УДК 513.88

Ю. А. Абрамович

О СЛАБЫХ ЗАМЫКАНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ПОДСТРУКТУР В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X K — пространство и $\tilde{X}$ — пространство регулярных функционалов на X. Отметим, что тотальность $\tilde{X}$ не предполагается. Пусть H — линейная подструктура в X. В *2* приведены некоторые результаты о замыкании H в X в различных линейных топологиях. Так, показано (следствие 1), что замыкание H в X в топологии $\sigma(X, \tilde{X})$ есть линейная подструктура в X. (Линейность слабого замыкания, разумеется, тривиальна). Естественно возникает вопрос, нельзя ли в предыдущем утверждении поменять местами X и $\tilde{X}$, т. е. если G — линейная подструктура в $\tilde{X}$, то будет ли ее замыкание в $\tilde{X}$ в топологии $\sigma(\tilde{X}, X)$ подструктурой в $\tilde{X}$? Оказывается, что нет. В *3* показано, что уже в пространстве $\tilde{m}$ (m — обычное пространство ограниченных числовых последовательностей) можно построить линейную подструктуру G, $\sigma(\tilde{m}, m)$-замыкание которой не является подструктурой. Допустим теперь, что линейная подструктура G содержится не просто в $\tilde{X}$, а в $\overline{X}$, (где $\overline{X}$ — компонента вполне линейных функционалов из $\tilde{X}$). В этом случае (*1*, теорема 3) замыкание G в $\tilde{X}$ в топологии $\sigma(\tilde{X}, X)$ остается подструктурой. Наконец, отметим теорему 4, в которой доказывается, что в банаховом $K_\sigma N$-пространстве X условие (A) (см. *1*) необходимо и достаточно для того, чтобы для любой линейной подструктуры G в X^* ее $\sigma(X^*, X)$-замыкание было вновь подструктурой.

1. Предварительные сведения, терминология.

В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы следуем в основном монографии Б. З. Вулиха [1]. Приведем некоторые из них. Если X, K — линеал, то через $\tilde{X}$ (соответственно $\overline{X}$, или $\tilde{X}_c$) обозначается K-пространство всех регулярных (соответственно вполне линейных или (о)-линейных) функционалов на X.

Если D подмножество в X и Y — линейная подструктура в $\tilde{X}$, то через $\sigma(X, Y)$ — cl D обозначается замыкание множества D в X в топологии $\sigma(X, Y)$,

Подмножество S K-линеала X называется подструктурой [1, с. 28], если для любых $x, y \in S$ их грани $x \vee y$, $x \wedge y$, вычисленные в X, входят в S.

Если X — K-линеал, $x, y \in X$ и $x \leqslant y$, то множества вида $\{z \in X : x \leqslant z \leqslant y\}$ называются (порядковыми) интервалами и обозначаются $[x, y]$.

Подмножество S K-линеала X называется нормальным, если из $|x| \leqslant |y|$ $(x \in X,\ y \in S)$ следует, что $x \in S$.

KN-линеалом называется K-линеал, на котором задана монотонная норма, т. е. норма, удовлетворяющая следующему условию $(|x_1| \leqslant |x_2|) \Rightarrow (\|x_1\| \leqslant \|x_2\|)$. KN-(соответственно $K_\sigma N$) пространством называется KN-линеал, являющийся K-(K_σ) пространством.

Если E-нормированное пространство, то через E^* обозначаем, как обычно, сопряженное пространство непрерывных линейных функционалов на E. E^{**} — второе сопряженное пространство.

Если X KN-линеал, то, как известно, X^* есть нормальное подпространство в $\tilde{X}$.

Говорят, что норма в KN-линеале X удовлетворяет условию (A), если из того, что $x_n \downarrow 0$ $(x_n \in X)$, следует, что $\lim \|x_n\| = 0$.

Напомним, что если в $K_\sigma N$-пространстве X выполнено условие (A), то $X^* \subset \overline{X}$.

2. О слабом замыкании линейных подструктур в K-пространствах.

Предложение 1. *Пусть X—K-пространство, H — линейная подструктура в X, Y — нормальное подпространство в $\tilde{X}$. Допустим, что все порядковые интервалы в Y $\sigma(Y, X)$ компактны. Тогда $\sigma(X, Y) - \mathrm{cl}\, H$ есть линейная подструктура в X.*

Доказательство. Рассмотрим на X топологию $o(X, Y)$ равномерной сходимости на интервалах из Y. Это есть нормальная топология на X (т. е. локально выпуклая топология, обладающая базисом из нормальных окрестностей нуля). В силу условия топология $o(X, Y)$ согласуется с двойственностью. Поэтому для выпуклого множества H $o(Y, Y) - \mathrm{cl}\, H = \sigma(X, Y) - \mathrm{cl}\, H$ [3, следствие 2, с. 87]. Остается заметить, что замыкание подструктуры в нормальной топологии есть опять подструктура.

Замечание. Утверждение предложения 1 может быть очевидным образом усилено. А именно, если H — выпуклая подструктура в X (не обязательно линейная), то $\sigma(X, Y) - \mathrm{cl}\, H$ — выпуклая подструктура в X.

Следствие 1. *Пусть X—K-пространство и H — линейная подструктура в X. Тогда*

(1) *$\sigma(X, \overline{X}) - \mathrm{cl}\, H$ есть линейная подструктура в X;*

(2) *$\sigma(X, \tilde{X}_c) - \mathrm{cl}\, H$ есть линейная подструктура в X;*

(3) *$\sigma(X, \tilde{X}) - \mathrm{cl}\, H$ есть линейная подструктура в X.*

Справедливость всех трех утверждений немедленно следует из предложения 1, поскольку для любого нормального подпространства Y в $\tilde{X}$ интервалы в Y $\sigma(Y, \overline{Y})$ компактны в силу известной теоремы Накано [4, th. 28. 11]. Тем более они компактны в топологии $\sigma(Y, X)$.

Следствие 2. *Пусть X—K-пространство и G — линейная подструктура в $\overline{X}$. Тогда $\sigma(\overline{X}, X)$ — $\mathrm{cl}\, G$ есть линейная подструктура в $\overline{X}$.*

Доказательство. Очевидно, можем считать, что $\overline{X}$ тотально на X. Так как при естественном вложении X в $\overline{\overline{X}}$ образ X является фундаментом в $\overline{\overline{X}}$ [1, теорема IX. 5.2], то дальше можем применить предложение 1, ибо $\sigma(X, \overline{X})$ компактность интервалов следует из упомянутой выше теоремы Накано.

Следствие 3. *Пусть X — KN-пространство с условием (A) и G — линейная подструктура в X^*. Тогда $\sigma(X^*, X)$ — $\mathrm{cl}\, G$ есть линейная подструктура в X^*.*

Условие (A) гарантирует, что X^* есть фундамент в $\overline{X}$ и, следовательно [1, лемма IX. 5.1], X есть (при естественном вложении) фундамент в $\overline{X^*}$. Далее применяем предложение 1.

3. Построение линейной подструктуры G в присоединенном K-пространстве $\tilde{X}$, $\sigma(\tilde{X}, X)$, замыкание которой не является подструктурой

Напомним, что бикомпакт (т. е. бикомпактное хаусдорфово пространство) Q называется экстремально несвязным, если замыкание всякого открытого подмножества из Q открыто.

Хорошо известно [1, с. 55, 142], что пространство $C(Q)$ (вещественных) непрерывных функций на бикомпакте Q является K-пространством тогда и только тогда, когда бикомпакт Q экстремально несвязен. В этом параграфе мы покажем, что при минимальных ограничениях на экстремально несвязный бикомпакт Q K-пространство $X = C(Q)$ таково, что в $\tilde{X}$ существует линейная подструктура G, $\sigma(\tilde{X}, X)$-замыкание которой не является подструктурой в $\tilde{X}$. (Более того, из теоремы 4 следует, что такую подструктуру G можно построить в $\tilde{X}$ для любого бесконечного экстремально несвязного бикомпакта Q).

Итак, пусть Q — некоторый бесконечный экстремально несвязный бикомпакт, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $Q = E \cup F$, $E \cap F = \varnothing$, где E, F непустые открыто-замкнутые подмножества в Q,

2) в Q существуют четыре направления точек $\{p_\alpha\}$, $\{q_\alpha\}$, $\{s_\alpha\}$, $\{t_\alpha\}$ с одним и тем же множеством индексов $A = \{\alpha\}$, такие, что

a) $p_\alpha \in E$; $p_\alpha \neq p_{\alpha'}$ при $\alpha \neq \alpha'$; $\lim\limits_\alpha p_\alpha = p \in E$, $p_\alpha \neq p$;

b) $q_\alpha \in E$; $q_\alpha \neq q_{\alpha'}$ при $\alpha \neq \alpha'$; $\lim\limits_\alpha q_\alpha = q \in E$, $q_\alpha \neq q$, $q_\alpha \neq p_{\alpha'}$ при всех α, α'; $q_\alpha \neq p$, $p_\alpha \neq q$; $p \neq q$.

c) $s_\alpha \in F$; $s_\alpha \neq s_{\alpha'}$ при $\alpha \neq \alpha'$; $\lim\limits_\alpha s_\alpha = s \in F$, $s_\alpha \neq s$.

d) $t_\alpha \in F$, $t_\alpha \neq t_{\alpha'}$; при $\alpha \neq \alpha'$; $\lim\limits_{\alpha} t_\alpha = s$; $t_\alpha \neq s$; $t_\alpha \neq s_{\alpha'}$ при всех α, α'.

Условимся для любой точки $r \in Q$ через δ_r обозначать функционал на K-пространстве $X = C(Q)$, действующий по формуле $\delta_r(x) = x(r)$ $(x \in X)$. Для каждого $\alpha \in A$ положим

$$\mu_\alpha = \delta_{p_\alpha} - \delta_{q_\alpha} + \delta_{s_\alpha} - \delta_{t_\alpha}.$$

Функционалы $\mu_\alpha \in \tilde{X}$ и, очевидно, имеем $\mu_\alpha \to \nu = \delta_p - \delta_q$, где стрелка означает (всюду в этом параграфе) сходимость функционалов в $\tilde{X}$ в топологии $\sigma(\tilde{X}, X)$. Имеем

$$\mu_\alpha^+ = \delta_{p_\alpha} + \delta_{s_\alpha}, \quad \mu_\alpha^- = \delta_{q_\alpha} + \delta_{t_\alpha}, \quad \nu^+ = \delta_p.$$

Пусть G есть линейная оболочка множества

$$\{\mu_\alpha^+, \ \mu_\alpha^-\} \ (\alpha \in A).$$

Теорема 2. *Построенное множество G есть линейная подструктура в $\tilde{X}$, притом такая, что ее замыкание в $\tilde{X}$ в топологии $\sigma(\tilde{X}, X)$ не есть подструктура в $\tilde{X}$.*

Доказательство. Из определения G следует, что элементы из G имеют вид

$$g = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu_{\alpha_i}^+ + \sum_{j=1}^{l} d_j \mu_{\alpha_j}^-, \tag{*}$$

где c_i, d_j — суть любые вещественные числа; k, l — суть любые натуральные числа; α_i, α_j — суть любые индексы из $A = \{\alpha\}$.

Из условий $a)$—$d)$ получаем, что для любого $g \in G$ вида $(*)$ справедливо соотношение

$$g^+ = \sum_{i=1}^{k} \max(c_i, 0) \mu_{\alpha_i}^+ + \sum_{j=1}^{l} \max(d_j, 0)\, \mu_{\alpha_j}^-.$$

Следовательно, $g^+ \in G$, а это и доказывает, что G есть линейная подструктура в $\tilde{X}$. По построению $\mu_\alpha \in G$ и $\mu_\alpha \to \nu$. Покажем, что функционал $\nu^+ = \delta_p$ не принадлежит $\sigma(\tilde{X}, X) - \mathrm{cl}\, G$.

Допустим, что направление

$$g_\gamma = \sum_{i=1}^{k_\gamma} c_i^{(\gamma)} \mu_{\alpha_i^{(\gamma)}}^+ + \sum_{j=1}^{l_\gamma} d_j^{(\gamma)} \mu_{\alpha_j^{(\gamma)}}^-$$

таково, что $g_\gamma \to \nu^+$. Тогда, взяв $x_1 \equiv 1$, получаем $g_\gamma(x_1) = 2\sum_i c_i^{(\gamma)} + 2\sum_j d_j^{(\gamma)} \to \nu^+(x_1) = 1$, Кроме того, взяв в качестве x_2 характеристическую функцию множества F, получаем $g_\gamma(x_2) = \sum_i c_i^{(\gamma)} + \sum_j d_j^{(\gamma)} \to \nu^+(x_2) = 0$. Полученное противоречие и показывает, что $\nu^+ \notin \sigma(\tilde{X}, X) - \mathrm{cl}\, G$.

Итак, G есть линейная подструктура в $\tilde{X}$, для которой $\sigma(\tilde{X}, X)$ — $\mathrm{cl}\, G$ не является подструктурой в $\tilde{X}$. Теорема доказана.

Как обычно символом m будем обозначать KN-пространство ограниченных (вещественных) числовых последовательностей с равномерной нормой. Хорошо известно, что пространство m можно отождествить с пространством $C(\beta N)$ всех непрерывных функций на экстремально несвязном бикомпакте βN-стоун-чеховской компактификации натурального ряда $N = \{1, 2, \ldots\}$.

Легко видеть, что бикомпакт βN удовлетворяет условиям 1) и 2), приведенным перед теоремой 2. Следовательно, пространство m таково, что в $\tilde{m}$ имеется линейная подструктура G и функционал $\nu \in \tilde{m}$ такие, что $\nu \in \sigma(\tilde{m}, m)$ — $\mathrm{cl}\, G$, но $\nu^+ \notin \sigma(\tilde{m}, m)$ — $\mathrm{cl}\, G$. Отметим также, что поскольку m есть банахово KN-пространство, то $\tilde{m} = m^*$; тем самым $\sigma(m^*, m)$ и $\sigma(\tilde{m}, m)$ обозначает одну и ту же топологию.

4. О слабом замыкании линейных подструктур, содержащихся в $\overline{X}$.

Как было показано в следствии 2 из предложения 1, для любой линейной подструктуры G в $\overline{X}$ $\sigma(\overline{X}, X)$ — $\mathrm{cl}\, G$ есть линейная подструктура в $\overline{X}$. Ниже мы этот результат усилим, показав, что для $G \subset \overline{X}$ подструктурой будет также замыкание G в $\tilde{X}$ в топологии $\sigma(\tilde{X}, X)$.

Лемма 1. (Г. Я. Лозановский). *Пусть X и Y—K-линеалы и T — линейный положительный оператор из X в Y, такой, что образ любого интервала из X является интервалом в Y, т. е. для любого $x \in X^+$. $T([0, x]) = [0, Tx]$. Тогда сопряженный оператор*[1] *T' есть структурный гомоморфизм из $\tilde{Y}$ в $\tilde{X}$, т. е. для любого $g \in \tilde{Y}$ $(T'g)^+ = T'(g^+)$.*

Доказательство. Используя формулу для подсчета положительной части оператора [1, с. 231], имеем для любого $g \in Y$ и для любого $x \in X^+$

$$(T'g)^+(x) = \sup_{0 \leqslant x_1 \leqslant x} (T'g)(x_1) = \sup_{0 \leqslant x_1 \leqslant x} g(Tx_1) =$$
$$= \sup_{0 \leqslant y \leqslant Tx} g(y) = g^+(Tx) = (T'g^+)(x).$$

Если E и F суть два нормированных пространства и T — линейный непрерывный оператор из E в F, то и в этом случае сопряженный оператор из F^* в E^* будем обозначать T'.

---

[1] Напомним, что сопряженный оператор $T'\colon \tilde{Y} \to \tilde{X}$ определяется обычным образом: для $g \in \tilde{Y}$ $(T'g)(x) = g(Tx)$ $(x \in X)$. Аналогично, второй сопряженный оператор T'' есть оператор из $\tilde{\tilde{X}}$ в $\tilde{\tilde{Y}}$.

Лемма 2. *Пусть E — нормированное пространство и F — линейное подпространство (не обязательно замкнутое) в E. Пусть φ и J обозначают соответственно оператор канонического вложения E в E^{**} и оператор вложения F в E. Тогда $J''(F^{**}) = \sigma(E^{**}, E^{*}) - \mathrm{cl}\,\varphi(F)$.*

Несложное доказательство этой леммы мы опускаем.

Лемма 3. *Пусть X KN — линеал, G — линейная подструктура в X. Пусть φ обозначает оператор канонического вложения X в X^{**}. Тогда $\sigma(X^{**}, X^{*}) - \mathrm{cl}\,\varphi(G)$ есть линейная подструктура в X^{**}.*

Доказательство. Обозначим через J оператор вложения G в X. Тогда сопряженный оператор J': $X^{*} \to G^{*}$ есть положительный оператор сужения функционалов из X^{*} на G. В силу теоремы Канторовича [2, теорема 1.11, с. 334], J' удовлетворяет условиям леммы 1. Поэтому оператор J'' есть структурный гомоморфизм из $\tilde{G^{*}}$ в $\tilde{X}^{*}$. Но $\tilde{G}^{*} = G^{**}$ и $\tilde{X}^{*} = X^{**}$. Следовательно, $J''(G^{**})$ есть линейная подструктура в X^{**}, а по лемме 2 $J''(G^{**})$ совпадает с $\sigma(X^{**}, X^{*}) - \mathrm{cl}\,\varphi(G)$.

Следствие. (Г. Я. Лозановский). *Пусть X — KN-линеал. Тогда второй аннулятор от X в X^{**}, совпадающий, как известно, с $\sigma(X^{**}, X^{*}) - \mathrm{cl}\,\varphi(X)$, есть линейная подструктура в X^{**}.*

Замечание. Доказательство леммы 3 по существу повторяет данное Г. Я. Лозановским доказательство следствия.

Напомним, что K-пространство Y называется рефлексивным по упорядочению (или рефлексивным по Накано), если $\overline{Y}$ тотально на Y и канонический образ Y в $\overline{\overline{Y}}$ есть все $\overline{\overline{Y}}$. Хорошо известно, что всякое K-пространство ограниченных элементов с достаточным множеством вполне линейных функционалов рефлексивно по Накано.

Лемма 4. *Пусть Y—K-пространство ограниченных элементов и G — линейная подструктура в $\overline{Y}$. Тогда замыкание G в $\tilde{Y}$ в топологии $\sigma(\tilde{Y}, Y)$ есть линейная подструктура в $\tilde{Y}$.*

Доказательство. Не умаляя общности, можем считать, что $\overline{Y}$ тотально на Y, ибо общий случай легко сводится к этому. Положим $X = \overline{Y}$. Тогда X есть KB-пространство с аддитивной нормой[1] и G — линейная подструктура в X. Обозначая через φ оператор канонического вложения X в X^{**}, в силу леммы 3 имеем, что $\sigma(X^{**}, X^{*}) - \mathrm{cl}\,\varphi(G)$ есть линейная подструктура в X^{**}. Остается заметить, что $X^{*} = \overline{X} = \overline{\overline{Y}} = Y$, так как Y рефлексивно по Накано. Тем самым $X^{**} = Y^{*} = \tilde{Y}$ и, следовательно, $\sigma(X^{**}, X^{*}) - \mathrm{cl}\,\varphi(G)$ есть не что иное как $\sigma(\tilde{Y}, Y) - \mathrm{cl}\,G$, что и завершает доказательство леммы.

---

[1] То, что X есть KB-пространство [1, стр. 207] с аддитивной нормой, для нас несущественно. Нам важно лишь, что в X выполняется условие (A) и, следовательно, $\overline{X} = \tilde{X} = X^{*}$.

Теорема 3. *Пусть X—K-пространство и G — линейная подструктура в $\bar{X}$. Тогда замыкание G в $\tilde{X}$ в топологии $\sigma(\tilde{X}, X)$ линейная подструктура.*

Доказательство. Пусть $f \in \tilde{X}$ есть $\sigma(\tilde{X}, X)$-предельная точка множества G. Докажем, что и f^+ есть $\sigma(\tilde{X}, X)$-предельная точка G. Возьмем произвольные $x_1, \ldots, x_n \in X$ и положим $V = \{h \in \tilde{X} : |h(x_i)| \leqslant 1 \ (i = 1, \ldots, n)\}$. Наша задача доказать, что $(V + f^+) \cap G \neq \varnothing$. Пусть $x = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ и через Y обозначим K-пространство ограниченных элементов, порожденное элементом x, т. е. $Y = \{x' \in X : \exists$ число $\lambda \geqslant 0, |x'| \leqslant \lambda x\}$.

Пусть R — оператор сужения функционалов из $\tilde{X}$ на Y. Ясно, что R есть алгебраический и структурный гомоморфизм $\tilde{X}$ на нормальное подпространство $R(\tilde{X})$ в $\tilde{Y}$. Так как G — линейная подструктура в $\bar{X}$, то, очевидно, $R(G)$ есть линейная подструктура в $\bar{Y}$ и Rf есть $\sigma(\tilde{Y}, Y)$-предельная точка для $R(G)$. Пусть $W = \{h \in \tilde{Y} : |h(x_i)| \leqslant 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$. Это $\sigma(\tilde{Y}, Y)$окрестность нуля в $\tilde{Y}$. В силу леммы 4, $G_1 = \sigma(\tilde{Y}, Y) - \mathrm{cl}\,(R(G))$ есть линейная подструктура в $\tilde{Y}$ и по предположению $Rf \in G_1$. Поэтому $(Rf)^+ = R(f^+)$ тоже принадлежит G_1. Следовательно, существует элемент $g \in G$, такой, что $Rg \in (W + R(f^+)) \cap R(G)$. Отсюда $g \in (V + f^+) \cap G$, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Очевидно, что следствие 2 предложения 1 немедленно вытекает из теоремы 3.

Следствие. *Пусть X—K-линеал и φ — оператор канонического вложения X в $\tilde{\tilde{X}}$. Пусть G — линейная подструктура в X. Тогда $\sigma(\tilde{\tilde{X}}, \tilde{X}) - \mathrm{cl}\,\varphi(G)$ есть линейная подструктура в $\tilde{\tilde{X}}$*

Доказательство. Хорошо известно, что при каноническом вложении X в $\tilde{\tilde{X}}$ образ $\varphi(X)$ фактически содержится в $\bar{\tilde{X}}$. Следовательно, $\varphi(G)$ есть линейная подструктура в $\bar{\tilde{X}}$ и можем применить предыдущую теорему.

Замечание 1. Приведенное следствие довольно близко к утверждению леммы 3. Однако автору не известно доказательство следствия (без привлечения теоремы 3) аналогично тому, как доказывается лемма 3 с помощью леммы 2.

Замечание 2. На случай K_σ-пространств теорема 3 не распространяется. Более точно: можно привести пример K_σ-пространства X и линейной подструктуры G в $\bar{X}$, таких, что

а) $\sigma(\tilde{X}, X) - \mathrm{cl}\, G$ не есть подструктура в $\tilde{X}$;

б) $\sigma(\tilde{X}_c, X) - \mathrm{cl}\, G$ не есть подструктура в $\tilde{X}_c$.

Оставшаяся часть параграфа будет посвящена доказательству результата, по существу обратного к следствию 3 предложения 1 (см. теорему 4).

Пусть X интервально полное[1] $K_\sigma N$-пространство, в котором не выполнено условие (А) (см. *1*). Тогда в X содержится линейное подпространство Y, изоморфное (линейно, топологически и структурно) пространству m [5, теорема 1]. Отсюда вытекает, что существует положительный проектор P $K_\sigma N$-пространства X на Y [6, теорема 1]. Более того, используя построенную в [5] подструктуру Y и оператор проектирования из [6], нетрудно доказать, что если в интервально полном $K_\sigma N$-пространстве X не выполнено условие (А), то в X существует линейное подпространство Y, изоморфное (линейно, топологически и структурно) пространству m, и такое, что существует положительный (непрерывный) линейный проектор P X на Y, обладающий следующим свойством: образом порядкового интервала из X является порядковый интервал в Y.

Таким образом, оператор P удовлетворяет условиям леммы 1.

Теорема 4. *Пусть X — интервально полное $K_\sigma N$-пространство. Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) *в X выполнено условие* (А);

2) *для любой линейной подструктуры G в X^* ее замыкание в X^* в топологии $\sigma(X^*, X)$ есть линейная подструктура.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Если в $K_\sigma N$-пространстве X выполнено условие (A), то X есть KN-пространство [1, с. 207, пункт б) и теорема VI. 2. 1] и можем применить следствие 3 предложения 1.

2) $\Rightarrow$ 1) Допустим, что в X не выполнено условие (А). Тогда в X есть подпространство Y и проектор P X на Y, о которых шла речь перед теоремой 4. Пусть T — соответствующий изоморфизм пространства m на Y. Обозначим через R оператор сужения функционалов из X^* на Y. Тогда R — положительный оператор $X^* \to Y^*$.

Рассмотрим положительный оператор $S = T^{-1}P : X \overset{\text{на}}{\to} m$. Следовательно, сопряженный оператор $S' : m^* \to X^*$. Так как P переводит интервалы из X в интервалы в Y и так как T изоморфизм m на Y, то оператор S удовлетворяет условиям леммы 1. Следовательно, по лемме 1 S' есть структурный гомоморфизм m^* в X^*. Пусть G — линейная подструктура в m^*, о которой шла речь после теоремы 2, и пусть ν тот функционал из m^*, для которого $\nu \in \sigma(m^*, m) - \mathrm{cl}\, G$, но $\nu^+ \notin \sigma(m^*, m) - \mathrm{cl}\, G$.

В силу сказанного выше, $G_1 = S'G$ есть линейная подструктура в X^*. Покажем, что а) $S'\nu \in \sigma(X^*, X) - \mathrm{cl}\, G_1$, но б) $(S'\nu)^+ = S'\nu^+ \notin \sigma(X^*, X) - \mathrm{cl}\, G_1$, чем и докажем теорему, получив противоречие с условием 2).

Так как S есть непрерывное отображение X на m, то S' есть $\sigma(m^*, m) - \sigma(X^* X)$ непрерывное отображение m^* в X^*, откуда

[1] KN-линеал называется *интервально полным*, если всякая порядково ограниченная фундаментальная по норме последовательность имеет предел. В частности, всякий банахов KN-линеал интервально полон.

дует а). Будем доказывать б). Допустим противное, что в G существует направление $\{g_\gamma\}$, такое, что $S'g_\gamma \to S'\nu^+$ $\sigma(X^*, X)$. Тогда очевидно имеем $R(S'g_\gamma) \to R(S'\nu^+)$ $\sigma(Y^*, Y)$. Так как изоморфизм m на Y, то T' слабый* изоморфизм Y^* на m^* [теорема 4.7.7] и, следовательно, $(T'RS')(g_\gamma) \to (T'RS')(\nu^+)$ $\sigma(m^*, m)$. Покажем, наконец, что $T'RS'g = g$ $\forall g \in m^*$ откуда будет следовать, что $G \ni g_\gamma \to \nu^+$ $\sigma(m^*, m)$ вопреки условию. Зафиксируем произвольный $g \in m^*$. Тогда $\forall z \in m$ имеем

$$(T'RS'g)(z) = (RS'g)(Tz) = (S'g)(Tz) =$$
$$= g(STz) = g(T^{-1}PTz) = g(z),$$

так как $T^{-1}PTz = z$, ибо $Tz \in Y$; т. е. действительно $T'RS'g = g$.

Итак, допущение, что в X не выполнено условие (А), приведено к противоречию. Теорема доказана.

Замечание. Подчеркнем, что в условии 2) теоремы 4 речь идет о топологии $\sigma(X^*, X)$ и подструктурах из X^*. Заменить их на $\sigma(\tilde{X}, X)$ и $\tilde{X}$ соответственно без всяких ограничений нельзя. В случае же, когда X — банахово пространство, это, очевидно, возможно, поскольку тогда $\tilde{X} = X^*$.

В заключение отметим следующее. Пусть X—K-линеал и G — линейная подструктура в $\tilde{X}$. Положим $G_1 = \sigma(\tilde{X}, X) - \mathrm{cl}\, G$ и $C = \sigma(\tilde{X}, X) - \mathrm{cl}\,(G^+)$. На первый взгляд представляется возможным, что вопрос о том, является ли G_1 подструктурой в $\tilde{X}$, связан с выполнением соотношения $G_1^+ = C$, где $G_1^+ = \{g \in G_1\colon g \geqslant 0\}$. Однако это не так; можно привести пример X и G таких, что G_1 является подструктурой, но $G_1^+ \neq C$. Также можно привести пример X и G таких, что G_1 не является подструктурой, хотя $G_1^+ = C$.

Пользуюсь случаем поблагодарить профессора Б. З. Вулиха, прочитавшего работу и указавшего мне на ряд неточностей в первоначальном варианте, и профессора А. И. Векслера за полезные замечания, сделанные при подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., «Наука», 1961. 407 с.
2. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М., «Наука», 1950. 546. с.
3. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М., «Наука», 1971. 359 с.
4. Nakano H. Modulared semi—ordered linear spaces. Tokyo, 1950. 288 p.
5. Лозановский Г. Я., Меклер А. А. Вполне линейные функционалы и рефлексивность в нормированных линейных структурах. — «Изв. вузов», 1967, № 11, с. 47—53.
6. Абрамович Ю. А. Инъективные оболочки нормированных структур.— «Докл. АН СССР», 1971, 197, № 4, с. 743—745.