УДК 513.88

Г. Я. Лозановский, **канд. физ.-мат. наук**

О ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ В ВЕКТОРНЫХ СТРУКТУРАХ

Хорошо известно, что сопряженное пространство X^* к банахову функциональному пространству X разлагается в прямую сумму пространств $\overline{X}$ и $\overline{X}^d$, где $\overline{X}$ есть пространство всех вполне линейных функционалов (т. е. функционалов, допускающих интегральное представление такого же типа как функционалы в L^p при $1 < p < \infty$), а $\overline{X}^d$ (т. е. дизъюнктное дополнение к $\overline{X}$ в X^*) совпадает с пространством всех анормальных функционалов на X.

Настоящая работа посвящена в основном изучению пространства $\overline{X}^d$ для произвольной архимедовой векторной структуры X и для двух важных классов банаховых функциональных пространств — пространств Марцинкевича $M(\psi)$ и пространств $L^{(p,q)}$ со смешанной нормой. В § 1 изучаются два специальных класса функционалов — локализованные функционалы и (связанные с ними) функционалы счетного типа. Показано (§ 2, теорема 1), что в важнейших случаях анормальный функционал счетного типа локализован.

С помощью установленных свойств локализованных функционалов удается доказать отсутствие проекторов из довольно большого класса банаховых функциональных пространств на некоторые их нормальные подпространства (§ 3, теоремы 2, 3; § 5, теорема 6). Например (§ 5, теорема 6), при $1 \leqslant p < \infty$ не существует проектора из $L^{(p, \infty)}$ на $L_0^{(p, \infty)}$, где $L_0^{(p, \infty)}$ — замыкание в $L^{(p, \infty)}$ множества всех ограниченных функций из $L^{(p, \infty)}$. Для случая $X = M(\psi)$ и $X = L^{(p, q)}$ получены полные ответы на следующие вопросы: при каких условиях X^* есть KB-пространство, пространство счетного типа, когда X^* содержит нелокализованные анормальные функционалы (§ 4, теорема 4; § 5, теорема 5). Например, $M(\psi)^*$ есть KB-пространство при $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$ и не является даже пространством счетного типа при $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$. Главные результаты работы суть теоремы 1—6.

§ 1. Терминология и обозначения

Через N обозначается множество всех натуральных чисел. Сопряженное к нормированному пространству X обозначается через X^*. Проектором из нормированного пространства X на его подпространство Y называется линейный непрерывный оператор из X на Y, оставляющий элементы из Y на месте. В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы в основном следуем [1]. K-линеалом (K-пространством, K_σ-пространством) называется (условно полная, условно σ-полная) линейная структура. Элементы x, y K-линеала X называются дизъюнктными (обозначение: xdy), если $|x| \wedge |y| = 0$. Дизъюнктным дополнением множества $H \subset X$ называется множество $H^d = \{x \in X : xdy$ для всех $y \in H\}$. Множество $H \subset X$ называется компонентой, если $H = H^{dd}$. Через $E(X)$ обозначается булева алгебра всех компонент K-линеала X.

Нормальным подлинеалом K-линеала X называется такое его линейное подмножество Y, что из $x \in X$, $y \in Y$, $|x| \leqslant |y|$ следует $x \in Y$. Если вдобавок $Y^d = \{0\}$, то Y называется фундаментом в X. Элемент x K-линеала X будем называть элементом счетного типа, если любое множество ненулевых, попарно дизъюнктных, положительных и не превосходящих $|x|$ элементов из X не более чем счетно. K-линеалом счетного типа называется K-линеал, все элементы которого счетного типа (см. также [1, с. 173]).

Если X — K-линеал, то $\tilde{X}$ ($\bar{X}$) есть пространство всех регулярных (вполне линейных) функционалов на X. Функционал $f \in \tilde{X}$ будем называть функционалом счетного типа, если f счетного типа как элемент K-пространства $\tilde{X}$. KN-линеалом (KB-линеалом) называется K-линеал X, одновременно являющийся нормированным (банаховым) пространством, в котором из $|x| \leqslant |y|$ следует $\|x\| \leqslant$

$\| y \|$. Напомним, что для любого KB-линеала X справедливо $X^* = \tilde{X}$. KN-пространством ($K_\sigma N$-пространством) называется KN-линеал, являющийся K-пространством (K_σ-пространством). KB-пространством называется $K_\sigma N$-пространство X, в котором выполнены следующие два условия [1, с. 207]:

$$(A) \text{ если } x_n \downarrow 0 \ (n \in N), \qquad \text{то } \|x_n\| \to 0;$$
$$(B) \text{ если } 0 \leqslant x_n \uparrow (n \in N) \qquad \text{и } \sup \|x_n\| < \infty,$$

то существует $\sup x_n \in X$.

Напомним, что KB-линеал является KB-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон как банахово пространство (теорема Огасавара).

§ 2. О локализованных функционалах и функционалах счетного типа

Всюду в этом параграфе X есть произвольный архимедов K-линеал, удовлетворяющий там, где это указано, дополнительным ограничениям. Напомним, что функционал $f \in \tilde{X}$ называется анормальным, если существует такой фундамент Φ в X, что сужение $f|_\Phi = 0$. Совокупность $\tilde{X}_{an}$ всех анормальных функционалов на X есть фундамент в $\overline{X}^d$, но, вообще говоря, $\tilde{X}_{an} \neq \overline{X}^d$ ($\overline{X}^d$ есть дизъюнктное дополнение множества $\overline{X}$ в $\tilde{X}$).

Однако равенство $\tilde{X}_{an} = \tilde{X}^d$ имеет место, например, в том важнейшем частном случае, когда существует фундамент Y в X, такой, что $\overline{Y}$ тотально на Y. Если X есть KN-линеал, то полагаем $X^*_{an} = X^* \cap \tilde{X}_{an}$.

Определение 1. *Функционал $f \in \tilde{X}$ будем называть локализованным, если в булевой алгебре $E(X)$ существует идеал $Z(f)$, удовлетворяющий условиям:*

(а) *сужение $f|_K = 0$ для любой $K \in Z(f)$;*

(б) *$Z(f)$ плотен в $E(X)$, т. е. если $K \in E(X)$, $K \neq \{0\}$, то существует $K_1 \in Z(f)$, такая, что $K \cap K_1 \neq \{0\}$.*

Совокупность всех локализованных функционалов на X будем обозначать через $\tilde{X}_{loc}$. Если X есть KN-линеал, то полагаем $X^*_{loc} = X^* \cap \tilde{X}_{loc}$.

Замечание. Если X есть K-пространство и $f \in \tilde{X}$, то множество $\{K \in E(X) : f|_K = 0\}$ есть идеал в $E(X)$. Поэтому $f \in \tilde{X}_{loc}$ тогда и только тогда, когда указанный идеал плотен в $E(X)$.

Лемма 1. *Пусть Y есть K-пополнение X, $F \in \tilde{Y}_+$, $f = F|_X$. Тогда*

(а) *если $F \in \tilde{Y}_{loc}$, то и $f \in \tilde{X}_{loc}$;*

(б) *если f счетного типа, то и F счетного типа.*

Несложное доказательство леммы 1 опускаем.

Предложение 1. $\tilde{X}_{\text{loc}}$ *есть фундамент в* $\tilde{X}_{an}$.

Доказательство. Очевидно, $\tilde{X}_{\text{loc}}$ есть нормальное подпространство в $\tilde{X}_{an}$. Возьмем произвольный $f \in \tilde{X}_{an}$, $f > 0$ и покажем, что существует $g \in \tilde{X}_{\text{loc}}$, такой, что $0 < g \leqslant f$. Пусть сначала X есть K-пространство. По условию существует фундамент Φ в X, такой, что $f|_{\Phi} = 0$. Фиксируем $u \in X_+$ такой, что $f(u) > 0$. Положим $H = \{h : h \wedge (u - h) = 0, \ u - h \in \Phi\}$. Ясно, что $\inf H = 0$. Положим $g(x) = \inf\{f((h)x) : h \in H\}$ для $x \in X_+$ и $g(x) = g(x_+) - g(x_-)$ для любого $x \in X$. Ясно, что $g(u) > 0$ и что $g \in \tilde{X}_{\text{loc}}$. Общий случай. Пусть Y есть K-пополнение X. Тогда существует $F \in \tilde{Y}_+$ такой, что $F|_X = f$. Ясно, что $F \in \tilde{Y}_{an}$, поэтому по уже доказанному существует $G \in \tilde{Y}_{\text{loc}}$ такой, что $0 < G \leqslant F$. Остается положить $g = G|_X$ и воспользоваться леммой 1. Предложение 1 доказано.

Замечание. Вообще говоря, $\tilde{X}_{\text{loc}} \neq \tilde{X}_{an}$.

Предложение 2. *Пусть X есть K-пространство, в котором существует фундамент Φ с тотальным $\overline{\Phi}$. Если $f_n \in \tilde{X}_{\text{loc}}\ (n \in N)$ и $0 \leqslant f_n \uparrow f \in \tilde{X}$, то $f \in \tilde{X}_{\text{loc}}$. Таким образом, в этом случае $\tilde{X}_{\text{loc}}$ есть σ-замкнутый фундамент в $\tilde{X}_{an}$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что для любой $K \in E(X)$, $K \neq \{0\}$ существует $P \in E(X)$, такая, что $P \neq \{0\}$, $P \subset K$ и $f|_P = 0$. Можно считать, что K счетного типа и с единицей. Для каждого $n \in N$ построим последовательность $P_k^n \in E(X)$ $(k \in N)$, полную в K и такую, что $P_k^n \subset P_{k+1}^n \subset K$ и $f_n|_{P_k^n} = 0 \quad (k \in N)$. В силу теоремы о диагональной последовательности [1, с. 180] существует последовательность индексов $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$, такая, что $P = \bigcap_{n=m}^{\infty} P_{k_n}^n \neq \{0\}$ для достаточно больших m. Остается заметить, что $P \in E(X)$, $P \subset K$ и $f|_P = 0$. Предложение 2 доказано.

Мы далее установим связь между локализованными функционалами и функционалами счетного типа. Предварительно докажем следующие два предложения, имеющие и самостоятельный интерес.

Предложение 3. *Пусть по-прежнему X — архимедов K-линеал, $f \in \tilde{X}_+$. Следующие два утверждающие эквивалентны:*

(а) *f-счетного типа;*

(б) существуют $u_n \in X_+ (n \in N)$, такие, что $u_n \uparrow$ и $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x \wedge nu_n)$ для любого $x \in X_+$.

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б). Для каждого $v \in X_+$ положим $f_v(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_+ \wedge nv) - \lim\limits_{n \to \infty} f(x_- \wedge nv)$, $x \in X$. Ясно, что $f_v \in \tilde{X}_+$ и $\sup\{f_v : v \in X_+\} = f$. Так как f счетного типа, то существует последовательность $v_n \in X_+ (n \in N)$, такая, что $\sup\{f_{v_n} : n \in N\} = f$. Остается положить $u_n = v_1 + \ldots + v_n \; (n \in N)$.

Докажем (б)$\Rightarrow$(а). Для $m \in N$ положим $f_m(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_+ \wedge nu_m) - \lim\limits_{n \to \infty} f(x_- \wedge nu_m)$. Ясно, что $f_m \in \tilde{X}_+$ и $f_m \uparrow f$. Поэтому достаточно доказать, что f_m — счетного типа $(m \in N)$. Заметим, что если $g \in \tilde{X}_+$, $g \leqslant f_m$, $g(u_m) = 0$, то $g = 0$. Пусть теперь $g_t \in \tilde{X}_+ (t \in T)$ попарно дизъюнктны и $0 < g_t \leqslant f_m$. Тогда очевидно $\sum\limits_{t \in T} g_t(u_m) \leqslant f_m(u_m)$, поэтому T не более чем счетно. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Пусть X — KB-линеал, $f \in \tilde{X}_+$. Следующие два утверждения эквивалентны:*

(а) *f — счетного типа;*

(б) *существует $u \in X_+$, такое, что $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x \wedge nu)$ для любого $x \in X_+$.*

Доказательство. Справедливость (б)$\Rightarrow$(а) прямо следует из предложения 3. Для доказательства (а)$\Rightarrow$(б) достаточно применить предложение 3 и положить $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$, где числа $\alpha_n > 0$ таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \| u_n \| < \infty$. Предложение 4 доказано.

***Лемма* 2.** *Пусть X — K-пространство, в котором существует фундамент Φ с тотальным $\bar{\Phi}$. Пусть $f \in \tilde{X}_{an}$ и f счетного типа. Тогда $f \in \tilde{X}_{\mathrm{loc}}$.*

Доказательство. Можно считать, что $f \geqslant 0$. В силу предложения 1 $f = \sup\{g : 0 \leqslant g \leqslant f, \; g \in \tilde{X}_{\mathrm{loc}}\}$. Так как f счетного типа, то существует счетное множество $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, такое, что $0 \leqslant g_n \uparrow f$ и $g_n \in \tilde{X}_{\mathrm{loc}} (n \in N)$. Остается применить предложение 2. Лемма доказана.

***Лемма* 3.** *Пусть X — банахово KN-пространство, $f \in \tilde{X}_{an}$ и f счетного типа. Тогда $f \in \tilde{X}_{\mathrm{loc}}$.*

Доказательство. Можно считать, что $f \geqslant 0$. Достаточно убедиться, что для любой $K \in E(X)$, $K \neq \{0\}$ существует $P \in E(X)$, $P \neq \{0\}$, такая, что $P \subset K$ и $f|_P = 0$. Пусть $u \in X_+$ из предложения 4, Φ — фундамент в X, такой, что $f|_\Phi = 0$. Если $u d K$, то $f|_K = 0$ и можно принять $P = K$. В противном случае существует $h \in \Phi$, такой, что $0 < h \in K$, $(u - h) \wedge h = 0$, и за P можно принять главную компоненту в X порожденную h. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть X есть архимедов K-линеал, в котором имеется фундамент Φ с тотальным $\bar{\Phi}$, или же X есть KB-линеал. Если $f \in \tilde{X}_{an}$ и f счетного типа, то $f \in \tilde{X}_{\mathrm{loc}}$.*

Доказательство. Можно считать, что $f \geqslant 0$. Пусть Y есть K-пополнение X и $F \in \widetilde{Y}_+$ таков, что $F|_X = f$. В силу леммы 1 достаточно показать, что $F \in \widetilde{Y}_{\mathrm{loc}}$. Но по той же лемме 1 F счетного типа. Напомним, что K-пополнение KB-линеала при естественном распространении нормы (b) — полно [2]. Теперь требуемое легко следует из лемм 2 и 3. Теорема 1 доказана.

Замечание. Нетрудно привести пример архимедова K-линеала X и функционала $f \in \widetilde{X}_{an}$ счетного типа, такого, что $f \in \widetilde{X}_{\mathrm{loc}}$. Кроме того, нетрудно привести пример локализованного функционала, не являющегося функционалом счетного типа.

В заключение этого параграфа остановимся на одном важном специальном классе функционалов счетного типа — дискретных функционалах. Напомним, что элемент x K-линеала X называется дискретным [1, с. 88], если не существует дизъюнктных между собой элементов $y > 0$ и $z > 0$ таких, что $y \leqslant |x|$ и $z \leqslant |x|$. K-пространство X называется дискретным, если каждый элемент из X есть соединение дискретных элементов. Пусть теперь X — K-линеал, $f \in \widetilde{X}_+$. Хорошо известно, что f является дискретным элементом K-пространства $\widetilde{X}$ тогда и только тогда, когда $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ при всех $x, y \in X$. Из результатов Т. Андо [3] и несложных рассуждений следует, например, что на каждом несепарабельном пространстве Орлича на $[0, 1]$ имеется в определенном смысле «много» дискретных функционалов.

Предложение 5. *Для любого банахова $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *X^* — дискретно;*

(б) *в X выполнено условие (А) из определения KB-пространства и X дискретно.*

Предложение 6. *Для любого банахова $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *в X^* нет ненулевых дискретных элементов;*

(б) *для любых $x \in X_+$ и числа $\varepsilon > 0$ найдутся попарно дизъюнктные $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X_+$, такие, что $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ и $\|x_k\| \leqslant \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.*

Несложные доказательства предложений 5 и 6 опускаем.

§ 3. Некоторые приложения

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с вполне конечной неотрицательной счетно аддитивной мерой, $S = S(T, \Sigma, \mu)$ — линеал всех конечных вещественных измеримых функций на нем, причем эквивалентные по мере μ множества и функции отождествляются. Если $E \subset T$, χ_E означает характеристическую функцию E. Для $x \in S$ полагаем $\operatorname{supp} x = \{t \in T : x(t) \neq 0\}$.

Банаховым функциональным пространством (б. ф. п) на (T, Σ, μ) называется банахово пространство X, являющееся линейным подмножеством в S, причем, если $x \in X$, $y \in S$ и $|y| \leqslant |x|$, то $y \in X$ и $\|y\| \leqslant \|x\|$. Будем всегда считать, что носитель X есть все множество T, т. е. если $E \in \Sigma$, $\mu E > 0$, то существует $F \in \Sigma$, $\mu F > 0$, такое, что $F \subset E$ и $\chi_F \in X$.

Дуальным пространством к X называется б. ф. п. X', состоящее из всех $x' \in S$, таких, что

$$\| x' \|_{X'} = \sup \left\{ \int_T | xx' | d\mu : x \in X, \ \| x \|_X \leqslant 1 \right\} < \infty.$$

Напомним, что $f \in X^*$ вполне линеен тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$f(x) = \int_T xy d\mu, \quad x \in X,$$

где $y \in X'$.

Напомним также, что в этом случае $\overline{X^d}$ состоит в точности из анормальных функционалов, т. е., что каждый $f \in X^*$ однозначно представим в виде $f = f_1 + f_2$, где f_1 — вполне линейный, а f_2 — анормальный функционал. Кроме того, $\tilde{X} = X^*$. Для $f \in X^*$ и $E \in \Sigma$ полагаем

$$f_E(x) = f(x\chi_E), \ x \in X.$$

Ясно, что $f_E \in X^*$.

Следующая лемма прямо следует из определений.

Лемма 4. *Пусть $f \in X^*_+$. Тогда*

(а) $f \in X^*_{an}$ *тогда и только тогда, когда для любого* $E \in \Sigma$, $\mu E > 0$ *существует* $F \in \Sigma$, $\mu F > 0$, *такое, что* $F \subset E$, $\chi_F \in X$ и $f(\chi_F) = 0$;

(б) $f \in X^*_{loc}$ *тогда и только тогда, когда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует* $E \in \Sigma$ *такое, что* $f = f_E$ и $\mu E < \varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть* (T, Σ, μ) *есть отрезок* $[0, 1]$ *с мерой Лебега*[1], *X и Y суть б. ф. п. на* $[0, 1]$, *причем Y есть замкнутое подпространство в X. Пусть выполнены следующие два условия:*

(а) $X^*_{an} = X^*_{loc}$;

(б) *для любого* $E \in \Sigma$, $\mu E > 0$ *существует* $x \in X$, *такой, что* $\operatorname{supp} x \subset E$ *и* $x \notin Y$.

Тогда не существует проектора из X на Y.

Доказательство. Воспользуемся одной идеей А. Пелчиньского и В. Н. Судакова [4]. Допустим противное. Тогда фактор-пространство X/Y изоморфно некоторому подпространству пространства X, следовательно, на X/Y существует счетное тотальное множество $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейных непрерывных функционалов. Пусть $\pi : X \to X/Y$ есть канонический гомоморфизм. Положим $f_n = \varphi_n \circ \pi$ и $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |f_n|$, где числа $\alpha_n > 0$ таковы, что $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \| f_n \|_{X^*} < \infty$.

---

[1] Или любое пространство с конечной, сепарабельной, безатомной мерой.

Ясно, что $f|_Y = 0$, но для любого $E \in \Sigma$, $\mu E > 0$ справедливо $f|_E \neq 0$. Таким образом, f — анормальный, но не локализованный. Противоречие. Теорема 2 доказана.

Замечание. В предположении справедливости континуум-гипотезы можно с помощью соответствующего примера показать, что условие а) в формулировке теоремы 1 существенно для справедливости теоремы.

Полученный результат можно применить, например, к пространствам Орлича.

Теорема 3. *Пусть W есть несепарабельное пространство Орлича на* [0, 1]. *X и Y суть его замкнутые подпространства, являющиеся симметричными пространствами*[1] *на* [0, 1], *причём $Y \subset X$, $Y \neq X$. Тогда не существует проектора из X на Y.*

Доказательство. Из результатов Т. Андо [3] следует, что W есть пространство счетного типа. Ясно, что тогда и X^* счетного типа, и можно применить теоремы 1 и 2. Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, что в формулировке теоремы 3 за W можно взять не только несепарабельное пространство Орлича, но любое несепарабельное симметричное пространство на [0, 1], такое, что W^* - счетного типа, или хотя бы $W^*_{an} = W^*_{loc}$.

§ 4. О пространствах Марцинкевича

Всюду в этом параграфе ψ есть неубывающая, непрерывная, вогнутая на [0, 1] функция, такая, что $\psi(0) = 0$,

$$\psi(t) > 0 \text{ при } t > 0 \text{ и } \lim_{t \to 0} \frac{t}{\psi(t)} = 0.$$

Полагаем далее $R(\psi) = \lim\limits_{n \to \infty} \inf\limits_{0 < t \leqslant 1} \dfrac{\psi(t)}{\psi\left(\frac{t}{n}\right)}$. Очевидно, что $R(\psi) \geqslant 1$.

Лемма 5.

(а) *Если* $\underline{\lim\limits_{t \to 0}} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$, *то* $R(\psi) = 1$;

(б) *если* $\underline{\lim\limits_{t \to 0}} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$, *то* $R(\psi) = \infty$, *и если ψ строго возрастает, то* $\inf\limits_{0 < t \leqslant 1} \dfrac{\psi(t)}{\psi\left(\frac{t}{n}\right)} > 1$ при всех $n \geqslant 2$, $n \in N$.

Несложное доказательство леммы 5 опускаем.

Всюду в этом параграфе (T, Σ, μ) есть отрезок [0, 1] с мерой Лебега.

[1] Определение симметричных пространств см. в [5].

Через $M(\psi)$ как обычно обозначается б. ф. п., состоящее из всех $x \in S$, таких, что

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{0<h\leqslant 1} \frac{\int\limits_0^h x^*(t)\,dt}{\psi(h)} < \infty,$$

где x^* есть невозрастающая перестановка функции $|x|$.

Следующая теорема показывает, в частности, что (в предположении справедливости континуум-гипотезы) при $\varliminf\limits_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$ в пространстве $M(\psi)$ существуют нелокализованные анормальные функционалы, но все анормальные функционалы локализованы при $\varliminf\limits_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$.

Теорема 4.

1. *Пусть* $\varliminf\limits_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$. *Тогда* $M(\psi)^*$ *есть* KB*-пространство*[1] *и потому для любого анормального функционала* $f \in M(\psi)^*$ *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует* $E \in \Sigma$ *такое, что* $\mu E < \varepsilon$ и $f = f_E$.

2. *Пусть* $\varliminf\limits_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$. *Тогда* $M(\psi)^*$ *есть* K*-пространство несчетного типа и* (в предположении справедливости континуум-гипотезы) *существует анормальный функционал* $f \in M(\psi)^*_+$, такой, что

(а) *если* $E \in \Sigma$, $\mu E > 0$, *то* $\|f_E\|_{M(\psi)^*} = 1$;

(б) $f(x) = 0$ *для любого* $x \in L^\infty[0, 1]$.

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству этой теоремы, которое мы разобьем на ряд этапов.

1. Докажем сначала утверждение 1. При этом можно считать, что ψ строго возрастает на $[0, 1]$. Напомним, что KN-линеал X называется квазиравномерно выпуклым [6, с. 355], если существует такое число $\eta > 0$, что для любых дизъюнктных $x_1, x_2 \in X_+$ с $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ справедливо $\|x_1 + x_2\| \leqslant 2 - \eta$. Известно, что для квазиравномерно выпуклого KN-линеала X пространство X^* является KB-пространством. Простые вычисления показывают, что для любых дизъюнктных $x_1, x_2 \in M(\psi)_+$ с $\|x_1\|_{M(\psi)} = \|x_2\|_{M(\psi)} = 1$ справедливо

$$\|x_1 + x_2\|_{M(\psi)} \leqslant \frac{2}{\inf\limits_{0<t\leqslant 1} \frac{\psi(t)}{\psi\left(\frac{t}{2}\right)}}.$$

[1] Напомним, что всякое KB-пространство есть K-пространство счетного типа.

Поэтому в силу леммы 5 $M(\psi)$ квазиравномерно выпукло, следовательно, $M(\psi)^*$ есть KB-пространство. Остается применить теорему 1 и лемму 4. Утверждение 1 доказано.

2) Пусть теперь $\varliminf_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$ и поэтому $R(\psi) = 1$. Зафиксируем числовую последовательность a_n, такую, что

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n} \ (n \in N) \ \text{и} \ \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)} = 1.$$

3) Положим для почти всех $t \in [0, 1]$ $\varphi(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$. Ясно, что $\varphi \in M(\psi)$, причем $\|\varphi\chi_{[0,\varepsilon]}\|_{M(\psi)} = 1$ для всех $\varepsilon \in (0, 1]$.

4) Обозначим через Z множество всех $x \in M(\psi)_+$, таких, что для некоторого $\varepsilon \in (0, 1]$ (зависящего от x) функции x и $\varphi\chi_{[0,\varepsilon]}$ равноизмеримы.

5) Напомним, что Σ есть совокупность всех измеримых подмножеств отрезка $[0, 1]$, причем эквивалентные множества отождествляются. Через Δ будем обозначать класс всех множеств нулевой меры. Зафиксируем какое-нибудь $\Sigma_0 \subset \Sigma$ такое, что $\Delta \notin \Sigma_0$ и мощность множества Σ_0 есть первое несчетное кардинальное число. В предположении справедливости континуум гипотезы можно принять $\Sigma_0 = \Sigma \setminus \{\Delta\}$. Для доказательства теоремы достаточно установить существование такого $f \in M(\psi)^*_+$, что $f(x) = 0$ для любого $x \in L^\infty[0, 1]$, $\|f_E\|_{M(\psi)^*} = 1$ для любого $E \in \Sigma_0$ и f представим в виде

$$f(x) = \sum_{E \in \Sigma_0} f^E(x), \ x \in M(\psi),$$

где $0 < f^E \in M(\psi)^*$ и $f^{E_1} \wedge f^{E_2} = 0$ при $E_1 \neq E_2$ из Σ_0.

6) **Лемма 6.** *Существует отображение* $\Sigma_0 \ni E \to z^E \in Z$, *такое, что*

(а) *если* $E_1, E_2 \in \Sigma_0$ и $E_1 \neq E_2$, *то* $z^{E_1} \wedge z^{E_2} \in L^\infty[0, 1]$;

(б) *если* $E \in \Sigma_0$, *то* $\operatorname{supp} z^E \subset E$.

Справедливость леммы без труда устанавливается с помощью трансфинитной индукции.

7) Для $E \in \Sigma_0$ и $n \in N$ построим множество R_E^n следующим образом. Если $\mu(\operatorname{supp} z^E) \leqslant a_n$, то полагаем $R_E^n = \operatorname{supp} z^E$. Если же $\mu(\operatorname{sup} pz^E) > a_n$, то за R_E^n, принимаем любое измеримое множество, такое, что $\mu R_E^n = a_n$, $R_E^n \subset \operatorname{supp} z^E$ и

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{t \in R_E^n} z^E(t) \geqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,1] \setminus R_E^n} z^E(t).$$

Если E фиксировано, то, очевидно, $\mu R_E^n = a_n$ при достаточно больших n. Кроме того, если $E_1 \neq E_2$ из Σ_0, то $\mu(R_{E_1}^n \cap R_{E_2}^n) = 0$ при достаточно больших n.

8) Зафиксируем какой-нибудь обобщенный предел Lim, определенный на классе всех ограниченных числовых последовательностей [7, с. 144]. По каждому $E \in \Sigma_0$ построим функционал $f^E \in M(\psi)^*_+$, положив

$$f^E(x) = \operatorname{Lim}\left(\left\{\frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int\limits_{R_E^n} x d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}\right), \quad x \in M(\psi).$$

Ясно, что $\| f^E \|_{M(\psi)^*} \leqslant 1$. Кроме того, $f^E(\chi_{[0,1]}) = 0$, ибо

$$\frac{1}{\psi(a_n)} \int\limits_{R_E^n} \chi_{[0,1]} d\mu \leqslant \frac{a_n}{\psi(a_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Заметим также, что $f^{E_1} \wedge f^{E_2} = 0$ при $E_1 \neq E_2$ $(E_1, E_2 \in \Sigma_0)$.

9) Возьмем произвольные попарно различные $E_1, E_2, \ldots, E_m \in \Sigma_0$ и для $x \in M(\psi)_+$ оценим сумму

$$\sigma = f^{E_1}(x) + f^{E_2}(x) + \cdots + f^{E_m}(x).$$

Фиксируем номер $n_0 \geqslant m$, такой, что при $n \geqslant n_0$ справедливо

$$\mu(R^n_{E_j} \cap R^n_{E_i}) = 0 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Тогда при $n \geqslant n_0$ имеем

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int\limits_{R^n_{E_k}} x d\mu \leqslant \frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int\limits_0^{ma_n} x^* d\mu \leqslant \frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int\limits_0^{na_n} x^* d\mu,$$

где x^* есть невозрастающая перестановка x. Отсюда

$$\gamma_n \leqslant \left[\frac{1}{\psi(na_n)} \cdot \int\limits_0^{na_n} x^* d\mu\right] \cdot \frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)} \leqslant \| x \|_{M(\psi)} \cdot \frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)} = 1$, то $\sigma = \operatorname{Lim} \gamma_n \leqslant \| x \|_{M(\psi)}$.

Отсюда ясно, что для любого $x \in M(\psi)$ справедливо

$$\sum_{E \in \Sigma_0} | f^E(x) | \leqslant \| x \|_{M(\psi)}.$$

10) Положим теперь

$$f(x) = \sum_{E \in \Sigma_0} f^E(x), \quad x \in M(\psi).$$

Ясно, что $f \in M(\psi)^*_+$, $\|f\|_{M(\psi)^*} \leqslant 1$ и $f(\chi_{[0,1]}) = 0$. Осталось показать, что $f^E > 0$ и $\|f_E\|_{M(\psi)^*} \geqslant 1$ при всех $E \in \Sigma_0$. Так как при достаточно больших $n \in N$

$$\frac{1}{\psi(a_n)} \int\limits_{R_E^n} z^E d\mu = \frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int\limits_0^{a_n} \varphi(t)\, dt = 1,$$

то

$$f^E(z^E) = \operatorname{Lim}\left(\left\{\frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int\limits_{R_E^n} z^E d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}\right) = 1.$$

Поэтому $\|f^E\|_{M(\psi)^*} \geqslant f(z^E) \geqslant f^E(z^E) \geqslant 1$.

Теорема доказана.

§ 5. О пространствах со смешанной нормой

В этом параграфе (T, Σ, μ) есть единичный квадрат $\{(t_1, t_2) : 0 \leqslant \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1\}$ с мерой Лебега. Пусть p, q суть числа, такие, что $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Через $L^{(p,q)}$ как обычно обозначаем пространство со смешанной нормой [8], элементы которого суть функции $x(t_1, t_2)$, определенные и измеримые на указанном квадрате, такие, что

$$\|x\|_{L(p,q)} = \|\,\|x\|_{L^p(t_1)}\|_{L^q(t_2)} < \infty^1.$$

Теорема 5. *Пусть $X = L^{(p,q)}$. Тогда*

(а) X^* *есть KB-пространство при* $(1 < p \leqslant \infty,\ 1 < q \leqslant \infty)$;

(б) X^* *счетного типа, но не является KB-пространством при* $(1 \leqslant p \leqslant \infty,\ q = 1)$ *и при* $(p = 1,\ 1 < q < \infty)$;

(в) X^* *не есть пространство счетного типа при* $(p = 1,\ q = \infty)$. *При этом, тем не менее, в пространстве* $L^{(1,\infty)}$ *все анормальные функционалы локализованы.*

---

[1] Подробнее,

$$\|x\|_{L(p,q)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 |x(t_1, t_2)|^p dt_1\right)^{\frac{q}{p}} dt_2\right)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } 1 \leqslant p, q < \infty; \\ \operatorname*{vraisup}_{t_2} \left(\int\limits_0^1 |x(t_1, t_2)|^p dt_1\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty;\ q = \infty; \\ \left(\int\limits_0^1 (\operatorname*{vraisup}_{t_1} |x(t_1, t_2)|)^q dt_2\right)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } p = \infty,\ 1 \leqslant q < \infty; \\ \operatorname*{vraisup}_{(t_1, t_2)} |x(t_1, t_2)| & \text{если } p = q = \infty. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 5 разобьем на ряд этапов:

1) Простые вычисления показывают, что при ($1 < p, \leqslant \infty$, $1 < q \leqslant \infty$) пространство X квазиравномерно выпукло, поэтому X^* есть KB-пространство. Утверждение (а) доказано.

2) В случае ($1 \leqslant p < \infty$, $q = 1$) и в случае ($p = 1$, $1 < q < \infty$) X, очевидно, есть KB-пространство, в силу чего $X^* = \overline{X}$ счетного типа. Так как в указанных случаях X не рефлексивно [8], то по теореме Огасавара [1, с. 294] X^* не есть KB-пространство. В случае ($p = \infty$, $q = 1$), т. е. в случае $X = L^{(\infty, 1)}$ дуальное пространство $X' = L^{(1, \infty)}$ не есть KB-пространство (см., например, [9]). Поэтому и подавно X^* не есть KB-пространство. Заметим, что измеримые ограниченные функции плотны в $L^{(\infty, 1)}$. Отсюда, в силу предложения 4, следует, что X^* счетного типа. Утверждение (б) доказано.

3) Всюду далее полагаем $X = L^{(1, \infty)}$. Зафиксируем какой-нибудь $F \in (L^\infty[0,1])^*$, такой, что при всех $y \in L^\infty[0, 1]$ справедливо неравенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\operatorname{vraiinf}_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon} y(t)] \leqslant F(y) \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}[\operatorname{vraisup}_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon} y(t)].$$

Такой функционал, существует.

4) Пусть $\tau \in [0, 1]$, $x \in X$. Для почти всех $t_2 \in [0, 1]$ полагаем

$$z_{\tau, x}(t_2) = \int\limits_{\tau-\tau t_2}^{\tau-\tau t_2+t_2} x(t_1, t_2)\, dt_1.$$

Ясно, что $z_{\tau, x} \in L^\infty[0, 1]$.

5). Положим теперь для $\tau \in [0, 1]$

$$\varphi_\tau(x) = F(z_{\tau, x}), \quad x \in X.$$

Ясно, что $\varphi_\tau \in X^*_+$, причем $\varphi_\tau > 0$.

6) Покажем, что для любого конечного числа попарно различных точек $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in [0, 1]$ справедливо неравенство $\|\sum_{k=1}^{n}\varphi_{\tau_k}\|_{X^*} \leqslant 1$. Действительно, пусть $x \in X_+$, $\|x\|_X \leqslant 1$. Для почти всех достаточно малых $t_2 > 0$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} z_{\tau_k, x}(t_2) \leqslant \int\limits_0^1 x(t_1, t_2)\, dt_1 \leqslant 1,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_{\tau_k}(x) = F\left(\sum_{k=1}^{n} z_{\tau_k, x}\right) \leqslant 1.$$

7) Положим теперь

$$f(x) = \sum_{\tau \in [0, 1]} \varphi_\tau(x), \quad x \in X.$$

Ясно, что $f \in X_+^*$ не есть функционал счетного типа, ибо функционалы φ_τ, $\tau \in [0, 1]$ попарно дизъюнктны и $0 < \varphi_\tau \leqslant f$. Итак, X^* не есть пространство счетного типа.

8) ***Лемма 6.*** *Для любого* $f \in X_+^*$ существует $g \in (L^\infty [0, 1])_+^*$, такой, что

$$f(x) \leqslant g\left(\int_0^1 x(t_1, t_2)\, dt_1\right) \text{ при всех } x \in X_+.$$

Доказательство. Так как множество $\{h \in \overline{X}_+ : \|h\|_{X^*} \leqslant 1\}$ слабо* плотно в множестве $\{h \in X_+^* : \|h\|_{X^*} \leqslant 1\}$, то существует направление $K_\alpha \in L^{(\infty+1)}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$, такое, что

$$\sup_{\alpha \in \mathrm{A}} \|K_\alpha\|_{L(\infty, 1)} < \infty$$

и

$\int_0^1 \int_0^1 K_\alpha(t_1, t_2)\, x(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 \underset{\alpha \in \mathrm{A}}{\longrightarrow} f(x)$ при всех $x \in X$. Положим для почти всех $t_2 \in [0, 1]$

$$H_\alpha(t_2) = \operatorname*{vraisup}_{0 \leqslant t_1 \leqslant 1} K_\alpha(t_1, t_2).$$

Для $\alpha \in \mathrm{A}$ определим функционал

$$h_\alpha(x) = \int_0^1 \int_0^1 x(t_1, t_2)\, H_\alpha(t_2)\, dt_1 dt_2, \quad x \in X.$$

Ясно, что $h_\alpha \in X_+^*$ и $\sup_{\alpha \in \mathrm{A}} \|h_\alpha\|_{X^*} < \infty$. Пусть $\varphi \in X_+^*$ есть обобщенная предельная точка направления h_α $(\alpha \in \mathrm{A})$. Для $y \in L^\infty [0, 1]$ положим

$$\hat{y}(t_1, t_2) = y(t_2) \text{ при } 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1.$$

Теперь взяв

$$g(y) = \varphi(\hat{y}), \quad y \in L^\infty [0, 1],$$

получаем, как легко видеть, искомый функционал g. Лемма 6 доказана.

9) ***Лемма 7.*** Пусть $f \in X_{an}^*$. *Тогда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует измеримое* $P \subset [0, 1]$, *такое, что* $\nu P < \varepsilon$ (здесь ν — мера Лебега на прямой) *и* $f = f_E$, *где*

$$E = \{(t_1, t_2) : 0 \leqslant t_1 \leqslant 1,\ t_2 \in P\}.$$

Доказательство. Можно считать, что $f \geqslant 0$. Пусть $g \in (L^\infty [0, 1])_+^*$ — соответствующий ему функционал из леммы 6. Разложим $g = g_1 + g_2$, где g_1 анормальный, а g_2 вполне линейный функционал на $L^\infty[0, 1]$. Пусть $v \in L^1[0, 1]$ такова, что

$$g_2(x) = \int_0^1 y(t)\, v(t)\, dt, \quad y \in L^\infty[0, 1].$$

Тогда при всех $x \in X_+$ имеем

$$f(x) \leqslant g_1\left(\int_0^1 x(t_1, t_2)\, dt_1\right) + \int_0^1\int_0^1 x(t_1, t_2)\, v(t_2)\, dt_1 dt_2.$$

Но функционал

$$G(x) = \int_0^1\int_0^1 x(t_1, t_2)\, v(t_2) dt_1 dt_2, \quad x \in X,$$

очевидно, вполне линеен на X, поэтому fdG. Следовательно,

$$f(x) \leqslant g_1\left(\int_0^1 x(t_1, t_2)\, dt_1\right), \quad x \in X_+.$$

Но g_1 анормальный, а значит, и локализованный функционал на $L^\infty[0, 1]$. Поэтому существует $P \subset [0, 1]$, такое, что $\nu P < \varepsilon$ и $g_1 = (g_1)_P$. Ясно, что P — требуемое множество. Лемма 7, а с ней и теорема 5, доказаны.

Обозначим через $L_0^{(p, q)}$ замыкание в $L^{(p, q)}$ множества всех ограниченных функций из $L^{(p, q)}$. Нетрудно видеть, что $L_0^{(p, q)} \neq L^{(p, q)}$ тогда и только тогда, когда $(1 \leqslant p < \infty,\ q = \infty)$.

Теорема 6. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда не существует проектора из* $L^{(p,\infty)}$ *на* $L_0^{(p, \infty)}$.

Действительно, из теорем 1 и 5 следует, что $(L^{(p, \infty)})^*_{an} = (L^{(p, \infty)})^*_{loc}$, после чего остается применить теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., «Наука», 1961. с. 78.
2. Вулих Б. З., Лозановский Г. Я. О метрической полноте нормированных и счетно-нормированных структур. — «Вестн. Ленингр. ун-та, сер. мат.» Вып. 19. № 4, 1966, с. 12—15.
3. Andô T. Linear functionals on Orlicz spaces. — Nieuw Archief Wiskunde, 1960, 3, VIII, p. 1—16.
4. Pelczynski A., Sudakov V. N. Remark on noncomplemented subspaces of the space m (S), Coll. Math, 1962, т. 9, p. 85—88.
5. Семенов Е. М. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций. — ДАН СССР. 1964, т. 156, № 6, с. 1292—1295.
6. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М., «Наука», 1950. 546 с.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., «Наука», 1959. 684 с.
8. Banedek A., Panzone R. The spaces L^P with mixed norm. — Duke Math I. 28, 1961 p. 301—324.
9. Seever G. L. A peculiar Banach function space.—„Proc. Amer. Math. Soc". 16, 1965, p. 662—664.