_n^{(2)} > 0; \quad \overline{\lim}\, s_n^{(1)}/s_n^{(2)} < \infty. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность условий (11) доказана в [2] (см. также [4]). Для доказательства необходимости предположим, что

$$\overline{\lim}\, s_n^{(1)}/s_n^{(2)} = \infty \tag{12}$$

и что пространство $\Lambda(c_2)$ изоморфно вложено в $\Lambda(c_1)$. Тогда в силу симметрии стандартного базиса $E_{\Lambda(c_2)}$, согласно лемме 2, он эквивалентен блок-базису (4) по $E_{\Lambda(c_1)} = \{e_k^{(1)}\}$. Для последовательности блоков $\{z_k\}$ могут представиться две возможности.

A. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\|z_k\|_0 > \varepsilon$; $k = 1, 2, \ldots$

B. $\underline{\lim}\, \|z_k\|_0 = 0$.

В случае A в силу симметрии базиса $E_{\Lambda(c_2)}$ и эквивалентности последовательностей $\{e_k^{(2)}\}$ и $\{z_k\}$ имеем

$$s_n^{(2)} = \left\|\sum_{k=1}^{n} e_k^{(2)}\right\| \geqslant K \left\|\sum_{k=1}^{n} z_k\right\| \geqslant K\varepsilon \left\|\sum_{k=1}^{n} e_k^{(1)}\right\| = k\varepsilon s_n^{(1)},$$

откуда $\sup s_n^{(1)}/s_n^{(2)} \leqslant (K\cdot\varepsilon)^{-1}$, что противоречит (12). В случае B, согласно лемме 4, из $\{z_k\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{z_k\}$, эквивалентную E_{l_1}, что означает изоморфизм $\Lambda(c_2) \cong l_1$, противоречащий п. 3 предложения 1.

Случай $\underline{\lim}\, s_n^{(1)}/s_n^{(2)} = 0$ исследуется аналогично.

Следствие. *При выполнении условия* (12) *пространство $\Lambda(c_1)$ не содержит подпространств, изоморфных $\Lambda(c_2)$.*

Доказательство теоремы 1 содержит в неявной форме следующее утверждение.

Предложение 6. *Из всякой слабо сходящейся к нулю последовательности элементов $\{g_k\} \subset \Lambda(c)$ можно выделить подпоследовательность $\{g_{k_j}\}$, такую, что*

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} g_{k_j}\right\| \geqslant a s_m,$$

где a — некоторая постоянная, не зависящая от m.

4. Настоящий раздел посвящен частичному обращению предложения 6.

Предложение 7. *Если для ф. последовательности $\{s_n\}$ пространства $\Lambda(c)$ выполнено условие*

$$s_{m\cdot n} \leqslant K s_m \cdot s_n, \tag{14}$$

что из всякой слабо сходящейся к нулю последовательности элементов $\{g_k\} \subset \Lambda(c)$ *можно извлечь подпоследовательность* $\{g_{k_j}\}$, *такую, что*

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} g_{k_j}\right\| \leqslant bs_m, \tag{15}$$

где b — *некоторая постоянная, не зависящая от* m.

Доказательство. Поскольку $\{g_k\}$ слабо сходится к нулю, то по лемме 2 можно выбрать подпоследовательность $\{\bar{g}_k\} \subset \{g_k\}$, эквивалентную блок-базису $\{z_k\}$ по $E_{\Lambda(c)} = \{e_k\}$.

Все дальнейшие рассуждения будем проводить для последовательности $\{z_k\}$.

Так как $z_k \rightharpoonup 0$, то по лемме 4 $\|z_k\|_0 \geqslant \varepsilon_0$. Без ограничения общности можно считать, что во всех блоках z_k количество коэффициентов b_i таких, что $|b_i| > \varepsilon_0$, одно и то же (и равно n_0).

Назовем первым остатком $z_{k,1}$ элемента z_k вектор

$$z_{k,1} = z_k - \sum_{j=nk+1}^{n_{k+1}}{}' b_j e_j,$$

где суммирование ведется по тем j, для которых $|b_j| \geqslant \varepsilon_0$. Для последовательности первых остатков могут представиться две возможности:

A. $\lim \|z_{k,1}\| = 0$.

B. Найдется $\delta > 0$, такое, что

$$\|z_{k,1}\| \geqslant \delta \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

В случае A при помощи теоремы об устойчивости базисов [13] можно найти последовательность $\{y_k\}$ блоков равной длины n_0, эквивалентную некоторой выборке из $\{z_k\}$. Поскольку

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{n_0 i}^{n_0(i+1)} b_j e_j\right\| \geqslant \varepsilon_0 \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right\|,$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{n_0 i}^{n_0(i+1)} e_j\right\| \leqslant (n_0 + 1 \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right\|,$$

ясно, что $\{y_i\}$ эквивалентна стандартному базису $E_{\Lambda(c)}$, для которого (15) выполняется.

Заметим, что в случае B можно считать, что $\|z_{k,1}\|_0 > \varepsilon_1$, так как в противном случае, согласно лемме 4, можно выбрать $\{z_{k_j,1}\} \subset \subset \{z_{k,1}\}$, эквивалентную стандартному базису E_{l_1}. Но тогда последовательность соответствующих блоков $\{z_{k_j}\}$ также эквивалентна E_{l_1}, что противоречит ее слабой сходимости к нулю.

Поэтому можно рассматривать вторые остатки

$$z_{k,2} = z_k - \sum_{j=nk+1}^{n_{k+1}}{}'' b_j e_j,$$

где суммирование ведется по тем j, для которых $|b_j| > \varepsilon_1$ (считая, что таких во всех блоках равное число n_1). Повторим для вторых остатков рассуждения, приведенные выше, и определим по индукции процесс выбора $k-x$ остатков. Если процесс выбора обрывается на j-м шаге, то, аналогично п. А, можно извлечь из $\{z_k\}$ подпоследовательность, эквивалентную стандартному базису $E_{\Lambda(c)}$, т. е. (15) выполняется. В противном случае можно найти последовательность $\{y_k\} \subset \Lambda(c)$, эквивалентную некоторой выборке из $\{z_k\}$ и такую, что

$$y_n = \sum_{j=1}^{\infty} t_{kj} e_{kj}, \tag{16}$$

где

$$\varepsilon_j \leqslant t_{ks} \leqslant \varepsilon_{j-1}$$

при

$$n_{j-1} \leqslant s \leqslant n_j;$$

n_k означает количество векторов базиса в k-м остатке, а $\{e_{kj}\}$ — стандартный базис $E_{\Lambda(c)}$ некоторым образом занумерованный в двойную последовательность.

Рассмотрим $\{g_k\} \subset \Lambda(c)$,

$$g_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_{kj},$$

где

$$a_j = \varepsilon_{l+1} \text{ при } n_{l-1} < j < n_l.$$

Поскольку

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} g_k \right\| = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (c_{nj+1} + \cdots + c_{nj+n}) =$$

$$= s_n \sum (a_j - a_{j+1}) \frac{s_{nj}}{s_n} \leqslant K s_n \sum (a_j - a_{j+1}) s_j \leqslant K s_n,$$

а

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| \leqslant s_{n_0} \varepsilon_0 + \left\| \sum_{k=1}^{n} g_k \right\|,$$

то

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| \leqslant K s_n + \varepsilon_0 s_{n_0} \leqslant b s_n,$$

что и доказывает предложение,

Замечание. От какого-либо условия, аналогичного (14), избавиться нельзя, как показывает пример пространства $\Lambda(c)$ с

$$s_n = n^p (\ln n)^{-1} \quad (1 \leqslant p < \infty).$$

Действительно, в этом случае для любой выборки из $\{y_k\}$,

$$y_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_{kj} \text{ с } a_1 = 1, \quad a_j - a_{j+1} = j^{-p} (\ln j)^{-1}$$

имеем:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} y_{k_j} \right\| \geqslant \gamma_n n^p (\ln h)^{-1}; \ \gamma_n \to \infty.$$

Как следствие предложения 5 получается

Теорема 2. *При условии* (14) *пространство* $\Lambda(c)$ *не имеет подпространств, изоморфных какому-либо* $\Lambda(c_1)$ $(\Lambda(c) \cong \Lambda(c_1))$.

Доказательство. Допустим, что $\underline{\lim}\, s_n/s_n^{(1)} = 0$ (случай $\overline{\lim}\, s_n/s_n^{(1)} = \infty$ перекрывается теоремой 1). Пусть $\Lambda(c_1)$ изоморфно вложено в $\Lambda(c)$. Тогда стандартный базис $E_{\Lambda(c_1)}$ эквивалентен блок-базису по $E_{\Lambda(c)}$, а в этом случае, согласно предложению 7,

$$s_n^{(1)} = \left\| \sum_{k=1}^{n} e_k^{(1)} \right\| \leqslant a s_n,$$

что влечет неравенство $\inf s_n/s_n^{(1)} \geqslant a^{-1}$, противоречащее предположению. [1]

Следствие. *Пространства* $\Lambda(c)$ *с* $s_n = n^p$ *или* $s_n = n^p \ln n$ *имеют попарно несравнимые линейные размерности.*

Автор выражает глубокую благодарность М. И. Кадецу за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lorentz G. G. Some new functional spaces. — „Ann. Math"., 1950, vol. 51 (2), p.37—55.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., «Наука», 1965. 508 с.
3. Sargent W. L. C. Some sequence spaces, related to the lp—spaces. —"j. London Math. Soc.", 1960, vol. 35, p. 161—171.
4. Garling D. J. H. On symmetric sequence spaces. — «Proc. London Math. Soc.», 1966, vol. 152 (3), p. 85—106.
5. Calder J. R., Hill J. B. A collection of secuence spaces. —„Proc. Amer. Math. Soc.", 1970, vol. 152, N 1, p. 107—118.
6. Bessaga Cz., Pełczyński A. On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. — "Studia Math"., 1968, vol, 17, p. 165—174.
7. James R. C. Bases and reflexivity in Banach sraces. —„Ann. Math.", 1950, vol. 2 (5), p. 518—527.
8. Lindenstrauss J., Pełczyński A. Absolutely summing operators in Zp—spaces and their applications. —"Studia Math.", 1968, vol. 29, p. 275—326.
9. Petczyński A. Projections in certain Banach spaces. —„Studia Math.", 1960. vol. 19, p. 209—228.

---

[1] Вероятно, любые неизоморфные пространства $\Lambda(c)$ имеют несравнимые линейные размерности, однако освободиться от условия (14) нам не удалось.

10. Pełczyński A., Semadeni Z. Spaces of continuous functions. III. —„Studia Math"., 1959, vol 18, p. 211—222.
11. Bessaga Cz., Pełczyński A. A generalisation of the results of R. C. James, concerning absolute bases in Banach spases. —"Studia Math.", 1958, vol. 17, p. 165—174.
12. Банах С. Курс функціонального аналізу. Київ, «Наукова думка», 1948. 436 с.
13. Крейн М. Г., Мильман Д. Р., Рутман М. А. Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха. —«Зап. мат. о-ва», 5, Харьков, 16. 1940, с. 106—110.
14. Lindenstrauss J., Phelps R. Extreme point properties of convexe badies in reflexive Banach spaces. Isr, Journ Math., 1968, vol, 6, p. 39—48.
15. Гурарий Н. И. О последовательностях коэффициентов разложений по базисам в гильбертовом и банаховом пространствах. —«Изв. АН СССР, Математика», 1971, т. 35, № 1, с. 216—223.
16. Lindenstrauss J., Pełczyński A. Contvibution to the theory of the classicas Banach spaces. Journ. Funet. Analusis, 1971. 200 c.
17. Семенов Е. М. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций. —ДАН СССР, 1964, т. 156, № 6, с. 1292—1295.